Licence 3 de Mathématiques — ENS Rennes
EVNCD Partie I — 2023-2024

TD 4 : Différentielle

Exercice 1. *Application directe de la définition*
Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ \|f(x)\| \leqslant M\|x\|^2.$$

f est-elle différentiable en 0 ?

Exercice 2. *Défauts de la dérivée directionnelle*

1. On considère $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que f admet une dérivée suivant tous les vecteurs en $(0,0)$, mais que f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. On considère $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ donnée par

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ suivant tous les vecteurs mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3. *Applications bilinéaires continues*
Soit $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. On pose $E = E_1 \times E_2$ qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_E$ définie par :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in E,\ \|x\|_E = \max\{\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}\}.$$

Soit $f : E \to F$ une application bilinéaire continue. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner l'expression de sa différentielle. En déduire que si $(A, \|.\|)$ est une algèbre normée, l'application $(x,y) \in A \times A \mapsto xy \in A$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Remarque : plus généralement, on peut montrer que le résultat reste valable pour toute application n-linéaire continue (voir le poly de cours). La preuve du caractère $\mathcal{C}^1$ est difficile.

Exercice 4. *Puissance sur une algèbre normée*
Soit E une algèbre normée et soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'application puissance : $g_n : x \in E \mapsto x^n \in E$, est de classe $\mathcal{C}^1$ (on pourra utiliser le résultat de la remarque suivant l'exercice 3) et que :

$$\forall x \in E,\ \forall h \in E,\ dg_n(x).h = \sum_{k=0}^{n-1} x^k h x^{n-1-k}.$$

Exercice 5. *Transformation d'une suite ℓ^p*

Soient $p \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ une fonction nulle en 0. On pose :

$$F \;:\; \begin{array}{ccc} \ell^p(\mathbf{N},\mathbf{R}) & \to & \ell^p(\mathbf{N},\mathbf{R}) \\ x=(x_n)_{n\geqslant 0} & \mapsto & F(x)=(f(x_n))_{n\geqslant 0} \end{array}.$$

1. Montrer que F est bien définie.
2. Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 6. *Changements de variables*

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une application différentiable.

1. Exprimer la dérivée de $x \in \mathbf{R} \mapsto g(x) = f(x,x) \in \mathbf{R}$ en fonction de la différentielle de f.
2. Exprimer la différentielle de : $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto h(x,y) = f(y,x) \in \mathbf{R}$ en fonction de la différentielle de f.

Exercice 7. *Différentielle du déterminant*

Montrer que l'application déterminant est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 8. *La trace de la puissance*

Soit $k \geqslant 1$. Montrer que l'application :

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(M^k) \in \mathbf{R},$$

est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

Exercice 9. *Détecteur de vecteurs propres*

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$ et u un endomorphisme symétrique (i.e. pour tout $(x,y) \in E^2$: $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$) continu de E.

1. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle u(x), x\rangle \in \mathbf{R}$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. On considère l'application :

$$\varphi \;:\; \begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \frac{\langle u(x),x\rangle}{\|x\|^2} \end{array}.$$

   Établir qu'il s'agit d'une application différentiable et calculer sa différentielle. Montrer que pour tout élément non nul a de E, $d\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 10. *Un calcul de différentielle en dimension infinie*

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R}),\ f(0) = 0\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$, qu'on munit des normes :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_E = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall g \in F,\ \|g\|_F = \|g\|_\infty.$$

On définit alors $T : E \to F$ par :

$$\forall f \in E,\ Tf = f' + f^2.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_E$ définit bien une norme sur E. L'espace vectoriel normé obtenu est il complet ?
2. Montrer que T est $\mathcal{C}^1$ et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 11. *L'intégrale du déterminant*

On note $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R}^2)$ qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_E$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_E = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Montrer que l'application $T\colon E \to \mathbf{R}$ définie par

$$f \mapsto \int_0^1 \det(f(t), f'(t))\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

Exercice 12. *Transformation d'une suite ℓ^∞*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On pose :

$$F \quad : \quad \begin{array}{ccc} \ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R}) & \to & \ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ x = (x_n)_{n \geqslant 0} & \mapsto & F(x) = (f(x_n))_{n \geqslant 0} \end{array}.$$

Montrer que F est deux fois différentiable et calculer sa différentielle seconde.

Exercice 13. *Une généralisation de l'égalité des accroissements finis*

Soient E un espace vectoriel normé et Ω un ouvert convexe de E. Soit $f : \Omega \to \mathbf{R}$ une application différentiable. Montrer que pour tous $x, y \in \Omega$, il existe $c \in [x, y]$ tel que :

$$f(y) = f(x) + df(c).(y - x).$$

Exercice 14. *Calcul concret de dérivées partielles*

Étudier la continuité puis l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 15. *Continuité et différentiabilité en fonction d'un paramètre*

Soit $\alpha > 0$. Étudier, en fonction de α, la continuité puis la différentiabilité à l'origine de l'application $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 16. *Différentiable ?*

On considère $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.
2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 17. *Une limite*

Calculer la limite :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}.$$

Indication : on pourra utiliser la fonction $f : \mathbf{R}\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$ *définie par :* $f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$.

Exercice 18. *Rang localement constant*

Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ une application $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbf{R}^n$ tel que le rang de df soit localement constant sur U (i.e pour tout $x \in U$, il existe un ouvert contenant x sur lequel df est de rang constant).
Indication : On pourra considérer

$$U := \{x \in \mathbf{R}^n \mid y \mapsto \mathrm{rg}(df(y)) \text{ atteint un maximum local en } x\}$$

Exercice 19. On suppose que E est une algèbre de Banach. Montrer que l'inversion est deux fois différentiable sur l'ensemble des inversibles de E noté $\mathrm{Inv}(E)$ (ouvert dans E) et donner sa différentielle seconde.

Exercice 20. *Lemme d'Hadamard*

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R})$, pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, telles que :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j g_{i,j}(x).$$

2. Généraliser.

Exercice 21. *Fonctions invariantes par translation*

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ telles que :

$$\forall x, y, t \in \mathbf{R},\ f(x+ta, y+tb) = f(x,y).$$