TD 1 : Espaces vectoriels normés

Exercice 1. *Maximum de deux normes*

Montrer que le maximum entre deux normes sur un espace vectoriel E est encore une norme sur E.

Exercice 2. *Comparaison de normes sur* $\mathbf{C}[X]$

Soit $a = (a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite à valeurs réelles. Pour $P = \sum p_k X^k \in \mathbf{C}[X]$ on pose :

$$N_a(P) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k |p_k|.$$

1. Montrer que N_a est bien définie et donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que N_a définisse une norme sur $\mathbf{C}[X]$.
2. Soient a et b deux suites réelles vérifiant la condition trouvée à la question 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour avoir équivalence entre N_a et N_b.

Exercice 3. *Comparaison de normes mixtes*

On se place sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Pour $a \in [0,1]$ et $f \in E$, on pose :

$$N_a(f) = \int_0^a |f(t)|\,\mathrm{d}t + \sup_{x\in[a,1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que pour tout $a \in [0,1]$, N_a est bien définie et qu'il s'agit d'une norme sur E.
2. Comparer N_a et N_b pour $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$.

Exercice 4. *Étrangetés en dimension infinie*

1. On munit dans un premier temps $\mathbf{R}[X]$ de la norme
$$\left\| \sum a_k X^k \right\|_\infty := \sup_{k\in\mathbf{N}} |a_k|.$$
Montrer que la suite $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée pour $\| \,.\, \|_\infty$. Peut-on en extraire une sous-suite convergente ?
2. Construire une norme sur $\mathbf{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers 0 pour cette norme.
3. On fixe maintenant $P \in \mathbf{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbf{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers P pour cette norme.

Remarque : Cela montre que le choix de la norme est crucial et qu'on doit donc le préciser dès qu'on parle de convergence, complétude...

Exercice 5. *De l'importance du corps de base...*

Considérons le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $E = \mathbf{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\}$ muni de

$$N_0(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}| \quad \text{et} \quad N_\infty(a + b\sqrt{2}) = \max(|a|, |b|).$$

Les normes N_0 et N_∞ sont-elles équivalentes ? Commenter.

Exercice 6. *Propriétés élémentaires sur les espaces complets*

On se place sur un espace vectoriel normé E. Montrer que :

1. La complétude est stable par union finie, intersection quelconque, et produit cartésien fini (et même dénombrable).
2. Un ensemble compact est complet.
3. Une partie complète est fermée.
4. Si E est complet, les sous-ensembles complets sont les sous-ensembles fermés.
5. Une partie A est complète si et seulement si toute suite décroissante $(F_n)_{n\geqslant 0}$ de fermés non vides de A dont le diamètre tend vers zéro a une intersection non vide (et réduite à un point).

Exercice 7. *Complétude en termes de séries*

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Exercice 8. *Complétude de l'espace de fonctions continues bornées*

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, avec F complet. On note $\mathcal{C}_b^0(E, F)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur E à valeurs dans F. On le munit de la norme uniforme définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^0(E, F), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_F.$$

Montrer qu'il s'agit d'un espace complet.

Exercice 9. *Complétude de l'espace des fonctions bornées*

On note $\mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions bornées sur X à valeurs réelles, où X est un ensemble quelconque. On le munit de la norme uniforme définie par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, \mathbf{R}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Montrer qu'il s'agit d'un espace complet.

Exercice 10. *Fonctions qui tendent vers* 0 *à l'infini*

On note :

$$\mathcal{C}_0^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}),\ f \underset{\pm\infty}{\to} 0 \right\},$$

qu'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que cet espace est complet.

Exercice 11. *Complétude de l'espace des suites convergentes*

On note X le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ formé des suites à valeurs réelles qui sont convergentes. On munit X de la norme uniforme définie par

$$\forall u \in X,\ \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|,$$

Montrer que $(X, \|\ \|_\infty)$ est complet.

Exercice 12. *Fonctions continues sur* $[0,1]$ *et norme intégrale*

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.

1. Montrer que l'application :

$$f \in E \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

   définit une norme sur E.
2. $(E, \|\cdot\|_1)$ est-il complet ?

Exercice 13. *Polynômes : normes et complétude*

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{C}[X]$. On pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2}, \quad \|P\|_\infty = \sup_{k=0,\dots,n} |a_k|.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi trois normes.
2. Sont-elles équivalentes ?
3. $\mathbf{C}[X]$ est-il complet pour l'une d'entre elles ?

Remarque : L'utilisation du lemme de Baire (cf 2*ème partie du cours) permet de montrer que* $\mathbf{C}[X]$ *n'est complet pour aucune norme. Plus précisément c'est vrai pour n'importe quel* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel admettant une base algébrique dénombrable.*

Exercice 14. *Fonctions hölderiennes*

Soit $\alpha \in (0,1]$. On note Lip_α l'espace des fonctions α-hölderiennes sur $[0,1]$ à valeurs réelles.

1. Que dire d'une fonction α-hölderienne avec $\alpha > 1$?
2. Montrer que l'application N_α définie par :

$$N_\alpha(f) = \|f\|_\infty + \sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

   est une norme sur Lip_α.
3. Montrer que Lip_α muni de N_α est un espace de Banach.
4. Les normes N_α et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 15. *Espaces de suites*

1. Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$. Montrer que $\ell^p(\mathbf{N},\mathbf{R}) \subset \ell^q(\mathbf{N},\mathbf{R})$ et que l'injection est continue. Cette inclusion peut-elle être une égalité ?

2. Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $(\ell^p(\mathbf{N}, \mathbf{R}), \|\cdot\|_p)$ est complet.
3. On note :

$$c_0(\mathbf{N}) = \left\{u = (u_n)_{n \geqslant 0} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}},\ u_n \to 0\right\},$$

qu'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer qu'il s'agit d'un espace complet.
4. Quelle est l'adhérence de $\ell^p(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ dans $\ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R})$?

Exercice 16. *Contre-exemples au théorème du point fixe*

Trouver des espaces vectoriels normés E et des applications f qui satisfont :

1. f est contractante de E dans lui-même mais n'admet pas de point fixe car E n'est pas complet.
2. E est complet, f est contractante mais n'admet pas de point fixe car n'envoie pas E dans lui-même.
3. E est complet, f envoie cet espace dans lui-même, f satisfait

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \tag{1}$$

mais f est sans point fixe.
4. E est complet, f envoie E dans E et admet plusieurs points fixes.

Exercice 17. *Théorème du point fixe dans un compact*

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé E, et soit $f \colon A \to A$ une application contractante au sens de (1). Montrer que f admet un unique point fixe $a \in A$ (*indication* : on pourra considérer l'application $x \mapsto \|x - f(x)\|$). Montrer que partant de n'importe quel point $x_0 \in A$, la suite des itérés de x_0 par f converge vers ce point fixe.

Exercice 18. *Théorème du point fixe avec une itérée contractante*

Soit E un espace de Banach et soit $f : E \to E$ une application telle qu'il existe $N \geqslant 1$ tel que f^N (l'itérée N-ème de f) soit contractante.

1. Montrer que f admet un unique point fixe $a \in E$.
2. Montrer que pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérées par f partant de x_0 définie par : $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, converge vers a.

Exercice 19. *Équation intégrale linéaire de Volterra*

Soient $I = [a, b]$ et $K \in \mathcal{C}^0(I \times I, \mathbf{R})$. On note $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$. Montrer que pour toute fonction $\phi \in E$, il existe une unique $f \in E$ solution de :

$$f(x) = \phi(x) + \int_a^x K(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y, \quad \forall x \in I.$$

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 20. *Équation intégrale non-linéaire de Volterra*

Soit $T > 0$ et $K \in \mathcal{C}^0([0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$. On suppose qu'il existe $L > 0$ telle que :

$$\forall x, t \in [0, T],\ \forall u, u' \in \mathbf{R},\ |K(x, t, u) - K(x, t, u')| \leq L|u - u'|.$$

Montrer que pour toute $\phi \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbf{R})$, il existe une unique $f \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbf{R})$ solution de :

$$f(x) = \phi(x) + \int_0^x K(x, t, f(t))\, \mathrm{d}t, \quad \forall x \in [0, T].$$