Licence 3 de Mathématiques — ENS Rennes

EVNCD Partie I — 2023-2024

TD 4 : Différentielle

Exercice 9 :
Détecteur de vecteurs propres

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et u un endomorphisme symétrique (i.e. pour tout $(x, y) \in E^2$: $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$) continu de E.

1. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle u(x), x\rangle \in \mathbf{R}$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & E \setminus \{0\} & \to & \mathbf{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{\langle u(x),x\rangle}{\|x\|^2}. \end{array}$$

   Établir qu'il s'agit d'une application différentiable et calculer sa différentielle. Montrer que pour tout élément non nul a de E, $d\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Remarque : Cet exercice a été corrigé en TD, mais nous avons vu au passage toutes les idées qui permettent de démontrer une formule pour la différentielle d'un quotient. Soit E un espace vectoriel normé, $f : E \to \mathbf{R}$ et $g : E \to \mathbf{R}^*$ deux applications différentiables. Alors l'application

$$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

est différentiable, et pour tout $x \in E$,

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g(x)^2}$$

Attention, il faut bien comprendre que c'est une égalité dans $\mathcal{L}_c(E, \mathbf{R})$. Pour montrer ce résultat, on utilise le théorème des fonctions composées en introduisant les deux applications :

$$\begin{array}{ccccc} F & : & E & \to & \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* \\ & & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} h & : & \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* & \to & \mathbf{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

Alors $\frac{f}{g} = h \circ F$ et il ne reste qu'à calculer les différentielles de F et h pour conclure.

Exercice 14 :
Calcul concret de dérivées partielles

Étudier la continuité puis l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction :

— Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$(x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \geqslant 2x^2y^2$$

donc pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$|f(x,y)| = x^2y^2|\ln(x^2+y^2)| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2|\ln(x^2+y^2)| \underset{\|(x,y)\|\to 0}{\longrightarrow} 0$$

car $t\ln(t) \to 0$ lorsque $t \to 0^+$. Ainsi, f est continue en $(0,0)$.

— En dehors de $(0,0)$, f admet des dérivées partielles par rapport à chacune des variables, et on peut les calculer : pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\partial_1 f(x,y) = 2xy^2\ln(x^2+y^2) + x^2y^2\frac{2x}{x^2+y^2} = 2xy^2\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{x^2}{x^2+y^2}\right)$$

et

$$\partial_2 f(x,y) = 2x^2y\ln(x^2+y^2) + x^2y^2\frac{2y}{x^2+y^2} = 2x^2y\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) = \partial_1 f(y,x)$$

Remarque : on peut aussi montrer que $\partial_2 f(x,y) = \partial_1 f(y,x)$ en utilisant la question 2 de l'exercice 6 et le fait que f est symétrique.

— Passons à la question de l'existence des dérivées partielles en $(0,0)$. Pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $\partial_1 f(0,0)$ existe et est égale à 0. Par symétrie de f on a aussi

$$\frac{f(0,t)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\partial_2 f(0,0)$ existe et est égale à 0. Ainsi, nous avons montré que f admettait des dérivées partielles par rapport aux deux coordonnées en tout point de $\mathbf{R}^2$.

— Étudions la continuité des dérivées partielles.

$$\begin{array}{cccc} \partial_1 f & : & \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \partial_1 f(x,y) \end{array}$$

est clairement continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ car elle s'écrit comme une composée de fontions continues. Il nous reste à étudier la continuité en $(0,0)$. Or pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, on a

$$|\partial_1 f(x,y)| = \left|2xy^2\ln(x^2+y^2) + x^2y^2\frac{2x}{x^2+y^2}\right| \leqslant |y|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) + |x|\frac{x^2+y^2}{2}$$

car $2|xy| \leqslant x^2+y^2$. En utilisant à nouveau le fait que $t\ln(t) \to 0$ lorsque $t \to 0^+$, on en déduit que $|\partial_1 f(x,y)|$ tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ dans $\mathbf{R}^2$. Ainsi, $\partial_1 f$ est continue sur $\mathbf{R}^2$. De plus, comme $\partial_2 f(x,y) = \partial_1 f(y,x)$, la deuxième dérivée partielle est également continue sur $\mathbf{R}^2$.

Conclusion : nous avons montré que les deux dérivées partielles existaient et étaient continues sur tout $\mathbf{R}^2$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 16 :
Différentiable ?

On considère $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.

2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Correction : On note $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^2$.

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, on a
$$|f(x,y)| = \frac{|x||\sin(y^2)|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|x|y^2}{x^2+y^2}$$
car pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|\sin(t)| \leqslant |t|$. De plus, $|x||y| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$, donc
$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|y|}{2} \underset{\|(x,y)\|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Ceci montre la continuité de f en $(0,0)$, et sa continuité partout ailleurs est claire.
2. Pour tout $t \in \mathbf{R}^*$,
$$\frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$
donc $\partial_1 f(0,0)$ existe et vaut 0. De même,
$$\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$
pour tout $t \neq 0$, donc $\partial_2 f(0,0) = 0$.
3. Si f était différentiable en $(0,0)$, alors on aurait
$$\begin{aligned} f(a,b) &= f(0,0) + a\partial_1 f(0,0) + b\partial_2 f(0,0) + o\left(\|(a,b)\|\right) \\ &= o\left(\|(a,b)\|\right) \end{aligned}$$
lorsque $\|(a,b)\|$ tend vers 0. Or pour $t \in \mathbf{R}^*$,
$$\frac{|f(t,t)|}{\|(t,t)\|} = \frac{|t||\sin(t^2)|}{(t^2+t^2)\sqrt{t^2+t^2}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{|t|t^2}{2t^2\sqrt{2}|t|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \not\longrightarrow 0$$
Donc $f(t,t)$ n'est pas négligeable devant $\|(t,t)\|$ lorsque t tend vers 0. Ainsi, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 20 :

Lemme d'Hadamard

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R})$, pour $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, telles que :
$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j g_{i,j}(x).$$
2. Généraliser.

Indication : Comme dans l'exercice 9 de la feuille de TD 3, qui s'appelait déjà lemme d'Hadamard, on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégral et le théorème de régularité sous l'intégrale.