Exercices de colles 2019/2020

Voici quelques exercices donnés en colles de maths, dans la classe de MP* du lycée Montaigne à Bordeaux. La plupart du temps, il y a une suggestion de correction relativement détaillée. Plus rarement, seulement quelques indications sont données. Certains exercices ne sont vraiment pas faciles, et relèvent plus de choses que j'ai comprises pendant ma préparation à l'agrégation que de ce que je savais faire en prépa. il est normal de ne pas y arriver sans plus d'indications (qui sont données oralement pendant la colle), les corrections sont là pour compenser cela. Même si cela peut-être frustrant de ne pas réussir tout seul un exercice, je pense qu'il est très enrichissant d'y réfléchir sérieusement pendant au moins 30 minutes, de repérer ce qui coince, puis de regarder la correction. Les exercices un peu plus originaux viennent des RMS, dont je recommande la lecture. Enfin, ce document est en quelque sorte un « best-of » d'un document bien plus long (et bien moins relu) qui contient tous les exercices donnés en colle par Émilie, Pierre, Thomas et moi, dans des prépas différentes. Je leur dois plusieurs idées d'exercices et mêmes certaines corrections rédigées, donc un grand merci !

N'hésitez pas à me signaler toute faute de frappe, où à me poser des questions si des zones floues subsistent.

Table des matières

Semaine 1 : révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1 (Un classique) **:**
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $u_1, \ldots, u_k \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux. Montrer que si $k \geqslant n$, alors $u_1 \circ \cdots \circ u_k$ est nul.

Idée de correction : On raisonne par récurrence sur n.

- Si $n = 1$, le seul nilpotent est l'endomorphisme nul, donc le résultat est vrai.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que le résultat est vrai pour tout espace vectoriel de dimension $< n$.

  Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $u_1, \ldots, u_k$ comme dans l'énoncé.
  Puisque les u_i commutent deux à deux, $F := \mathrm{Im}(u_k)$ est stable par chacun des u_i. Pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, notons v_i l'endomorphisme induit par u_i sur F. Comme les u_i sont nilpotents, les v_i le sont aussi. Ainsi, $v_1, \ldots v_{k-1}$ sont $k-1$ endomorphismes de F, nilpotents, et qui commutent deux à deux. Or $k - 1 \geqslant \dim F$, car F est l'image de u_k, et u_k n'est pas surjectif car il est nilpotent. Par hypothèse de récurrence, on a donc :

  $$v_1 \circ \cdots \circ v_{k-1} = 0_{\mathcal{L}(F)}$$

  D'où :

  $$\forall x \in E,\ (u_1 \circ \cdots \circ u_{k-1})(\underbrace{u_k(x)}_{\in F}) = (v_1 \circ \cdots \circ v_{k-1})(u_k(x)) = 0$$

  ce qui conclut.

Et si on enlève l'hypothèse « commutent deux à deux » ?

Alors ça ne marche plus. Par exemple, les matrices

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont toutes deux nilpotentes, et leur produit n'est pas nul (alors que c'est bien un produit de deux endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel de dimension 2).

$\square$

Exercice 2 (Un autre classique) **:**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(M) = 0$ si et seulement si M est semblable à une matrice à diagonale nulle.
2. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est exactement le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ engendré par les matrices nilpotentes.

Idée de correction :

1. Tout d'abord, on remarque que si M est semblable à une matrice à diagonale nulle, alors sa trace est nulle (car deux matrices semblables ont la même trace). C'est la réciproque qui est plus difficile à montrer. On raisonne par récurrence sur la taille des matrices. En dimension 1, si $\mathrm{tr}(M) = 0$ alors $M = 0$, donc est en particulier semblable à une matrice à diagonale nulle. Maintenant, soit $n \geqslant 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice dont la trace est nulle.
   - Si $M = 0$, alors elle est semblable à une matrice à diagonale nulle.
   - Sinon, M ne peut pas être une homothétie (une homothétie non nulle a une trace non nulle, on utilise ici le fait que le corps de base est de caractéristique nulle). Notons u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à M. Comme u n'est pas une homothétie, il

existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $(x, u(x))$ est libre (contraposée d'un exercice classique). On complète ces deux vecteurs en une base de $\mathbf{R}^n$:

$$\mathcal{B} = (x, u(x), e_3, \dots, e_n).$$

Dans cette base, la matrice de u est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 1 & & & & \\ 0 & & N & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Comme $\mathrm{tr}(u) = 0$, la trace de N doit être nulle, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à N. Il existe donc une matrice $P \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}NP$ soit à diagonale nulle. On pose alors

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$$

et on vérifie que $Q^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)Q$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & \dots & * \\ * & & & & \\ * & & P^{-1}NP & & \\ \vdots & & & & \\ * & & & & \end{pmatrix} =: M'$$

qui est à diagonale nulle. On alors M qui est semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, elle même semblable à M', et donc M est bien semblable à une matrice à diagonale nulle.

2. Toute combinaison linéaire de matrices nilpotentes est de trace nulle, par linéarité de la trace + le fait que les matrices nilpotentes ont une trace nulle (c'est clair une fois qu'on a fait le chapitre de réduction). Réciproquement, si $\mathrm{tr}(M) = 0$, alors M est semblable à une matrice à diagonale nulle, c'est-à-dire une combinaison linéaire des matrices élémentaires $E_{i,j}$ pour $i \neq j$. Et donc M s'écrit comme une combinaison linéaire de matrices de la forme $P^{-1}E_{i,j}P$ pour des $i \neq j$, et ces matrices sont nilpotentes.

□

Exercice 3 (Super exercice je trouve) **:**
Soit $\mathbf{K}$ un corps, E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E : $I \oplus N = E$. On définit

$$G := \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(f) = I \text{ et } \ker(f) = N\}$$

Montrer que G est un groupe pour la loi $\circ$.

Idée de correction : Ce qu'il faut assez vite remarquer, c'est que pour une fois on va devoir montrer que c'est un groupe sans montrer que c'est un sous-groupe de quelque chsoe ... En effet, $\mathcal{L}(E)$ n'est pas un groupe pour la loi $\circ$, et le seul groupe qu'on pourrait à la rigueur avoir envie de considérer est $\mathrm{GL}(E)$, mais G n'a pas de raison d'être inclus dedans, car N n'est pas forcément réduit à $\{0\}$.

On revient donc à la définition. Il s'agit de montrer que $\circ$ définit bien une loi de composition interne sur G, puis que $(G, \circ)$ est un groupe, c'est-à dire :

- La loi $\circ$ est associative.
- Il existe un élément neutre.
- Tout le monde admet un inverse pour $\circ$.

C'est parti ! Montrons tout d'abord que la loi $\circ$ est bien une loi de composition interne. Soit $f, g \in G$. Alors f et g appartiennent à $\mathcal{L}(E)$, donc $f \circ g$ a bien un sens, et définit un élément de $\mathcal{L}(E)$. De plus

$$I = \mathrm{Im}(f) = f(I \oplus N) =^{1} f(I) = f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f \circ g)$$

et

$$\ker(f \circ g) = g^{-1}(\ker(f)) = g^{-1}(N) = g^{-1}(N \cap I) = \ker(g) = N$$

Ainsi, $f \circ g \in G$. On a donc montré que $\circ$ définissait bien une loi ce composition interne sur G.

L'associativité de $(G, \circ)$ découle immédiatement de l'associativité de la loi $\circ$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Pour l'élément neutre : on cherche un élément $e \in G$ tel que pour tout $f \in G$, $f \circ e = f = e \circ f$. Supposons qu'un tel e existe, et essayons de trouver des choses qu'il doit nécessairement satisfaire. Déjà, l'égalité $f = e \circ f$ nous dit que $e_{|I} = id$. D'autre part, comme $e \in G$, e est nul sur N. Finalement, $e \in \mathcal{L}(E)$, e est nul sur N, et e vaut l'identité sur I. Donc e est le projecteur sur I parallèlement à N. Réciproquement, on montre que ce projecteur est bien un élément neutre pour $(G, \circ)$ (il suffit d'écrire ce qu'on veut montrer pour voir que le choix de ce projecteur est le bon).

Enfin, montrons que pour tout $f \in G$ il existe $g \in G$ tel que $f \circ g = g \circ f = e$. Soit $f \in G$. Puisque I est un supplémentaire de $\ker(f) = N$ dans E, f induit un isomorphisme entre I et l'image de f, qui n'est autre que I. Notons f_I l'isomorphisme de I induit par f. On définit g comme ceci :

- $g_{|N} = 0$ (on a pas le choix, si on veut que g appartienne à G).
- $g_{|I} = f_I^{-1}$.

On définit ainsi une application linéaire sur E puisque $E = I \oplus N$. De plus, $f \circ g$ est nulle sur N et vaut l'identité sur I par construction, donc $f \circ g = e$. De même, $g \circ f = e$.

$\square$

Remarque :
En prenant $N = \{0\}$ et $I = E$ on retrouve le résultat bien connu : $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Exercice 4 (Astucieux) **:**
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA) \\ AB - BA \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \end{cases}$$

Montrer que n est un multiple de 6.

Idée de correction : On factorise comme on peut le $A^2 + B^2$ pour faire apparaître du $AB - BA$:

$$A^2 + B^2 = (A - iB)(A + iB) + i(BA - AB)$$

($\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ n'est pas commutatif ... sauf pour $n = 1$).

[1] car $N \subseteq \ker(f)$.

On en déduit que $(A - iB)(A + iB) = (\sqrt{3} + i)(AB - BA) = 2e^{i\pi/6}(AB - BA)$. En passant au déterminant, on obtient :

$$\underbrace{\det(A - iB)\det(A + iB)}_{=|\det(A-iB)|^2} = 2^n e^{\frac{in\pi}{6}} \det(AB - BA)$$

On a utilisé que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ alors $\overline{\det(M)} = \det\left(\overline{M}\right)$, ce qui se voit facilement en revenant à la formule du déterminant.

Or $AB - BA \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, donc $\det(AB - BA)$ est un réel non nul, et donc en divisant on trouve que $e^{in\pi/6}$ doit être réel, donc n est un multiple de 6. $\square$

Exercice 5 (Oral Ulm) **:**
Soit $f \colon \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une application surjective et telle que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, et pour tout complexe t,

$$\det(f(A) + tf(B)) = \det(A + tB).$$

Montrer que f est bijective et préserve le rang.

Idée de correction : (difficile de voir comment trouver sans connaître la caractérisation du rang donnée dans le lemme, mais en tout cas je trouve la preuve élégante).
Commençons par montrer la bijectivité. Puisque f est déjà surjective par hypothèse, il suffit de montrer qu'elle est injective. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $f(A) = f(B)$.
Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, pour tout $t \in \mathbf{C}$:

$$\det(A + tM) = \det(f(A) + tf(M)) = \det(f(B) + tf(M)) = \det(B + tM).$$

En particulier, pour tout $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, en posant $M = N - B$ et $t = 1$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\det(A - B + N) = \det(N). \tag{1}$$

On veut en déduire que la matrice $A - B$ est nulle. Notons r la rang de $A - B$. Alors on sait qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telles que $(A - B) = PJ_rQ$, où

$$J_r := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En prenant $N = PQ$ dans (1), on a : $\det(P(J_r + I_n)Q) = \det(PQ)$. En simplifiant par $\det(PQ) \in \mathbf{C}^\times$, on en déduit que $\det(J_r + I_n) = 1$. Or $\det(J_r + I_n) = 2^r$, donc $r = 0$. Ainsi, $A - B$ est de rang nul, donc $A = B$.

Maintenant, montrons que f préserve le rang. Nous allons démontrer la caractérisation suivante du rang :

Lemme : Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, le rang de M est égal au maximum des degrés des polynômes $\det(A + XM)$ lorsque A parcourt $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

En effet, notons r le rang de M, et prenons $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telles que $M = PJ_rQ$. Alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\det(A + XM) = \det(A + XPJ_rQ) = \det(P(P^{-1}AQ^{-1} + XJ_r)Q) = \det(PQ)\det(P^{-1}AQ^{-1} + XJ_r)$$

et en développant le déterminant qui apparaît à droite, on obtient un polynôme de degré inférieur ou égal à r. De plus, pour la matrice $A = PQ$, on a $\det(A + XM) = \det(PQ)\det(I_n + XJ_r) =$

$\det(PQ)(1+X)^r$, qui est un polynôme de degré exactement r. Donc on a bien démontré le lemme.

Utilisons cette caractérisation pour montrer que f préserve le rang. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. D'après le lemme, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M) &= \max_{A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})} \deg(\det(A+XM)) \\
&= \max_{A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})} \deg(\det(f(A)+Xf(M)) \quad \text{(d'après l'hypothèse faite sur } f) \\
&= \max_{B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})} \deg(\det(B+Xf(M)) \quad \text{(par surjectivité de } f) \\
&= \mathrm{rg}(f(M))
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que f est bijective et préserve le rang.

□

Exercice 6 (Oral Ulm) **:**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$.

1. Comparer le rang de M dans $\mathbf{C}$, dans $\mathbf{R}$, dans $\mathbf{Q}$, et dans $\mathbf{F}_p$ avec p premier.
2. Existe-t-il toujours un nombre premier p tel que $\mathrm{rg}_{\mathbf{Q}}(M) = \mathrm{rg}_{\mathbf{F}_p}(M)$?

Idée de correction : L'énoncé est peut-être un peu brutal si on a jamais vu ces questions de comportement du rang avec les extensions de corps. On peut rajouter un première question pour rappeler ou démontrer la caractérisation du rang comme la taille maximale d'une matrice inversible extraite de M. Esquissons la preuve de ce résultat.

Lemme 1 : Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ et B est une matrice extraite de A, alors $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.

En effet, soit $r = \mathrm{rg}(B)$. Alors B possède r colonnes linéairement indépendantes, notées $B_{i_1}, \dots, B_{i_r}$. On rajoute à ces colonnes les lignes qu'il leur manque pour être des colonnes de A, on obtient $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$. Alors ces r colonnes de A sont libres. En effet, si $\sum \lambda_{i_k} A_{i_k} = 0$ alors il suffit de restreindre cette égalité aux bonnes lignes pour obtenir que $\sum \lambda_{i_k} B_{i_k} = 0$ et conclure à la nullité des λ_{i_k}.

Lemme 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$, soit $r \leqslant \min(m,n)$. Il y a équivalence entre :

(i) $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$.

(ii) *Il existe une matrice carrée B extraite de A, inversible, de taille $r \times r$.*

En effet, si A admet une matrice extraite inversible B de taille r, alors B est en particulier de rang r, et donc d'après le lemme 1 ci-dessus, $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$ (car le rang de A est supérieur ou égal au rang de n'importe laquelle de ses matrices extraites).
Réciproquement, si $\mathrm{rg}(A) \geqslant r$, alors on peut trouver r colonnes de A linéairement indépendantes, disons $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$. La matrice $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathbf{K})$ formée de ces r colonnes est alors de rang r. Mais puisque son rang est aussi le rang de ses vecteurs lignes, on peut trouver r lignes de $\tilde{A}$ qui forment une famille libre. En ne gardant que ces r lignes, on obtient finalement une matrice carrée $r \times r$ extraite de A, de rang r, donc inversible.

Corollaire : Le rang de A est la taille maximale des matrices carrées inversibles extraites de A.

1. Après le rappel ci-dessus, on peut répondre à une première partie de la question[2] :

$$\mathrm{rg}_{\mathbf{Q}}(M) = \mathrm{rg}_{\mathbf{R}}(M) = \mathrm{rg}_{\mathbf{C}}(M)$$

En effet, la non-nullité du déterminant d'une matrice extraite ne dépend pas du corps de caractéristique nulle dans lequel on voit ce déterminant. Par contre, un déterminant non nul peut être nul modulo p, et donc des matrices extraites inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ ne le sont peut-être plus dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{F}_p)$. Donc :

$$\mathrm{rg}_{\mathbf{F}_p}(M) \leqslant \mathrm{rg}_{\mathbf{Q}}(M)$$

De plus, l'inégalité peut être stricte, comme on peut le voir avec la matrice $M = pI_n$

2. L'idée est de prendre p un nombre premier qui ne divise aucun des déterminants des matrices inversibles extraites de M. Ainsi, tout nombre premier suffisamment grand convient.

□

Semaines 2 et 3 : réduction

Exercice 7 (Bon exercice de révision) **:** 1. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. On suppose que v^2 est diagonalisable. Peut-on en déduire que v est diagonalisable ?

2. On suppose maintenant que $v \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Si v^2 est diagonalisable, est-ce que v est diagonalisable ?

3. Soit $v \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ et $l \geqslant 2$. On suppose que v^l est diagonalisable. Trouver une CNS pour que v soit diagonalisable.

Idée de correction : 1. Non. On peut par exemple penser à la matrice $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Celle-ci vérifie $N^2 = 0$ donc N^2 est diagonalisable, alors que N n'est pas diagonalisable. En effet, étant nilpotente, sa diagonalisabilité entrainerait que $N = 0$, ce qui n'est pas.

2. Notons P le polynôme minimal de v^2. Puisque v^2 est diagonalisable, P est scindé à racines simples. Notons $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$, où les λ_i sont des complexes deux à deux distincts. Comme $P(v^2) = 0$, le polynôme $P(X^2) = \prod_{i=1}^r \left(X^2 - \lambda_i\right)$ est un polynôme annulateur de v. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, choisissons μ_i une racine carrée de λ_i dans $\mathbf{C}$. Alors

$$P(X^2) = \prod_{i=1}^r \left(X^2 - \mu_i^2\right) = \prod_{i=1}^r (X - \mu_i)(X + \mu_i)$$

Si aucun des μ_i n'est nul, ce polynôme est scindé à racines simples. C'est ici que l'hypothèse « $v \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ » intervient. En effet, v^2 étant inversible, 0 n'est pas valeur propre de v^2, donc aucun des λ_i n'est nul, donc il en est de même des μ_i. Ainsi, v annule un polynôme scindé à racines simples ($P(X^2)$), donc v est diagonalisable.

3. Soit v comme dans l'énoncé. On commence par analyser la situation. Puisque par hypothèse v^l est diagonalisable, $\mathbf{C}^n$ est somme directe des sous-espaces propres de v^l, c'est-à-dire :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(v^l)} \ker\left(v^l - \lambda \mathrm{id}\right)$$

[2] Il y a (au moins !) une autre façon de le voir : par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, on montre qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{Q})$ telle que $\mathrm{rg}_{\mathbf{Q}}(A) = r$, est équivalente dans $\mathbf{Q}$ à la matrice :

$$J_r := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $\mathbf{L}$ est une extension de $\mathbf{Q}$, A est aussi équivalente dans $\mathbf{L}$ à J_r, donc $\mathrm{rg}_{\mathbf{L}}(A) = r$.

Maintenant, comme v^l et v commutent, les sous-espaces propres de v^l sont stables par v. Si v est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par v sur chaque sous-espace propre de v^l est également diagonalisable. En particulier, si 0 est valeur propre de v^l, l'endomorphisme induit par v sur $\ker(v^l)$ est à la fois diagonalisable et nilpotent, donc nul, donc $\ker(v^l) \subseteq \ker(v)$. Puisque l'autre inclusion est immédiate, on en déduit que $\ker(v) = \ker(v^l)$. Cette égalité est aussi vraie dans le cas où 0 n'est pas valeur propre de v^l, c'est à dire dans le cas où $v \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Ainsi, on a obtenu une condition nécessaire à la diagonalisabilité de v.

Montrons que la condition « $\ker(v) = \ker(v^l)$ » est en fait suffisante pour assurer la diagonalisabilité de v sous l'hypothèse « v^l diagonalisable ». Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes non-nulles de v^l. On a :

$$\mathbf{C}^n = \underbrace{\left(\bigoplus_{k=1}^{r} \ker\left(v^l - \lambda_k \mathrm{id}\right)\right)}_{=:F} \oplus \ker(v^l) \tag{2}$$

Le dernier terme de cette somme directe étant éventuellement réduit à $\{0\}$ si v est inversible. Comme on l'a dit plus haut, le sous-espaces propres de v^l sont stables par v. L'endomorphisme $\tilde{v}$ induit par v sur F est annulé par le polynôme

$$P := \prod_{k=1}^{r} \left(X^l - \lambda_k\right)$$

qui est scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$ car aucun λ_k n'est nul ! Ainsi, $\tilde{v}$ est diagonalisable. On peut donc trouver une base de F formée de vecteurs propres pour $\tilde{v}$ (qui sont donc des vecteurs propres pour v). En recollant cette base de F avec une base de $\ker(v^l)$ on obtient une base de $\mathbf{C}^n$ (d'après (2)) formée de vecteurs propres de v, car $\ker(v^l) = \ker(v)$.

Finalement on a montré : Si $v \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ et v^l est diagonalisable, alors v est diagonalisable si et seulement si $\ker(v) = \ker(v^l)$.

$\square$

Exercice 8 :
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ telle qu'il existe un $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^n = I_2$. Montrer que $M^{12} = I_2$.

Idée de correction : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $M^n = I_2$. Puisque $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de M, le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme, c'est-à-dire : $\mathrm{Sp}(M) \subseteq \mathbf{U}_n$: le groupe des racines n^e de l'unité.

Maintenant, comme M est à coefficients réels, $\chi_M \in \mathbf{R}[X]$, et donc ses deux racines complexes sont conjuguées. Ainsi, il existe $\mu \in \mathbf{U}_n$ telle que $\chi_M = (X - \mu)(X - \bar{\mu})$. Si on écrit $\mu = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour un $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\chi_M = X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1$.

Comme M est à coefficients entiers, ce polynôme est à coefficients entiers, donc

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}.$$

D'où

$$\frac{2k\pi}{n} \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\} \tag{3}$$

Comme M annule le polynôme scindé à racines simples $X^n - 1$, elle est diagonalisable dans $\mathbf{C}$, et donc M est semblable dans $\mathbf{C}$ à

$$D := \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

On voit facilement que $D^{12} = I_2$ car $\mu = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et on a la condition (3) sur $\frac{2k\pi}{n}$.

$\square$

Remarque :
En fait on montre même que $M^d = I_2$ pour un d dans $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, mais pour avoir un résultat unifié on prend le ppcm.

Exercice 9 :
1. Montrer que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle sont toutes imaginaires pures.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables. Montrer que $\dim(F) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

Idée de correction :

1. Notons $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices antisymétriques. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$ une valeur propre de M vue comme matrice à coefficients complexes. Soit $X \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$. Si on conjugue cette relation, puis qu'on transpose, on obtient :
$$\overline{M}\ \overline{X} = \overline{\lambda}\ \overline{X}$$
puis :
$$^t\overline{X}\ ^t\overline{M} = \overline{\lambda}\ ^t\overline{X} \tag{4}$$
Mais comme $M \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, $\overline{M} = M$ et $^tM = -M$, donc (4) donne :
$$^t\overline{X}M = -\overline{\lambda}\ ^t\overline{X}$$
En multipliant à droite par X on obtient :
$$^t\overline{X}MX = -\overline{\lambda}\ ^t\overline{X}X$$
Mais on peut aussi calculer $^t\overline{X}MX$ en multipliant l'égalité $MX = \lambda X$ à gauche par $^t\overline{X}$. On obtient alors :
$$^t\overline{X}MX = \lambda ^t\overline{X}X$$
Finalement, $\lambda\ ^t\overline{X}X = -\overline{\lambda}\ ^t\overline{X}X$ i.e. $(\lambda + \overline{\lambda})\|X\|_2^2 = 0$. Ceci implique $\overline{\lambda} = -\lambda$ car $X \neq 0$. Ainsi, $\lambda \in i\mathbf{R}$.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables. Montrons que $F \cap \mathcal{A}_n(\mathbf{R}) = \{0\}$. Si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R}) \cap F$ alors M est diagonalisable car $M \in F$, en particulier $\mathrm{Sp}(M) \subseteq \mathbf{R}$. Mais M est antisymétrique, donc d'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(M) \subseteq i\mathbf{R}$. Ainsi, M est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) \subseteq \mathbf{R} \cap i\mathbf{R} = \{0\}$, donc M est nulle. Comme F et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ sont en somme directe, on a
$$\dim(F \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{R})) = \dim(F) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbf{R})) = \dim(F) + \frac{n(n-1)}{2} \leqslant n^2$$
où la dernière inégalité découle juste de l'inclusion $F \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{R}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On en déduit la conclusion :
$$\dim(F) \leqslant n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\square$

Exercice 10 (Classique à l'X ou Mines-Ponts) **:**
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.

Idée de correction : Supposons f diagonalisable. Soit F un sous-espace vectoriel quelconque de E. Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de F. Puisqu'on a supposé f diagonalisable, il existe une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de E formée de vecteurs propres pour f. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la base $(e_1, \ldots, e_m)$ de F en une base $(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ de E, où on a rajouté uniquement des vecteurs de notre base de vecteurs propres (c'est à dire $e_{m+1}, \ldots, e_n$ ont été pris parmi les v_i). En effet, la famille $\{e_1, \ldots, e_m\}$ est libre, et elle est contenue dans la famille génératrice $\{e_1, \ldots, e_m, v_1, \ldots, v_n\}$, donc il existe une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E, telle que

$$\{e_1, \ldots, e_m\} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \{e_1, \ldots, e_m, v_1, \ldots, v_n\}$$

et $\mathcal{F}$ à la fois libre et génératrice. Si on veut se rappeler l'argument :

- Si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ est génératrice, $F = E$ et on conclut.
- Sinon $F \neq E$, et alors l'un des v_i n'appartient pas à F. En effet, si tous les v_i étaient dans F, l'espace vectoriel qu'ils engendrent serait contenu dans F, ce qui contredit le fait que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est génératrice. Quitte à renommer, on peut supposer que $v_1 \notin F$. Alors la famille $\{e_1, \ldots, e_m, v_1\}$ est libre car le vecteur ajouté n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par les précédents. Si elle est génératrice, on a fini, sinon on recommence en partant de la famille $\{e_1, \ldots, e_m, v_1\}$. On finit bien par obtenir une base car à chaque étape on s'arrange pour que la famille créée soit libre, et elle finit par être génératrice car on peut ajouter tous les v_i (si on part de $F = \{0\}$ par exemple).

On prend alors $G := \mathrm{vect}(e_{m+1}, \ldots, e_n)$. C'est un supplémentaire de F dans E, et il est stable par f car $e_{m+1}, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres de f.

Réciproquement, supposons que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f. Considérons

$$F := \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \ker(f - \lambda \mathrm{id})$$

le sous-espace vectoriel de E formé de la somme directe des sous-espaces propres de f. Si f n'était pas diagonalisable, F serait strictement inclus dans E. Soit H un hyperplan de E contenant F. Alors par hypothèse H admet un supplémentaire stable par f. Ce supplémentaire est une droite, engendrée par un vecteur propre de f. Mais c'est une contradiction car tous les vecteurs propres de f sont dans H. Ainsi, f est diagonalisable. $\square$

Exercice 11 (X) **:**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on définit

$$T_A \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

1. Montrer que si A est nilpotente, T_A est nilpotent.
2. Plus généralement, montrer que si A possède une unique valeur propre, alors T_A est nilpotent.
3. Montrer que si A possède plusieurs valeurs propres, alors T_A n'est pas nilpotent.
4. Que dire de T_A si A est supposée diagonalisable ?

Idée de correction : 1. On peut essayer de tatonner un peu, deviner une formule pour $T_A \circ \cdots \circ T_A$, et la montrer par récurrence. Ca marche. Une méthode plus élégante, et qui est de toute façon utile dans la suite : si on note $G_A \ : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ la multiplication à gauche par A, et D_A

la multiplication à droite par A, on remarque que $T_A = G_A - D_A$. Puisque G_A et D_A commutent, on peut appliquer le binôme de Newton dans l'anneau $(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})), +, \circ)$! On en déduit que

$$T_A^n = T_A \circ \cdots \circ T_A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k D_A^k \circ G_A^{n-k}$$

Et donc pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$T_A^n(M) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^{n-k} M A^k$$

À partir de là on conclut de manière habituelle : si on note m l'indice de nilpotence de A, alors $T_A^{2m} = 0$ puisque si $k < m$, $2m - k > m$ et donc $A^{2m-k} = 0$, et si $k \geqslant m$, $A^k = 0$.

2. Si A a une unique valeur propre λ, alors $A - \lambda I_n$ est nilpotente, donc d'après la question précédente, $T_{A-\lambda I_n}$ est aussi nilpotent. Mais on vérifie sans souci que $T_{A-\lambda I_n} = T_A$, d'où le résultat.

3. Prendre X vecteur propre de A associé à une valeur propre λ, et Y vecteur propre associé à une valeur propre $\mu \neq \lambda$. Considérer une matrice M qui envoie X sur Y. Alors en calculant $T_A^n(M)X$, on trouve quelque-chose qui est non nul, pour tout $n \geqslant 1$, et on a gagné.

4. Là encore, j'avais d'abord fait une méthode un peu à la main, avant de lire une correction de cette question en particulier, qui est plus élégante ! Comme A et diagonalisable, G_A et D_A le sont (mêmes polynômes annulateurs que A). De plus, G_A et D_A commutent, donc d'après un exercice classique, G_A et D_A sont codiagonalisables, donc $T_A = G_A - D_A$ est diagonalisable !

   Mais on peut s'en sortir de manière plus terre à terre ! Notons P une matrice qui diagonalise A, c'est-à-dire $P^{-1}AP = D$ une matrice diagonale. Notons C_P l'automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ donné par la conjugaison par P. Explicitement :

$$\begin{array}{cccc} C_P & : & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ & & M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}$$

   On vérifie alors que $C_P^{-1} \circ T_A \circ C_P = T_{P^{-1}AP} = T_D$, puis que T_D a une matrice diagonale dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

□

Exercice 12 :
Existe-t-il $M \in \mathcal{M}_7(\mathbf{R})$ telle que le polynôme $(X^2 + X + 1)$ annule M ?

Idée de correction : Non car si $M \in \mathcal{M}_7(\mathbf{R})$, son polynôme caractéristique est de degré 7 (impair), donc il a une racine réelle. Ainsi, M possède au moins une valeur propre réelle, disons λ. Maintenant, le spectre de M étant inclus dans l'ensemble des racines de n'importe quelle polynôme annulateur, si M était annulée par $X^2 + X + 1$, on aurait $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, ce qui est impossible car le polynôme $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine réelle. □

Exercice 13 (Bon exercice de révision) **:**
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Les matrices A et B ont une valeur propre commune.

(ii) Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AM = MB$.

(iii) La matrice $\chi_A(B)$ n'est pas inversible.

Indication : $(i) \implies (ii)$ est un peu astucieuse je trouve. Une manière d'avancer est de penser à dire qu'une valeur propre de B est aussi valeur propre de ${}^tB$. Il suffit ensuite de fabriquer une matrice M comme dans (ii) à partir d'un vecteur propre pour A et d'un vecteur propre pour ${}^tB$ associés à une valeur propre commune.

Idée de correction : • $(i) \implies (ii)$: On suit l'indication. Soit λ une valeur propre commune à A et B. Alors λ est aussi valeur propre de ${}^tB$. Soit $X \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A et $Y \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de ${}^tB$, tous deux associés à la valeur propre λ. Posons $M := X{}^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Alors comme X et Y sont non nuls, il est facile de voir que M est non nulle. De plus

$$AM = AX{}^tY = \lambda X{}^tY$$

et

$$MB = X{}^tYB = {}^t\left({}^tBY{}^tX\right) = {}^t\left(\lambda Y{}^tX\right) = \lambda X{}^tY = AM$$

- $(ii) \implies (iii)$: On montre facilement par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^kM = MB^k$, puis par linéarité :

$$\forall P \in \mathbf{C}[X],\ P(A)M = MP(B)$$

En particulier, pour $P = \chi_A$, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton :

$$M\chi_A(B) = \chi_A(A)M = 0.$$

Puisque $M \neq 0$, $\chi_A(B)$ ne peut être inversible.

- $(iii) \implies (i)$: Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{C}$ les valeurs propres distinctes de A, et $m_1, \ldots, m_r$ leur multiplicité comme racine de χ_A. Alors

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

D'où

$$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{r} (B - \lambda_i I_n)^{m_i}$$

Puisque $\chi_A(B)$ n'est pas inversible, $B - \lambda_{i_0} I_n$ est non-inversible pour un certain $i_0 \in [\![1, r]\!]$ (sinon $\chi_A(B)$ serait inversible comme produit de matrices inversibles). Alors λ_{i_0} est une valeur propre commune à A et B.

□

Semaine 4 : suites et séries numériques

Exercice 14 :
Le théorème de comparaison série intégrale classique ne concerne que des fonctions monotones. Le but de l'exercice est d'étudier une série en la comparant à une intégrale, sans cette hypothèse de monotonie.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{C}\right)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{2} \max_{[n,n+1]} |f'|.$$

2. En déduire la nature de la série $\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n}$.

Idée de correction : 1. C'est l'inégalité des accroissements finis. On écrit :

$$\left|f(n)-\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_n^{n+1} |f(n)-f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \max_{[n,n+1]} |f'| \int_n^{n+1} |n-t|\mathrm{d}t$$

D'où, après petit changement de variable :

$$\left|f(n)-\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \max_{[n,n+1]} |f'| \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \max_{[n,n+1]} |f'|$$

Noter que l'inégalité des accroissements finis reste vraie pour des fonctions à valeurs vectorielles, alors que l'égalité (qui est équivalente au théorème de Rolle) n'est vraie que pour des fonctions à valeurs réelles (en dimension plus grande que 2, on peut facilement revenir à son point de départ sans annuler sa vitesse !).

2. On applique la question précédente à $f\colon t \mapsto \frac{\sin(\ln(t))}{t}$. Cette fonction est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$f'(t) = \frac{\cos(\ln(t)) - \sin(\ln(t))}{t^2}$$

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left|f(n)-\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2} \max_{[n,n+1]} |f'| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{2}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\ln(n))}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or on sait calculer les sommes partielles de cette dernière série. En effet, si $N \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{N+1} \frac{\sin(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t = [-\cos(\ln(t))]_1^{N+1} = -\cos(\ln(N+1)) + 1$$

Or la suite $(\cos(\ln(n)))_{n\geqslant 1}$ n'a pas de limite en $+\infty$. Ce n'est pas immédiat ! Ce qui est sympa, c'est que cette exercice crée en quelque sorte un nouvel exercice, qui arrive de manière très naturelle. Donnons plusieurs méthodes, ou pistes, qui permettent d'avancer dans l'étude de la convergence / divergence de la suite des $\cos(\ln(n))$.

- Une façon (assez astucieuse) de le montrer : Si cette suite admettait une limite l, alors la suite extraite $(\cos(\ln(3^n)))_{n\geqslant 1} = (\cos(n\ln(3)))_{n\geqslant 1}$ convergerait également vers l. Or

$$\cos((n+1)\ln(3)) + \cos((n-1)\ln(3)) = 2\cos(n\ln(3))\cos(\ln(3))$$

Donc si $l \neq 0$, on obtiendrait $\cos(\ln(3)) = 1$ en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus. Contradiction. Donc $l = 0$. Mais alors si on écrit

$$\underbrace{\cos((n+1)\ln(3))}_{\to 0} = \underbrace{\cos(n\ln(3))\cos(\ln(3))}_{\to 0} - \sin(n\ln(3))\sin(\ln(3))$$

on peut en déduire que $\sin(n\ln(3)) \to 0$. C'est une contradiction avec le fait que

$$\sin^2(n\ln(3)) + \cos^2(n\ln(3)) = 1$$

(les termes ne peuvent pas tous deux tendre vers 0).

- Une autre piste qui ressemble : on reprend la suite extraite $(\cos(\ln(3^n)))_{n\geqslant 1}$. Si la suite de départ convergeait, alors celle-ci convergerait aussi. C'est-à-dire : la suite $(\cos(n\ln(3)))_{n\geqslant 1}$ convergerait. Mais on est maintenant dans le cadre d'un exercice assez classique, qui dit que la suite des $\cos(\alpha n)$ est dense dans $[-1,1]$ ssi $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel. Donc ici, on peut essayer de montrer que $\frac{\ln(3)}{\pi}$ est irrationnel, pour montrer un résultat bien plus fort que le fait de ne pas converger ! Je n'ai pas trop essayé de montrer l'irrationnalité, mais disons que ça embraye sur encore un nouvel exo, donc c'est sympa.

- Enfin, une méthode plus simple, mais qui fait aussi montrer le résultat plus fort ci-dessus : nous allons montrer que tout réel de $[-1,1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(\cos(\ln(n)))_{n\geqslant 1}$ (ce qui implique bien sûr que cette suite ne converge pas).

  Soit $y \in [-1,1]$.

  On sait qu'il existe $\theta \in \mathbf{R}_+$ tel que $\cos(\theta) = y$. Mais on a aussi pour tout $k \in \mathbf{N}$: $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) = y$.
  Pour tout $k \in \mathbf{N}$, posons $x_k := \exp(\theta + 2k\pi)$. On a $\cos(\ln(x_k)) = y$. Maintenant, posons $n_k = \lfloor x_k \rfloor$. La suite $(\cos(\ln(n_k)))_{k\geqslant 0}$ est alors une suite extraite de la suite $(\cos(\ln(n)))_{n\geqslant 1}$ et on montre qu'elle converge vers y.

  En effet, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a par deux IAF successives :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |y - \cos(\ln(n_k))| &= |\cos(\ln(x_k)) - \cos(\ln(n_k))| \\ &\leqslant |\ln(x_k) - \ln(n_k)| \\ &\leqslant \frac{1}{n_k}|x_k - n_k| \leqslant \frac{1}{n_k} \underset{k\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

□

Exercice 15 :
Soit $\alpha > 0$. On définit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_1 > 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

1. Pour quelles valeurs de α la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ?
2. Dans le cas convergent, donner un équivalent de $(\lim_{n\infty} u_n) - u_n$.
3. Dans le cas divergent, donner un équivalent de u_n.
   Indication : On pourra considérer la suite $u_{n+1}^2 - u_n^2$.

Idée de correction : 1. On montre facilement par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante, et donc soit $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l > 0$, soit $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- Si $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors
$$\frac{1}{n^\alpha u_n} \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
  Or la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha u_n}$ diverge, car $\frac{1}{n^\alpha u_n} = u_{n+1} - u_n$, et la suite $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge, et donc $\alpha \leqslant 1$.
- Si $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} l > 0$, alors
$$\frac{1}{n^\alpha u_n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha l}$$
  Or la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha u_n}$ converge (comme au-dessus, car c'est la série des $u_{n+1} - u_n$ et que la suite (u_n) est cette fois-ci convergente), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série des $\frac{1}{ln^\alpha}$ converge. Donc $\alpha > 1$.

Conclusion : la suite (u_n) converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2. On se place dans le cas convergent ($\alpha > 1$). Notons l la limite de la suite (u_n). On a

$$l - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha u_k} \underset{n\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{lk^\alpha}$$

par comparaison des restes pour les séries positives convergentes. Une comparaison série/intégrale classique permet d'obtenir un équivalent du dernier reste à droite, on a alors :

$$l - u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{l(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

3. On se place dans le cas divergent ($\alpha \leqslant 1$), et on suit l'indication : calculons $u_{n+1}^2 - u_n^2$.

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \left(u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}\right)^2 - u_n^2 = \frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2}$$

Or puisque $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$$\frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2} \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{2}{n^\alpha}\right)$$

Ainsi, $u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n\infty}{\sim} \frac{2}{n^\alpha}$, et donc par sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs (cas divergent) :

$$u_n^2 \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^\alpha}.$$

Ainsi, si $\alpha = 1$:

$$u_n \sim \sqrt{2\ln(n)},$$

et si $\alpha < 1$, on a :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha}},$$

encore par comparaison série/intégrale usuelle.

□

Exercice 16 : 1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs. Est-ce que si $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum u_n$ converge ?

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs. Montrer que si la suite (u_n) est décroissante et si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. Si on enlève l'hypothèse de décroissance, a-t-on encore

$$\text{« } \sum u_n \text{ converge } \implies u_n \underset{n\infty}{=} o\left(\tfrac{1}{n}\right) \text{ » ?}$$

Idée de correction : 1. Non, penser aux séries de Bertrand.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum u_n$ converge, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k\geqslant n_0} u_k \leqslant \varepsilon.$$

On utilise la monotonie de u_n pour écrire que pour tout $n \geqslant n_0$:

$$(n - n_0)u_n \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Et donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$nu_n \leqslant \varepsilon + n_0 u_n.$$

Mais $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ (car la série converge), donc le terme $n_0 u_n$ tend vers 0, et donc pour n assez grand, on a : $nu_n \leqslant 2\varepsilon$, ce qui donne le résultat.

3. Non, il suffit de prendre

$$u_n := \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n = k^2 \text{ pour un } k \in \mathbf{N}^* \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors la série des u_n converge, mais u_n n'est pas négligeable devant $\frac{1}{n}$.

□

Exercice 17 (Mines-Ponts) **:**
Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $x_0 > 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Montrer que $x_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Idée de correction : Déjà on peut commencer par faire un dessin ! Ensuite on devine et on montre vraiment sans souci que (x_n) est croissante. Donc (x_n) est soit convergente, soit diverge vers $+\infty$. Si elle convergeait, sa limite serait strictement positive, et en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient une contradiction. Donc $x_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Pour finir, l'astuce est de considérer $x_{n+1}^2 - x_n^2$. On montre que $x_{n+1}^2 - x_n^2 \sim 2$, et on conclut par sommation des relations de comparaison. □

Semaine 5 : dénombrabilité et familles sommables

Dans le premier exercice, on démontre qu'une famille sommable a en fait un support dénombrable, puis on utilise ce résultat pour donner une démonstration du fait qu'une fonction monotone a un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité. C'est un exercice que je qualifierais de non prioritaire, et assez ambitieux. Cependant la question 5 est un exercice classique d'oraux X-ENS, donc il peut être bon d'y avoir réfléchi, notamment de savoir démontrer proprement qu'une fonction monotone admet une limite à gauche et à droite en tout point.

Exercice 18 :
Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, indexée par un ensemble quelconque. On notera $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I. On suppose que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est de Cauchy, dans le sens suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_0 \in \mathcal{P}_f(I), \forall J \in \mathcal{P}_f(I), \left(J \cap I_0 = \emptyset \implies \left| \sum_{j\in J} x_j \right| \leqslant \varepsilon \right).$$

1. Montrer que $(x_i)_{i\in I}$ tend vers 0, dans le sens suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists I_0 \in \mathcal{P}_f(I), \forall i \notin I_0, |x_i| \leqslant \varepsilon.$$

2. Montrer que ses sommes partielles finies sont bornées, c'est-à-dire : il existe une constante $C \in \mathbf{R}_+$ telle que pour toute partie finie $J \subseteq I$, $\left|\sum_{j\in J} x_j\right| \leqslant C$.
3. Montrer que $(x_i)_{i\in I}$ est à support (au plus) dénombrable, c'est-à-dire : $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

4. Montrer que si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, alors elle est de Cauchy.
5. Déduire des questions prédédentes qu'une fonction monotone n'a qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité.

Idée de correction : 1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $I_0 \in \mathcal{P}_f(I)$ comme dans la définition d'être de Cauchy ci-dessus. Alors pour tout $i \notin I_0$, on a $\{i\} \in \mathcal{P}_f(I)$ et $\{i\} \cap I_0 = \emptyset$. Donc $|x_i| \leqslant \varepsilon$.

2. On applique la définition d'être de Cauchy avec $\varepsilon = 1$ (par exemple). Il existe donc $I_0 \in \mathcal{P}_f(I)$ telle que pour toute partie finie J de I, si J ne rencontre pas I_0, alors
$$\left|\sum_{j\in J} x_j\right| \leqslant 1.$$
Maintenant, soit K une partie finie quelconque de I. On écrit $K = (K \cap I_0) \cup (K \cap (I \setminus I_0))$. On a alors
$$\left|\sum_{k\in K} x_k\right| = \left|\sum_{k\in K\cap I_0} x_k + \sum_{k\in K\cap(I\setminus I_0)} x_k\right| \leqslant \left|\sum_{k\in K\cap I_0} x_k\right| + \left|\sum_{k\in K\cap(I\setminus I_0)} x_k\right| \leqslant \left|\sum_{k\in K\cap I_0} x_k\right| + 1$$
car $K \cap (I \setminus I_0)$ ne rencontre pas I_0 par définition. De plus,
$$\left|\sum_{k\in K\cap I_0} x_k\right| \leqslant \sum_{k\in K\cap I_0} |x_k| \leqslant \sum_{i\in I_0} |x_i|.$$
Finalement, $C := 1 + \sum_{i\in I_0} |x_i|$ est une constante qui convient.

3. Soit $I^* := \{i \in I, x_i \neq 0\}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $K_n := \{i \in I, |x_i| \geqslant 1/n\}$. Alors $I^* = \cup_{n\geqslant 1} K_n$, et chaque K_n est fini d'après le résultat montré à la question 1. Donc I^* est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables.

4. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes, c'est-à-dire telle que
$$M := \sup\left\{\sum_{j\in J} |x_j|, J \in \mathcal{P}_f(I)\right\} < +\infty.$$
Montrons qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de la borne supérieure, il existe $I_0 \in \mathcal{P}_f(I)$ telle que
$$M - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in I_0} |x_i| \leqslant M.$$
Maintenant, si $J \in \mathcal{P}_f(I)$ est telle que $J \cap I_0 = \emptyset$, alors
$$\underbrace{\sum_{i\in I_0} |x_j|}_{\geqslant M-\varepsilon} + \sum_{j\in J} |x_j| = \sum_{j\in J\cup I_0} |x_j| \leqslant M$$
D'où
$$\sum_{j\in J} |x_j| \leqslant \varepsilon$$
et donc
$$\left|\sum_{j\in J} x_j\right| \leqslant \sum_{j\in J} |x_j| \leqslant \varepsilon.$$

5. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction monotone. On la suppose croissante, les arguments pour le cas décroissant étant les mêmes mais renversés. Puisque f est monotone, elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point (attention, il faut savoir l'écrire, ce n'est pas complètement évident, même si ça a l'air vrai sur un dessin). On notera $f(x^-)$ (resp. $f(x^+)$) la limite à gauche en x (resp. à droite).

   Puisque $\mathbf{R}$ peut facilement s'écrire comme une union dénombrable de segments, et qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, il suffit de montrer que f n'a qu'un nombre dénombrable de points de discontinuité dans chaque segment $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$.

   Fixons donc un tel segment, et considérons la famille de réels $(f(x^+)-f(x^-))_{x\in[a,b]}$. Par croissance de f, c'est une famille de réels positifs. Montrons que pour toute partie finie $X \subseteq [a,b]$

$$\sum_{x\in X} f(x^+) - f(x^-) \leqslant f(b^+) - f(a^-).$$

   Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ une partie finie de $[a,b]$. On peut la supposer déjà ordonnée : $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X} f(x^+) - f(x^-) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^+) - f(x_i^-)\\ &= f(x_1^+) - f(x_1^-) + \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i^+) - f(x_i^-) + f(x_n^+) - f(x_n^-).\end{aligned}$$

   Mais on a également les majorations suivantes (ici, un dessin peut suffire je dirais) :

   - $f(x_1^+) - f(x_1^-) \leqslant f(x_2^-) - f(a^-)$
   - $\forall i \in [\![2, n-1]\!],\ f(x_i^+) - f(x_i^-) \leqslant f(x_{i+1}^-) - f(x_i^-)$
   - $f(x_n^+) - f(x_n^-) \leqslant f(b^+) - f(x_n^-)$

   On en déduit la majoration suivante :

$$\sum_{x\in X} f(x^+) - f(x^-) \leqslant f(x_2^-) - f(a^-) + \sum_{i=2}^{n-1} f(x_{i+1}^-) - f(x_i^-) + f(b^+) - f(x_n^-),$$

   ce qui donne, après téléscopage dans la somme du milieu :

$$\sum_{x\in X} f(x^+) - f(x^-) \leqslant f(b^+) - f(a^-).$$

   Ainsi, la famille $(f(x^+) - f(x^-))_{x\in[a,b]}$ est une famille de réels positifs telle que pour toute partie finie $X \subseteq [a,b]$, $\sum_{x\in X} f(x^+) - f(x^-) \leqslant f(b^+) - f(a^-)$. Donc

$$\sup\left\{\sum_{x\in X} f(x^+) - f(x^-), X \in \mathcal{P}_f([a,b])\right\} \leqslant f(b^+) - f(a^-) < +\infty,$$

   c'est-à-dire : cette famille est sommable. On en déduit qu'elle est de Cauchy (question 4), puis que son support est dénombrable (question 3). Mais le support de la famille $(f(x^+)-f(x^-))_{x\in[a,b]}$ est exactement l'ensemble des points de discontinuité de f dans $[a,b]$, et donc on a fini !

   □

Remarque :
Une autre manière de montrer le résultat de la question 5, sans passer par toutes ces familles sommables : (preuve rédigée par un ami, elle est très succinte, mais bien écrite je trouve)

Une application croissante possède des limites à droite et à gauche (propriétés des bornes inférieures et supérieures sur $\mathbf{R}$). L'ensemble des points de discontinuité est exactement les points où la limite à gauche est strictement inférieure à la limite à droite. On peut ainsi associer à une discontinuité un rationnel situé entre les limites à gauche et à droite en cette discontinuité. Une telle application est injective par croissance de la fonction. On a donc injecté l'ensemble des points de discontinuité dans $\mathbf{Q}$ qui est dénombrable, ce qui achève la preuve.

Exercice 19 :
Soit $A := \{n \in \mathbf{N}^*$ n'ayant pas de 9 dans leur écriture décimale$\}$. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in A}$ est sommable.

Idée de correction : Pour tout $k \in \mathbf{N}$, notons

$$A_k := \left\{n \in A \mid 10^k \leqslant n < 10^{k+1}\right\}.$$

A_k est l'ensemble des entiers ayant une écriture décimale à $k+1$ chiffres qui ne fait pas apparaître de 9. Les A_k forment une partition de A. De plus, comme chacun des A_k est fini, chacune des familles $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in A_k}$ est sommable. Mais on peut dire mieux ! En effet, fixons un $k \in \mathbf{N}$. Alors en majorant chaque terme de la somme par le plus grand terme, on a :

$$\sum_{n\in A_k} \frac{1}{n} \leqslant \sum_{n\in A_k} \frac{1}{10^k} \leqslant \frac{\mathrm{Card}(A_k)}{10^k}.$$

Or les éléments de A_k sont des entiers à $k+1$ chiffres, dont l'écriture décimale ne fait pas apparaître de 9. Combien d'entiers n de la sorte y-a-t-il ? Le chiffre devant 10^k doit être non nul pour que notre n ait une écriture décimale d'exactement $k+1$ chiffres. Ensuite ce coefficient n'a pas le droit d'être un 9 non plus. Finalement, il appartient à $\{1, \ldots, 8\}$. Pour les coefficients suivants (devant $10^{k-1}, \ldots, 10^1, 10^0$), on peut faire le même raisonnement, sauf que cette fois ci on peut prendre la valeur 0. Donc les autres coefficients vivent dans $\{0, \ldots, 8\}$. Finalement, il y a 8 choix possibles pour le coefficient devant 10^k, et 9 choix possibles pour les autres, soit 8×9^k entiers n qui appartiennent à A_k. Donc :

$$s_k := \sum_{n\in A_k} \frac{1}{n} \leqslant 8\left(\frac{9}{10}\right)^k.$$

On en déduit que la famille de réels positifs $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est sommable, car le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus est le terme général d'une série (géométrique) convergente. Finalement,

$$\begin{cases} \text{La famille } \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in A} \text{ est formée de réels positifs} \\ \text{Pour tout } k \in \mathbf{N}, \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in A_k} \text{ est sommable, de somme } s_k \\ \text{La famille } (s_k)_{k\in\mathbf{N}} \text{ est sommable} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème de sommation par paquets, la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in A}$ est sommable. □

Exercice 20 (X express) **:**
Existe-t-il $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{Q}$ et $f(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$?

Idée de correction : Si f existait, alors $f(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cup f(\mathbf{Q})$ serait dénombrable. De plus $f(\mathbf{R})$ est un intervalle par le TVI. Donc $f(\mathbf{R})$ est un singleton, i.e. f est constante. Or une fonction constante ne satisfait pas les inclusions demandées : contradiction. □

Semaines 6 et 7 : groupes, anneaux, corps

Exercice 21 (A savoir faire absolument) **:**
Soit G un groupe fini et $x \in G$ un élément d'ordre n. Quel est l'ordre de x^k ? On pourra commencer par le cas où k est premier avec n, puis tenter de se ramener à ce cas.

Idée de correction : Si k est premier avec n, on a :

$$\forall m \in \mathbf{Z},\ \left(x^k\right)^m = 1 \iff n|km \iff n|m$$

puisque n et k sont premiers entre eux. Donc $\{m \in \mathbf{Z} \mid \left(x^k\right)^m = 1\} = n\mathbf{Z}$, c'est-à-dire : l'ordre de x^k est égal à n. Si maintenant $d := \mathrm{pgcd}(k, n) \neq 1$, on écrit $n = dn'$ et $k = dk'$, avec n' et k' premiers entre eux. Alors pour tout $m \in \mathbf{Z}$,

$$\left(x^k\right)^m = 1 \iff n|km \iff dn'|dk'm \iff n'|k'm \iff n'|m$$

puisque k' et n' sont premiers entre eux. Donc x^k est d'ordre n'. Conclusion : L'ordre de x^k est $n/\mathrm{pgcd}(k, n)$.

□

Remarque :
En particulier, quel est l'ordre de la rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ dans $\mathbf{R}^2$? : la réponse est donnée par cet exercice ! En effet, l'ordre de la rotation est l'ordre de $\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$ dans $(\mathbf{U}_n, \times)$, c'est-à-dire l'ordre de $\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)^k$.

Exercice 22 (Cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini) **:**
Le but de l'exercice est de montrer que si $\mathbf{K}$ est un corps, tout sous-groupe fini de $\mathbf{K}^\times$ est cyclique. En particulier, le groupe des inversibles d'un corps fini est cyclique.

1. Soit G un groupe fini. Soit $a, b \in G$ avec a d'ordre m et b d'ordre n. On suppose que a et b commutent et que m et n sont premiers entre eux. Montrer que ab est d'ordre mn.
2. Soit G un sous-groupe fini de $\mathbf{K}^\times$. Notons $n := |G|$, et $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.
   (a) Fixons un $i \in [\![1, r]\!]$. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est divisible par $p_i^{\alpha_i}$ (on pourra raisonner par l'absurde).
   (b) En déduire un élément d'ordre exactement $p_i^{\alpha_i}$.
3. Conclure.
4. *Bonus :* Discuter de ce qu'il peut se passer lorsqu'on enlève l'une ou l'autre des hypothèses de la question 1.

Idée de correction : 1. Notons k l'ordre de ab. Puisque a et b commutent, on a $(ab)^{mn} = (a^m)^n (b^n)^m = 1$. On en déduit que $k|mn$. D'autre part, par définition de k, on a $(ab)^k = 1$. En élevant à la puissance m, et en utilisant encore une fois le fait que $ab = ba$ et que a est d'ordre m, on en déduit que $b^{mk} = 1$, donc $n|mk$. Or n et m sont premiers entre eux, donc $n|k$. En élevant à la puissance n l'égalité $(ab)^k = 1$, on en déduirait de même que $m|k$, et donc, en utilisant à nouveau le fait que $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$, que $mn|k$. Finalement, $k = mn$.

2. (a) Pour tout $x \in G$, l'ordre de x divise $n = \prod p_i^{\alpha_i}$, donc est de la forme $\prod p_i^{\beta_i(x)}$ avec $\beta_i(x) \leqslant \alpha_i$ pour tout i. Fixons un $i \in [\![1, r]\!]$. Si on suppose qu'aucun élément de G n'a un ordre divisible par $p_i^{\alpha_i}$, alors pour tout $x \in G$, $\beta_i(x) < \alpha_i$. Donc pour tout $x \in G$, l'ordre de x divise

$p_i^{\alpha_i - 1}\prod_{j\neq i} p_j^{\alpha_j} = n/p_i^{\alpha_i}$. Mézalors le polynôme $P := X^{n/p_i^{\alpha_i}} - 1$ aurait tous les éléments de G pour racines, ce qui ferait n racines pour un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbf{K}$, de degré strictement inférieur à n. C'est une contracdiction. Ainsi, il existe au moins un x dans G tel que $\beta_i(x) = \alpha_i$.

(b) Prenons un élément $x \in G$ comme dans le point précédent. Son ordre s'écrit

$$o(x) = p_1^{\beta_1} \dots p_i^{\alpha_i} \dots p_r^{\beta_r}$$

Alors en élevant x à la puissance $\prod_{j\neq i} p_j^{\beta_j}$, on obtient un élément de G dont l'ordre est exactement $p_i^{\alpha_i}$ (si ce n'est pas clair, on peut l'écrire comme une conséquence de l'exercice précédent).

3. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, la question 2 nous donne un élément $y_i \in G$ d'ordre $p_i^{\alpha_i}$. On applique alors la question 1 au produit de ces éléments, qui sont bien d'ordre deux à deux premiers entre eux, et qui commutent puisque ce sont des éléments de $\mathbf{K}^\times$. On en déduit que le produit des y_i est un élément de G qui est d'ordre n, donc G est cyclique.

4.
   - Si on garde l'hypothèse $ab = ba$, mais si on ne suppose plus m et n premiers entre eux. On a PAS de résultat du style *l'ordre de ab est le ppcm de m et n.* En effet, il suffit de prendre $b = a^{-1}$, alors $ab = ba$, mais ab est d'ordre 1 tandis que le ppcm des ordres est l'ordre de a puisque a et b ont le même ordre.
   - Si on enlève l'hypothèse $ab = ba$, mais qu'on garde m et n premiers entre eux, le résultat ne marche plus non plus. Je crois qu'à peu près n'importe quelle paire d'éléments qui ne commutent pas dans $\mathfrak{S}_3$ fournit un contre exemple (à vérifier).

□

Exercice 23 (Inspiré d'exercices tombés à l'X) **:**
Soit G un groupe abélien fini. On définit un produit hermitien sur $\mathbf{C}^G$ (l'ensemble des fonctions de G dans $\mathbf{C}$) en posant :

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} \varphi(x)\overline{\psi(x)}.$$

On définit également $\widehat{G}$ comme l'ensemble des morphismes de groupes de $(G, .)$ dans $(\mathbf{C}^*, \times)$.

1. Montrer que si $\chi \in \widehat{G}$, alors χ est en fait à valeurs dans $\mathbb{U}_{|G|}$.
2. Montrer que la dimension de $\mathbf{C}^G$ comme $\mathbf{C}$-espace vectoriel est égale au cardinal de G.
3. Pour $\chi \in \widehat{G}$, calculer :
$$\sum_{x\in G} \chi(x).$$
4. En admettant que $|\widehat{G}| = |G|$, déduire que $\widehat{G}$ forme une base orthonormée de $\mathbf{C}^G$.
5. En déduire, pour $x \in G$, la valeur de :
$$\sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(x).$$

Idée de correction : 1. On note $n = |G|$. On remarque juste que par propriété de morphisme, pour tout $g \in G$, puisque $g^n = e$, alors $\chi(g)^n = 1$.

2. Pour $g \in G$, on note $\delta_g \in \mathbf{C}^G$ la fonction qui vaut 1 en g et 0 sur $G\backslash\{g\}$. On vérifie facilement que c'est une base de $\mathbf{C}^G$.

3. Si χ est constant égal à 1 la somme vaut $|G|$. Sinon, on fixe $g \in G\backslash\{e\}$ tel que $\chi(g) \neq 1$. On a alors puisque $x \in G \mapsto gx$ est une bijection de G dans G :

$$\sum_{x\in G} \chi(x) = \sum_{x\in G} \chi(gx) = \chi(g) \sum_{x\in G} \chi(x).$$

Cela implique que la somme est nulle.

4. On admet que $|\widehat{G}| = |G|$. Il s'agit donc de voir le caractère orthonormé de la famille puisqu'elle a le bon cardinal. Soient χ_1, $\chi_2 \in \widehat{G}$. On a alors :

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} \chi_1(x)\overline{\chi_2(x)} = \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} (\chi_1\overline{\chi_2})(x),$$

où on vérifie que $\chi_1\overline{\chi_2} \in \widehat{G}$. La question précédente montre que cette quantité vaut 1 si $\chi_1\overline{\chi_2}$ est constante égale à 1 c'est-à-dire si $\chi_1 = \chi_2$ puisque $\overline{\chi_2} = \frac{1}{\chi_2}$ (cf première question), et cette quantité est nulle sinon. On a donc montré que $\widehat{G}$ est une base orthonormée de $\mathbf{C}^G$ pour le produit hermitien introduit dans l'énoncé.

5. On considère la fonction δ_e qui vaut 1 en e et 0 sur $G\backslash\{e\}$. D'après ce qui précède il existe des complexes a_χ tels que :

$$\delta_e = \sum_{\chi\in\widehat{G}} a_\chi \chi.$$

En fait on connait l'expression des a_χ puisque la base est orthonormée (projection orthogonale...), comme on peut le voir en faisant le produit scalaire contre un χ fixé. On a :

$$\delta_e = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \langle \delta_e, \chi \rangle \chi.$$

Or :

$$\langle \delta_e, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x\in G} \delta_e(x)\overline{\chi(x)} = \frac{1}{|G|}.$$

On a finalement :

$$\delta_e = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi.$$

En évaluant en e on trouve que la somme vaut $|G|$ et en évaluant en $x \neq e$, la somme est nulle. □

Exercice 24 (Classique) **:**
Soit G un groupe de cardinal pair. Montrer qu'il existe un élément x d'ordre 2 (i.e $x \neq e$ et $x^2 = e$).

Idée de correction : Une astuce possible est de regrouper les éléments de G par « paires » $\{x, x^{-1}\}$ (je mets des guillemets parce que justement, le truc clef c'est que ces ensembles n'ont pas toujours deux éléments). On peut construire une partition de G par de telles paires : on prend un élément de G, on l'apparie avec son inverse, puis on prend un élément qui n'a pas encore été pris, on fait pareil, et ainsi de suite. On arrive ainsi à écrire $G = \bigsqcup_{i=1}^m \{x_i, x_i^{-1}\}$. Mais pour l'élément neutre de G, on a $\{1, 1^{-1}\}$ qui est de cardinal 1. La parité de $|G|$ nous oblige à avoir une autre « paire » de cardinal 1, c'est à dire un élément, différent du neutre, égal à son inverse. Ceci nous donne bien un élément d'ordre 2. □

Exercice 25 (Mines-Ponts) **:**
Soit A une $\mathbf{R}$-algèbre intègre[a] de dimension finie $n \geqslant 2$. Le but du jeu est de montrer que A est isomorphe à $\mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{R}$-algèbre.

1. Montrer que A est un corps.
2. Montrer que pour tout $a \in A$, l'ensemble $\mathcal{I}_a := \{P \in \mathbf{R}[X],\ P(a) = 0\}$ est un idéal de $\mathbf{R}[X]$, engendré par un polynôme irréductible.
3. Montrer que A est isomorphe à $\mathbf{C}$. (Difficile, peut-être rédiger des questions intermédiaires).

[a] Pour moi (et d'autres), un anneau intègre est commutatif.

Idée de correction : 1. Comme A est une $\mathbf{R}$-algèbre, le produit dans A est $\mathbf{R}$-bilinéaire. En particulier, si on prend $a \in A \setminus \{0\}$, l'application multiplication par a :

$$m_a \ : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & ax \end{array}$$

est $\mathbf{R}$-linéaire. L'intégrité de A nous assure qu'elle est injective. Comme A est de dimension finie, on en déduit qu'elle est aussi surjective, donc a est inversible dans A.

Une autre méthode : dire que la famille $\{1, a, \ldots, a^n\}$ ne peut pas être indéfiniment libre, donc il existe un n tel que $a^n \in \mathrm{vect}_{\mathbf{R}}\left(1, a, \ldots, a^{n-1}\right)$. On a donc une relation de la forme

$$a^n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i a^i = 0,$$

où les λ_i sont réels. En enlevant les premiers λ_i s'ils sont nuls, et en simplifiant par un bonne puissance de a (on utilise l'intégrité de A pour simplifier), on peut supposer que $\lambda_0 \neq 0$. On en déduit que

$$1 = a\left(-\frac{1}{\lambda_0}\left(a^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a^{i-1}\right)\right).$$

On a donc trouvé un élément $b \in A$ tel que $ab = 1$, donc $a \in A^\times$ (et on obtient même l'inverse comme un polynôme en a). Peu importe la méthode, on a bien montré que tout élément non nul de A était inversible dans A, donc A est un corps (c'était la seule propriété qu'il restait à vérifier).

2. Soit $a \in A$. L'application

$$\mathrm{ev}_a \ : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \to & A \\ P & \mapsto & P(a) \end{array}$$

est un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres. Il peut-être bon de faire la vérifiation, pour ce rendre compte que pour montrer ça, on utilise seulement la structure de $\mathbf{R}$-algèbre de A, mais pas le fait qu'elle est commutative. Le seul moment où l'on utilise la commutativité apparaît étonnamment tard dans l'exercice. Bref, ev_a est en particulier un morphisme d'anneaux, donc son noyau, qui est exactement $\mathcal{I}_a$, est un idéal. De plus comme $\mathbf{R}[X]$ est principal, $\mathcal{I}_a$ est engendré par un polynôme, qui est unique si on ajoute la contrainte d'être unitaire. On le note π_a.

Maintenant, pourquoi est-il irréductible ? Soit $\pi_a = PQ$ une factorisation dans $\mathbf{R}[X]$. Alors en évaluant en a, on obtient

$$0 = P(a)Q(a).$$

Donc par intégrité, $P(a) = 0$ ou $Q(a) = 0$, donc $\pi_a | P$ ou $\pi_a | Q$. Comme bien sûr $P | \pi_a$ et $Q | \pi_a$, on en déduit que P ou Q est associé à π_a et que l'autre est constant non nul. Ainsi, π_a est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$.

3. La stratégie pour cette question est la suivante :

   - Trouver un $y_0 \in A$ tel que $y_0^2 = -1$. Cette étape est assez naturelle, pour montrer qu'un truc est isomorphe à $\mathbf{C}$, on cherche à exhiber un élément qui va jouer le rôle de i.
   - Montrer que $\mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, y_0)$ est isomorphe à $\mathbf{C}$ en tant que $\mathbf{R}$-algèbre.
   - Montrer qu'en fait $\mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, y_0) = A$.

   Pour trouver notre élément y_0, on part d'un élément $x_0 \in A \setminus \mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A)$. Un tel x_0 existe bien car par hypothèse A est de dimension supérieure ou égale à 2. Ensuite, π_{x_0} ne peut pas être de degré 1 (il est facile de voir que les éléments de A qui ont un polynôme minimal de degré 1 sont exactement les éléments de $\mathbf{R}1_A$). Comme il est irréductible d'après la question 2, et qu'on connaît bien les irréductibles de $\mathbf{R}[X]$, cela veut dire que π_{x_0} est un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, de degré 2, de discriminant strictement négatif. Écrivons

   $$\pi_{x_0} = X^2 + bX + c \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4c < 0$$

   En posant $\delta = \sqrt{4c - b^2}$, on a

   $$\pi_{x_0} = \left(X - \left(\frac{-b - i\delta}{2}\right)\right)\left(X - \left(\frac{-b + i\delta}{2}\right)\right)$$

   Et donc en écrivant $\pi_{x_0}(x_0) = 0$, on en déduit que

   $$y_0 := \frac{2x_0 + b}{\delta}$$

   est racine de $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$. On a donc bien trouvé une racine de -1 dans A.

   Ensuite le fait que $\mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, y_0)$ soit isomorphe à $\mathbf{C}$ est juste une question de vérifications que j'espère vraiment évidentes. On envoie $a + ib \in \mathbf{C}$ sur $a1_A + by_0 \in A$, et si tout va bien ça doit vraiment être un isomorphisme de manière évidente.

   Enfin, on veut montrer qu'en fait $A = \mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, y_0)$. Supposons par l'absurde que $\mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, y_0)$ est strictement inclus dans A. Soit $x \in A \setminus \mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, y_0)$. Alors les mêmes arguments qu'au-dessus montrent qu'il existe $z_0 \in \mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, x)$ tel que $z_0^2 = A$ (en effet, si on relit bien la partie d'au-dessus, le y_0 qu'on fabriquait à partir du x_0 était bien dans le plan engendré par 1_A et x_0). C'est là qu'on utilise que A est un corps commutatif ! Le polynôme $X^2 + 1$ a au plus 2 racines dans A, donc en fait $z_0 = \pm y_0$. On en déduit que

   $$\mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, z_0) = \mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, y_0) \subseteq \mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, x)$$

   Et donc par égalité des dimensions

   $$\mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, y_0) = \mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, x).$$

   En particulier $x \in \mathrm{vect}_{\mathbf{R}}(1_A, y_0)$: contradiction.

□

Semaines 8 et 9 : espaces vectoriels normés

Exercice 26 (Résultat sympa, illustre bien la non équivalence des normes) **:**

1. Trouver une norme sur $\mathbf{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n\geqslant 0}$ tende vers 0.

2. On se donne $P \in \mathbf{R}[X]$. Trouver une norme sur $\mathbf{R}[X]$ telle que $(X^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers P.

Idée de correction : 1. On peut prendre la norme $\displaystyle\int_0^1 |P|$ ou alors la norme suivante :

$$N\left(\sum_{k\geqslant 0} a_k X^k\right) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{|a_k|}{k+1}.$$

2. On note $P = \sum_{k=0}^{N} p_k X^k$. On utilise la norme N définit précédemment mais en prenant les coefficients des polynômes dans la base $(1, X, \dots, X^N, X^{N+1} - P, X^{N+2} - P, \dots)$. Pour n assez grand, $N(X^n - P) = \frac{1}{n+1} \to 0$.

□

Exercice 27 (Très bien pour réviser intérieur et adhérence) **:**
On se place sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ qu'on munit de la norme uniforme. On note :

$$I = \{f \in E,\ f \text{ est injective}\}.$$

Déterminer l'intérieur et l'adhérence de I.

Idée de correction : On montre que le complémentaire de I est dense dans E, ce qui assure que I est d'intérieur vide. Ainsi si $f \in E$, on note f_n la fonction qui coïncide avec f sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ et qui vaut $f\left(\frac{1}{n}\right)$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Cette suite de fonction converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et n'est pas dans I.

On montre que l'adhérence de I est l'ensemble des fonctions de E monotones. Si f est dans l'adhérence de I, on a une suite $(f_n)_n$ de I qui converge uniformément vers f. Les fonctions f_n sont strictement croissantes ou strictement décroissantes car continues. On suppose par exemple qu'il y a une infinité de fonctions strictement croissantes parmi les f_n. f est donc croissante comme limite simple de fonctions croissantes. Réciproquement si f est une fonction de E monotone, par exemple croissante. On définit pour $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \frac{x}{n}.$$

Il est clair que f_n est strictement croissante et continue. De plus :

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{n} \sup_{[0,1]} |f(x) - x| \to 0.$$

D'où $f \in \overline{I}$. □

Exercice 28 :
Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $[0,1]$. On pose $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$, et

$$\|f\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n} \text{ pour } f \in E.$$

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E si et seulement si l'ensemble $A := \{a_n, n \geqslant 1\}$ est dense dans $[0,1]$.
2. Dans ce cas, est-ce que $\|.\|$ est équivalente à $\|.\|_\infty$?

Idée de correction : 1. C'est la séparation qui pose problème dans le cas où A n'est pas dense dans $[0,1]$.

Supposons que A est dense dans $[0,1]$. Soit $f \in E$ tel que $\|f\| = 0$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(a_n) = 0$. Soit $x \in [0,1]$. Il existe une sous-suite $a_{\varphi(n)}$ de a_n telle que $a_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\to} x$. Par continuité de f, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_{\varphi(n)}) = 0$. La densité de A est une condition suffisante à la séparation de la norme.

Si A n'est pas dense, il existe $0 \leq x < y \leq 1$ tels que $A \cap [x,y] = \emptyset$. On peut alors construire une fonction f continue sur $[0,1]$, nulle en dehors de $[x,y]$, et strictement positive sur ce sous-intervalle. Alors $\|f\| = 0$, mais f est non nulle. La densité de A est donc une condition nécessaire à la séparation de la norme.

2. Non, les normes ne sont pas équivalentes. On a facilement $\|f\| \leq \|f\|_\infty$ en majorant chaque $|f(a_n)|$ par la norme sup de f, qui existe car f est continue sur un compact.

   Mais on n'a pas l'inégalité inverse. Construisons pour cela une suite de fonctions telle que la norme $\|.\|_\infty$ soit constante, mais la norme $\|.\|$ tende vers 0. Soit $N \in \mathbf{N}$. On construit une fonction continue f_N telle que pour tout $n \leq N-1$, $f(a_n) = 0$ (Par exemple une fonction triangle autour de a_N, en veillant à ce que la base du triangle ne comprenne pas de terme a_n avec $n < N$. Pour quantifier, regarder la distance de a_N aux précédents termes de la suite.) et dont le sup vaut 1 (Par exemple en fixant le sommet du triangle à 1). On a alors $\|f_N\| \leq \|f_N\|_\infty \frac{1}{2^N} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}$, d'où le contre-exemple.

□

Exercice 29 (d'inspiration X/ENS, dernière question difficile) **:**
Soit E un espace vectoriel réel muni d'une norme $\|.\|$ vérifiant l'identité du parallélogramme : pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \end{array}$$

Montrer que φ est un produit scalaire, et que la norme $\|.\|$ est euclidienne.
Détails :

1. Montrer que φ est définie positive, et que $\varphi(x,x) = \|x\|^2$.
2. Justifier que φ est symétrique. Conclure sur ce qu'il reste à faire.
3. On pose, pour $y \in E$ fixé, $\psi(x) = \varphi(x,y)$. Le but est de montrer que ψ est linéaire.
   (a) Justifier que ψ est continue.
   (b) Montrer que $\psi(-x) = -\psi(x)$
   (c) On admet provisoirement que pour x_1, x_2 dans E, $\psi(x_1+x_2) = \psi(x_1)+\psi(x_2)$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, et pour tout $x \in E$, $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$.
   (d) Montrer, à l'aide de l'identité du parallélogramme, que pour x_1, x_2 dans E, $\psi(x_1+x_2) = \psi(x_1) + \psi(x_2)$.

Idée de correction : 1. Immédiat avec les propriétés de la norme.

2. Avec homogénéité de la norme. Il reste à montrer que φ est bilinéaire. Comme on sait déjà qu'elle est symétrique, il suffit de montrer la linéarité à droite ou la linéarité à gauche. On montre ici la linéarité à gauche.

3. (a) L'application qui à un vecteur associe sa norme est continue sur l'espace muni de cette même norme car lipschitzienne. Donc ψ est combinaison de fonctions continues, donc elle-même continue (pour la norme $\|.\|$).
   (b) $\psi(-x) = \frac{1}{4}(\|-x+y\|^2 - \|-x-y\|^2) = \frac{1}{4}(|-1|\|x-y\|^2 - |-1|\|x+y\|^2) = -\psi(x)$

(c) Avec le résultat admis, et par récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in E$, $\psi(nx) = n\psi(x)$. D'après la question précédente, on a même l'égalité pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
De là, on en déduit l'égalité pour $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}*$. En effet, on a

$$q\psi(\frac{p}{q}x) = \psi(q\frac{p}{q}x) = \psi(px) = p\psi(x)$$

D'où finalement $\psi(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}\psi(x)$
On conclut par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ et continuité de la fonction ψ : soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de rationnels telle que $r_n \underset{n\to\infty}{\to} \lambda$. Par continuité de ψ et grâce à l'étape précédente, on a alors

$$\psi(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \psi(r_n x) = \lim_{n\to\infty} r_n\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

(d) L'idée est d'appliquer l'identité du parallélogramme à des vecteurs différents, en donnant à chaque fois des rôles différents à x_1 et x_2.

$$\begin{aligned}\psi(x_1+x_2) &= \frac{1}{4}(\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2)\\ &= \frac{1}{8}(\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2) + \frac{1}{8}(\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2)\end{aligned}$$

On détaille ici le calcul du premier terme du membre de droite, le calcul du second étant similaire, en inversant les rôles de x_1 et x_2.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}(\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2)\\ &= \frac{1}{8}(\|x_1+x_2+y\|^2 + \|x_1-x_2-y\|^2 - \|x_1-x_2-y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|x_1\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_1-y\|^2 - \|x_2\|^2)\end{aligned}$$

On a donc de même

$$\frac{1}{8}(\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x_2\|^2 + \|x_1+y\|^2 - \|x_2-y\|^2 - \|x_1\|^2)$$

D'où, en sommant les deux égalités,

$$\psi(x_1+x_2) = \psi(x_1) + \psi(x_2)$$

□

Exercice 30 (Classique) **:**
Soit $(E, \| \ \|)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé, et soit $f \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$.

1. Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E reste un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $\ker(f)$ est soit fermé, soit dense dans E.
3. Montrer que f est continue si et seulement si $\ker(f)$ est fermé.

Idée de correction : 1. Caractérisation séquentielle, ça marche tout seul.

2. D'après le point précédent, $\overline{\ker(f)}$ est un sous-espace vectoriel de E. Mais comme $\ker(f)$ est de codimension 1, si il n'est pas égal à son adhérence, c'est qu'elle est égale à E tout entier.

3. Le sens direct est facile (image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue). Pour la réciproque, on peut par exemple raisonner par contraposée : supposons que f n'est pas continue. Comme f est linéaire, ceci équivaut à l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs unitaires de E tels que $|f(x_n)| \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On va construire, à partir de cette suite (x_n), une suite d'éléments de $\ker(f)$ qui converge vers un élément qui n'est pas dans le noyau de f, ce qui montrera que ce dernier n'est pas fermé. Prenons un $x \in E \setminus \ker(f)$ (c'est possible car $\ker(f)$ est un hyperplan de E). On définit alors la suite :
$$u_n := x - \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n.$$
Elle est bien définie, au moins pour n assez grand, car $|f(x_n)| \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc n'est plus nul à partir d'un certain rang. De plus, par linéarité de f, on montre que $f(u_n) = 0$. Ainsi, (u_n) est à valeurs dans $\ker(f)$. Mais $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$ car l'autre terme tend vers 0 car les x_n sont unitaires et $|f(x_n)| \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On a donc bien trouvé une suite d'éléments du noyau de f qui converge vers un élément extérieur au noyau, donc ce dernier n'est pas fermé.

$\square$

Exercice 31 (Mines-Ponts) **:**
Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit K un compact de E, d'intérieur non vide. Montrer que $C := \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(K) \subseteq K\}$ est un compact de $\mathcal{L}(E)$.

Idée de correction : Dans l'énoncé la topologie sur $\mathcal{L}(E)$ n'est pas précisée, mais comme E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ aussi, donc toutes les normes sont équivalentes, et on a une norme naturelle sur $\mathcal{L}(E)$: la norme subordonnée à la norme sur E. On va noter, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$
$$\|u\|_{\mathcal{L}(E)} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$
D'après le cours, ceci définit bien une norme sur $\mathcal{L}(E)$, et on travaille maintenant dans l'espace vectoriel normé de dimension finie $(\mathcal{L}(E), \|\ \|_{\mathcal{L}(E)})$. Comme on est en dimension finie, on sait que pour montrer que C est une partie compacte, il suffit de montrer qu'elle est fermée et bornée.

Pour le caractère fermé : prenons une suite $(u_n) \in C^{\mathbf{N}}$, et supposons qu'elle converge vers une certaine application linéaire v pour la norme $\|\ \|_{\mathcal{L}(E)}$. Le but du jeu est de montrer que v stabilise aussi K. Soit $x \in K$. Alors la suite $(u_n(x))$ est une suite d'éléments de K car les u_n stabilisent K. De plus, la convergence pour la norme subordonnée implique la convergence simple (tout simplement parce que $\|u_n(x) - v(x)\| = \|(u_n - v)(x)\| \leqslant \|u_n - v\|_{\mathcal{L}(E)}\|x\| \to 0$. Ainsi, $v(x) = \lim_{n\infty} u_n(x)$, et son appartenance à K découle alors du caractère fermé de K.

Pour le caractère borné : c'est ici qu'on utilise le fait que K est supposé d'intérieur non vide. Soit $x_0 \in K$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq K$.
Soit L une constante positive à choisir à la fin. On va montrer que C est contenu dans la boule de $\mathcal{L}(E)$ de centre 0 et de rayon L. Si, par l'absurde, il existait $u \in C$ telle que $\|u\|_{\mathcal{L}(E)} \geqslant L$. Alors on pourrait trouver $x \in E \setminus \{0\}$ tel que
$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \geqslant \frac{L}{2}.$$
On utilise ce x pour revenir dans K : comme $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \subseteq K$, on a $x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|} \in K$. Puisque $u \in C$, cette application linéaire stabilise K, donc
$$u\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\right) \in K. \tag{5}$$
Or
$$\left\|u\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|u(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\frac{u(x)}{\|x\|}\right\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} - \|u(x_0\| \geqslant \frac{\varepsilon L}{4} - \|u(x_0)\|.$$

Mais K est borné, donc il existe $M > 0$ tel que $K \subseteq \overline{B}(0, M)$. Donc d'après (5), on a aussi

$$M \geqslant \left\| u\left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \text{ et } M \geqslant \|u(x_0\|$$

d'où

$$M \geqslant \frac{\varepsilon L}{4} - M.$$

Finalement, si on choisit $L > \frac{8M}{\varepsilon}$, cette dernière inégalité sera toujours une contradiction : il ne peut pas exister d'élément de C dont la norme subordonnée excède L. Ainsi, C est borné, et on a fini.

□

Exercice 32 (Très bien pour réviser réduction et topologie) **:**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\mathcal{S}_A$ sa classe de similitude.

1. Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, alors $\overline{\mathcal{S}_A} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathcal{S}_A$ est fermée.

Idée de correction :

1. Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de matrices semblables à A qui converge vers une matrice A_∞, alors par continuité du déterminant $\det(A_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \det(A_\infty)$. Mais d'autre part, comme le déterminant est invariant par similitude, la suite $(\det(A_n))_{n\geqslant 0}$ est en fait constante égale à $\det(A)$! On en déduit que $\det(A_\infty) = \det(A) \neq 0$. Ainsi $\overline{\mathcal{S}_A} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

2. Supposons tout d'abord que la classe de similitude de A est fermée. On peut trigonaliser A puisqu'on est sur $\mathbf{C}$. On note T une matrice triangulaire supérieure semblable à A . On pose, pour tout $\varepsilon > 0$, D_ε la matrice diagonale dont la diagonale est $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}$. On considérant pour $\varepsilon > 0$ assez petit le produit :
$$D_\varepsilon^{-1} T D_\varepsilon,$$
on s'aperçoit qu'on peut trigonaliser la matrice A avec des coefficients arbitrairement petits dans la partie strictement au dessus de la diagonale. Cette " trigonalisation à ε près " est dans la classe de similitude de A et à la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient une matrice diagonale, qui est donc dans la classe de similitude de M, celle-ci étant fermée. A est donc diagonalisable.

   Réciproquement, si on suppose que A est diagonalisable. Soit B dans l'adhérence de la classe de conjugaison de A et $(A_k)_k$ une suite de matrices semblables à A, qui converge vers B. Pour tout n, $\chi_{A_n} = \chi_A$ puisque deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Par continuité du polynôme caractéristique par rapport à la matrice (clair car les coordonnées sont polynomiales en les coefficients de la matrice), on en déduit que $\chi_B = \chi_A$. Si on montre que B est diagonalisable, alors B sera semblable à A puisque deux matrices diagonalisables ayant le même polynôme caractéristique sont semblables, et on aura donc montré que B est dans la classe de similitude de A, qui sera donc fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Or si on note π le polynôme minimal de A, puisque pour tout n, A_n est semblable à A, on a :
$$\pi(A_n) = 0.$$
   En laissant tendre n vers $+\infty$ et par continuité de $M \mapsto \pi(M)$ (attention, on ne dit pas que l'application qui a une matrice associe son polynôme minimal est continue, ceci est notoirement faux !), on déduit que B est annulée par π qui est scindé à racines simples puisque A est diagonalisable. D'où le résultat.

□

Semaine 12 : suites et séries de fonctions

Exercice 33 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

1. Justifiez que f est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.
2. Peut-on appliquer le théorème sur les séries de fonctions $\mathcal{C}^1$?
3. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Idée de correction : 1. Notons $f_n : x \mapsto \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$. Les f_n sont toutes bien définies et continues sur $\mathbf{R}$. De plus $\|f_n\|_{\infty,\mathbf{R}} \leqslant \frac{1}{2^n}$ en majorant la valeur absolue du sinus par 1. Donc la série des f_n converge normalement, donc uniformément sur $\mathbf{R}$, ce qui montre que la somme de la série définit une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

2. Pour $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_n'(x)=\cos(2^n x)$. Par exemple pour $x=2\pi$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n'(2\pi)=\cos(2^{n+1}\pi)=1$. Donc la série des $f_n'(2\pi)$ diverge grossièrement. Il n'y a donc aucun espoir de montrer la convergence uniforme de la série des f_n' sur tout segment de $\mathbf{R}$ pour pouvoir appliquer le théorème !

3. Cette question a pour but de bien montrer que c'est la CVU de la série des dérivées qui est essentielle dans le théorème du cours ! La série de fonctions qu'on considère converge le plus fortement du monde, elle converge normalement sur $\mathbf{R}$! Pourtant, la somme de la série est loin de définir une fonction $\mathcal{C}^1$! On montre la non-dérivabilité en 0. Comme $f(0)=0$, le taux d'accroissement en 0 est juste $\frac{f(x)}{x}$. Pour montrer que ce taux d'accroissement n'a pas de limite lorsque x tend vers 0, il suffit de trouver une suite (x_k) tendant vers 0 telle que $\frac{f(x_k)}{x_k}$ n'a pas de limite quand k tend vers l'infini. Afin de pouvoir faire les calculs, on choisit une suite où on saura calculer les valeurs du sinus. Considérons la suite $x_k := \frac{\pi}{2^k}$. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\frac{f(x_k)}{x_k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2^{n-k}\pi)}{2^{n-k}\pi}=\sum_{n=0}^{k-1}\underbrace{\frac{\sin(2^{n-k}\pi)}{2^{n-k}\pi}}_{\geqslant\frac{2}{\pi}}+\sum_{n=k}^{+\infty}\underbrace{\frac{\sin(2^{n-k}\pi)}{2^{n-k}\pi}}_{=0}$$

en utilisant la minoration classique du sinus sur $[0,\pi/2]$. Ainsi,

$$\frac{f(x_k)}{x_k}\geqslant\frac{2}{\pi}k\underset{k\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

□

Exercice 34 (Théorème de Dini 1) **:** 1. (compacts emboîtés) Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé, et soit $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de E. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$ est un compact non vide de E.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme. C'est le théorème de Dini 1.

   Donnons une application classique de ce théorème : une approximation polynomiale de la racine carrée sur $[0,1]$.

3. On définit par récurrence une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes en posant $P_0=0$ puis pour tout $n\geqslant 0$, $P_{n+1}:=P_n+\frac{1}{2}(X-P_n^2)$. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbf{N}$, $0\leqslant P_n(x)\leqslant P_{n+1}(x)\leqslant\sqrt{x}$.

4. En déduire que la suite (P_n) converge uniformément vers la fonction racine carrée sur $[0,1]$.

Idée de correction : 1. $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$ est une intersection de fermés de E contenus dans K_0, donc c'est un fermé du compact K_0, donc c'est un compact.
La partie moins claire est le caractère non vide de cette intersection. Comme chaque K_n est non vide, on peut prendre un $x_n \in K_n$. Par décroissance de la suite (K_n), la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans le compact K_0 : on peut donc en extraire une sous-suite qui converge dans K_0. Il existe une extractrice φ et un $x \in K_0$ tels que $x_{\varphi(n)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$.
Montrons que cette limite x est en fait un élément de $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$.
Soit $n \in \mathbf{N}$.
À partir d'un certain rang, les $x_{\varphi(k)}$ appartiennent tous à K_n, et donc la limite de la suite appartient à K_n car ce dernier est fermé (car compact). Ainsi, $x \in K_n$.
Puisque n était quelconque, on a bien montré que $x \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$, et donc ce compact est non vide.

2. Déjà, pour tout $n, p \in \mathbf{N}$, et pour tout $x \in [a,b]$, $f_n(x) \leqslant f_{n+p}(x)$ par croissance de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$. En passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ et en utilisant la CVS de f_n vers f, on en déduit que $f_n(x) \leqslant f(x)$.
Maintenant, il nous reste à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$: pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$. Autrement dit, on veut montrer qu'à partir d'un certain rang, les ensembles $K_n := \{x \in [a,b] \mid f_n(x) \leqslant f(x) - \varepsilon\}$ sont vides !
Montrons que ces ensembles satisfont les hypothèses de la question précédentes :

- Ils sont compacts car fermés dans le compact $[a,b]$ (ils sont fermés par continuité des f_n et f. C'est ici qu'on voir l'importance de supposer la fonction limite continue).
- La suite (K_n) est décroissante par croissance de la suite (f_n).

Mais par convergence simple de f_n vers f, on montre facilement que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$ est vide, et donc d'après la question 1, cela veut dire qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $K_N = \emptyset$. Tous les suivants sont alors également vides, et donc on a bien montré l'existence d'un rang N tel que pour tout $n \geqslant N$, $K_n = \emptyset$.

3. Fixons $x \in [0,1]$ et montrons les inégalités par récurrence sur n.

- $n = 0$: $P_0(x) = 0$ et $P_1(x) = \frac{1}{2}x$, donc on a
$$0 \leqslant P_0(x) \leqslant P_1(x) \leqslant x \leqslant \sqrt{x}.$$
- Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que
$$0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}.$$
Puisque $P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(x - P_{n+1}(x)^2)$ et $P_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$, on a
$$P_{n+2}(x) \geqslant P_{n+1}(x).$$
De plus,
$$\begin{aligned} P_{n+2}(x) &= P_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_{n+1}(x))(\sqrt{x} + P_{n+1}(x)) \\ &\leqslant P_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_{n+1}(x))(\sqrt{x} + \sqrt{x}) \\ &\leqslant P_{n+1}(x) + \underbrace{\frac{2\sqrt{x}}{2}}_{\leqslant 1}(\sqrt{x} - P_{n+1}(x)) \end{aligned}$$
D'où : $P_{n+2}(x) \leqslant P_{n+1}(x) + \sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \sqrt{x}$. Finalement :
$$0 \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant P_{n+2}(x) \leqslant \sqrt{x},$$
ce qui conclut la récurrence.

4. Commençons par la CVS. Soit $x \in [0,1]$. D'après la question précédente, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et majorée (par $\sqrt{x}$), donc elle converge vers une certaine limite $l(x) \in \mathbf{R}_+$. En passant à la limite dans la relation de récurrence
$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$$
on en déduit que $l(x)^2 = x$, et donc $l(x) = \sqrt{x}$ car $l(x) \geqslant 0$. Ainsi, la suite (P_n) converge bien simplement vers la fonction racine carrée sur $[0,1]$.
Mais puisque d'après la question précédente, la suite (P_n) est croissante, et la fonction limite est continue, on peut appliquer le théorème de Dini 1 pour conclure que la convergence est en fait uniforme !

□

Semaine 13 : intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 35 (Question 1 incontournable) **:** 1. Une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}^+$ converge-t-elle nécessairement vers 0 ?

2. Et pour une fonction uniformément continue intégrable ?

Idée de correction : 1. Pas nécessairement. On peut prendre une fonction g continue, affine par morceaux, telle que g est nulle en dehors des intervalles du type $\left[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$ et $g(n) = n$ (faire un dessin : ce sont des triangles de plus en plus hauts mais de plus en plus fins). La fonction est intégrable puisque la série formée de la somme des aires des triangles : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Mais g n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

2. Cette fois c'est vrai. On peut raisonner par l'absurde : si f ne tend pas vers 0, alors par définition :
$$\exists \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists x > A, |f(x)| \geqslant \varepsilon \quad (*)$$
Soit η associé $\frac{\varepsilon}{2}$ dans la définition d'uniforme continuité pour f, c'est-à-dire tel que
$$|x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
$(*)$ permet de construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ strictement croissante vers $+\infty$ vérifiant
$$x_{n+1} - x_n > 2\eta \text{ et } |f(x_n)| \geqslant \varepsilon.$$
Pour tout n, l'inégalité triangulaire assure que :
$$\forall y \in]x_n - \eta, x_n + \eta[, \ |f(y)| \geqslant |f(x_n)| - |f(y) - f(x_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
On a donc pour tout $n \geqslant 1$:
$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k-\eta}^{x_k+\eta} |f(t)|\mathrm{d}t \geqslant n\left(2\eta\frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Ceci contredit l'hypothèse d'intégrabilité.

□

Exercice 36 (A savoir faire) **:**
La fonction

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} \end{array}$$

est-elle intégrable sur $[2,+\infty[$?

Idée de correction : La fonction f est continue et positive sur $[2,+\infty[$, le seul point à vérifier est l'intégrabilité en $+\infty$. Or on a :

$$x^2 f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-\ln(x)\ln(\ln(x))} = \mathrm{e}^{(2-\ln(\ln(x)))\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où l'intégrabilité par comparaison de fonctions positives. □

Exercice 37 :
À quelle condition sur $a \in \mathbf{R}$ la fonction

$$f_a \colon [1,+\infty[\to \mathbf{R}, \quad x \mapsto x+2-\sqrt{x^2+4x+1}-\frac{a}{x}$$

est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

Idée de correction : On a : $f_a(x) = x+2-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{a}{x}$. On utilise le développement limité suivant (qu'on peut redémontrer avec la formule de Taylor reste intégral) :

$$\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+O(t^3).$$

On trouve alors :

$$f_a(x) \underset{x\to+\infty}{=} \left(\frac{3}{2}-a\right)\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

Par comparaison à des intégrales de Riemann, on en déduit que f_a est intégrable si et seulement si $a=\frac{3}{2}$.

□

Exercice 38 :
Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' soient intégrables.

1. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, elle vaut forcément 0.
2. Montrer que $f(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$

Idée de correction : 1. Supposons par l'absurde que f admet une limite non nulle en $+\infty$. Alors $|f(x)| \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} l$ pour un certain $l>0$. On en déduit qu'il existe x_0 tel que pour tout $t \geqslant x_0$, $|f(t)| \geqslant \frac{l}{2}$. Alors pour tout $x \geqslant x_0$,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{l}{2}\mathrm{d}t \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t)|\mathrm{d}t$$

et en passant à la limite en $x\to\infty$, on contredit l'intégrabilité de f.

2. On écrit la formule de Taylor Reste Intégral à l'ordre 2 : pour $x \geqslant a$,
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{d}t$$
où la limite existe bien par intégrabilité de f'. Donc f admet une limite en $+\infty$, donc par la première question, cette limite est forcément nulle.

$\square$

Exercice 39 :
Soit $0 < a < b$ et soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$. Déterminer
$$\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

Idée de correction : Faire un changement de variable pour que le x ne soit plus dans les bornes, puis utiliser soit le théorème de continuité sous l'intégrale, soit un raisonnemenent epsilonesque. C'est un bon exo à donner avant la partie convergence dominée, parce qu'on peut tout faire assez facilement à la main, mais on peut ensuite revenir dessus après avoir vu le théorème de continuité sous l'intégrale, et conclure plus vite. La limite à trouver est $f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. $\square$

Exercice 40 (X) **:**
Donner un équivalent, lorsque x tend vers $+\infty$, de
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Idée de correction : On peut par exemple faire une intégration par parties de la manière suivante :
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} -2t\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{-2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{t}}_{u}\underbrace{\left(-2t\mathrm{e}^{-t^2}\right)}_{v'}\mathrm{d}t.$$
On obtient
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t.$$
Puis, par intégration des relations de comparaison,
$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)$$
d'où
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.$$
Une autre méthode :
$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t-x)^2}\mathrm{e}^{-2tx}\mathrm{d}t &\underset{u=t-x}{=} \mathrm{e}^{x^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{e}^{-2(u+x)x}\mathrm{d}u \\ = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{e}^{-2ux}\mathrm{d}u &\underset{v=ux}{=} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(v/x)^2}\mathrm{e}^{-2v}\mathrm{d}v\end{aligned}$$
Or par convergence dominée,
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(v/x)^2}\mathrm{e}^{-2v}\mathrm{d}v \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2v}\mathrm{d}v = \frac{1}{2},$$
d'où le résultat.

$\square$

Remarque :
Ce petit calcul donne une idée de la vitesse de décroissance de la fonction de survie d'une loi normale, ce qui est utile quand on fait des tests statistiques par exemple (pour sentir à quel point c'est exceptionnel qu'une loi normale prenne une valeur si grande).

Semaine 14 : théorème de convergence dominée et ses conséquences

Exercice 41 (Classique, très complet, super pour réviser. La dernière question est difficile sans plus d'indications) **:**
On définit, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbf{R}_+$, et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. En déduire une expression plus simple de f sur $\mathbf{R}_+^*$.
3. Montrer que f est continue en 0 et en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

Idée de correction : 1. Pour $x > 0$, l'intégrale est absolument convergente, et pour $x = 0$, c'est un classique de montrer que l'intégrale est convergente, mais que $t \mapsto \sin(t)/t$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. En tout cas, la fonction f est bien définie sur tout $\mathbf{R}_+$. Ensuite pour le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, on montre qu'elle est $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, pour $a > 0$, et le théorème de régularité sous l'intégrale s'applique sans problème.

2. D'après le théorème de régularité sous l'intégrale dont on a vérifié les hypothèses à la question précédente, on peut dériver sous l'intégrale. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t.$$

Or on sait calculer cette dernière intégrale, il suffit de faire deux intégrations par parties (à chaque fois, dériver le terme exponentiel, et intégrer le terme en sin ou cos), et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \sin(t) \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t = 1 - x^2 \int_0^{+\infty} \sin(t) \mathrm{e}^{-xt}.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \sin(t) \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}$$

et donc

$$f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

On en déduit qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ telle que pour tout $x > 0$, $f(x) = -\arctan(x) + C$. On peut par exemple déterminer la constante C en regardant les limites en $+\infty$ des deux côtés (du côté de f, la convergence dominée se passe bien). Finalement, pour tout $x > 0$, $f(x) = -\arctan(x) + \frac{\pi}{2}$.

3. La continuité en 0 est la question vraiment difficile. En effet, comme $t \mapsto \sin(t)/t$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$, le théorème de continuité sous l'intégrale ne peut pas s'appliquer au voisinage de $x = 0$. Il faut donc trouver une autre méthode. Écrivons, pour tout $x > 0$,

$$f(x) - f(0) = \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-xt} - 1) \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

Une astuce qui marche est de faire une intégration par parties, en faisant tomber le x de l'exponentielle. Mais pour cela, il faut voir $\sin(t)/t$ comme une dérivée, ce qui ne saute pas aux yeux. On le fait donc apparaître artificiellement en posant

$$G(t) := \int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u.$$

Ce qui est bien, c'est que G est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$, et en plus, tend vers 0 en $+\infty$ par convergence de l'intégrale de $\sin(t)/t$. En particulier elle est bornée, et c'est souvent utile pour appliquer des théorèmes de régularité sous l'intégrale. Finalement, en faisant une intégration par parties qui fait apparaître G, puis un petit changement de variables, on trouve

$$f(x) - f(0) = \int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right) \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u$$

pour tout $x > 0$. Mais avec cette écriture, c'est désormais plus facile de montrer que a limite quand x tend vers 0^+ est nulle, car G tend vers 0 en $+\infty$, et que puisqu'elle est bornée, le théorème de convergence dominée s'applique bien en dominant par $\|G\|_\infty \mathrm{e}^{-u}$. Je suis preneur de toute explication qui rendrait plus naturelle / intuitive cette astuce de faire apparaître G.

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} -\arctan(x) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

□

Exercice 42 :
Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, on définit sa transformée de Fourier comme la fonction

$$\widehat{f} : \xi \in \mathbf{R} \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x) \mathrm{e}^{-ix\xi} \mathrm{d}x$$

1. En quelques mots, pourquoi $\widehat{f}$ est-elle bien définie ?
2. Pour $\alpha > 0$ on pose $g_\alpha : x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$. Montrer que $\widehat{g_\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} g_{\frac{1}{4\alpha}}$ (en admettant que $\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$).

Idée de correction : Écrire la définition de $\widehat{g_\alpha}$, puis appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale. On en déduit que $\widehat{g_\alpha}$ est solution d'une EDO qu'on sait résoudre. On trouve alors $\widehat{g_\alpha}$ à une constante près, et on détermine la constante en évaluant en 0 et en utilisant la valeur donnée de l'intégrale de Gauss. □

Remarque :
Connaître la transformée de Fourier d'une Gaussienne, c'est quasiment la moitié du travail de fait pour montrer la formule d'inversion de Fourier, donc ce n'est pas rien ! C'est aussi important parce que ça dit qu'on sait calculer la fonction caractéristique d'une loi normale, ce qui est aussi très utile en probabilités plus tard

Exercice 43 (Une astuce utile) **:**
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $\mathbf{R}$.

Idée de correction : L'astuce est de remarquer que pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = \int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t.$$

Mais ce qui est chouette, c'est que le membre de droite a aussi un sens quand $x = 0$, et c'est bien le prolongement par continuité de $f(x)/x$ en 0 puisqu'on trouve $f'(0)$. Maintenant, on montre sans problème que le prolongement en 0 donne bien une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, en appliquant les théorèmes de régularité sous l'intégrale au membre de droite. $\square$

Exercice 44 :
Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Idée de correction : Le seul point un peu astucieux est de penser à factoriser le dénominateur par e^x, pour faire apparaître du $\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$. Ensuite, comme pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{-x} \in [0, 1[$, on peut écrire

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}.$$

Ensuite, c'est une interversion série intégrale où tout se passe bien, et le calcul de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x$$

se fait par deux IPP successives, comme dans l'exercice 41. $\square$

Semaine 15 : espaces préhilbertiens réels

Exercice 45 (c'est du cours, à maîtriser donc) **:**
Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, non réduit à zéro. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, la distance entre x et F est atteinte au point

$$p_F(x) := \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

(et seulement en ce point).

2. Montrer que p_F est une application linéaire continue de norme 1.

3. Montrer que $F \oplus F^\perp = E$.

4. On construit maintenant un contre-exemple lorsque F n'est plus supposé de dimension finie. Considérons $E := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

et $F := \{f \in E, f(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel strict de E, et que $F^\perp = \{0\}$. En particulier $F \oplus F^\perp \neq E$.

Idée de correction : 1. La première remarque importante, c'est que $x - p_F(x) \in F^\perp$, ce qui se montre tout seul en calculant les produits scalaires contre les e_k. Ensuite, pour tout $y \in F$, on a :

$$\|x-y\|^2 = \|\underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F}\|^2$$

et donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x-y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2. \tag{6}$$

Donc pour tout $y \in F$, $\|x-y\|^2 \geqslant \|x - p_F(x)\|^2$, avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$. Ceci montre bien que $p_F(x)$ est l'unique point de F en lequel la distance entre x et F est atteinte. De plus, on a

$$d(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2$$

(la deuxième égalité, c'est juste l'égalité (6) appliquée avec $y = 0$, et la dernière c'est par Pythagore par orthogonalité des e_k).

2. La linéarité est claire d'après l'expression de p_F en fonction des produits scalaires contre les e_k. De plus pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2,$$

et donc $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$, ce qui montre que p_F est continue, de norme $\leqslant 1$. Mais comme $p_F(e_1) = e_1$, la norme de p_F est en fait égale à 1.

3. On a $E = F^\perp + F$ car tout $x \in E$ s'écrit $x - p_F(x) + p_F(x)$. De plus la somme est directe car deux sous-espaces orthogonaux sont en somme directe.

4. F est un sous-espace vectoriel strict comme noyau de la forme linéaire non nulle $f \mapsto f(0)$. Pour montrer que $F^\perp = \{0\}$, il y a une petite astuce. Prenons $g \in F^\perp$. Alors g est orthogonale à toute fonction continue nulle en 0. En particulier, g est orthogonale à $t \mapsto tg(t)$. On en déduit que

$$\int_0^1 tg(t)^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Donc (fonction continue positive d'intégrale nulle), pour tout $t \in [0,1]$, $tg(t)^2 = 0$. Donc pour tout $t \in]0,1]$, $g(t) = 0$. On en déduit que g est la fonction nulle car on sait que g est continue en 0.

□

Voici maintenant un long exercice, qui introduit la notion de convergence faible dans un espace préhilbertien. On explique notamment que le lemme de Riemann-Lebesgue peut s'interpréter comme de la convergence faible vers 0.

Exercice 46 :
Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit qu'elle converge *faiblement* dans E s'il existe $u \in E$ tel que pour tout $v \in E$, $\langle u_n, v\rangle \underset{n\infty}{\longrightarrow} \langle u, v\rangle$.

1. Montrer l'unicité de la limite au sens faible d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2. Montrer que la convergence pour la norme euclidienne implique la convergence faible.

3. Montrer que si E est de dimension finie, la réciproque est vraie.

4. Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille orthonormée de vecteurs de E. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leqslant \|x\|^2 \quad \text{(inégalité de Bessel).}$$

5. En déduire que la suite $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers 0.

6. On se propose maintenant de montrer que la réciproque de la question 2 n'est pas vraie en général. Considérons l'espace $E := \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbf{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ (où $f_n \colon t \mapsto \sin(nt)$) converge faiblement vers 0, mais pas fortement.

Idée de correction : 1. On va noter $u_n \rightharpoonup u$ pour signifier que u_n converge faiblement vers u dans E. Supposons que $u_n \rightharpoonup u$ et $u_n \rightharpoonup u'$, et montrons que $u = u'$. Pour tout $v \in E$, on a $\langle u_n, v\rangle \underset{n\infty}{\longrightarrow} \langle u, v\rangle$ et $\langle u_n, v\rangle \underset{n\infty}{\longrightarrow} \langle u', v\rangle$. Par unicité de la limite dans $\mathbf{R}$, on en déduit que $\langle u, v\rangle = \langle u', v\rangle$, i.e. $\langle u - u', v\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $v \in E$, en prenant $v = u - u'$, on en déduit que $u = u'$.

2. Supposons que $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$. Puisque pour tout $v \in E$, on a (par Cauchy-Schwarz) :

$$|\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| = |\langle u_n - u, v\rangle| \leqslant \|u_n - u\|\|v\|,$$

on en déduit que $u_n \rightharpoonup u$.

3. Si E est de dimension finie, il admet une base orthonormée, disons $(e_1, \ldots, e_d)$. Si maintenant $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de vecteurs de E qui converge faiblement vers x, on a : pour tout $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\langle x_n, e_k\rangle \underset{n\infty}{\longrightarrow} \langle x, e_k\rangle.$$

Autrement dit, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge coordonnée par coordonnée vers x. C'est à dire que si on munit E de la norme

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\|' & : & E & \to & \mathbf{R}_+ \\ & & y = \sum_{k=1}^d \langle y, e_k\rangle e_k & \mapsto & \max_k |\langle y, e_k\rangle| \end{array}$$

on a $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|'} u$. Mais comme en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, on a $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$.

4. On utilise le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $e_0, \ldots, e_n$. Alors on sait que pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F_n est $p_{F_n}(x) := \sum_{k=0}^n \langle x, e_k\rangle e_k$ (car $e_0, \ldots, e_n$ forme une base orthonormée de F_n), et que

$$\|x\|^2 = \|x - p_{F_n}(x)\|^2 + \|p_{F_n}(x)\|^2$$

par Pythagore. En particulier, on a $\|p_{F_n}(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$, et en développant $\|p_{F_n}(x)\|^2$ encore avec Pythagore, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbf{N}$, on en déduit l'inégalité de Bessel.

5. D'après la question précédente, pour tout $x \in E$, la série des $\langle x, e_k\rangle^2$ converge, donc en particulier son terme général tend vers 0. Ainsi, pour tout $x \in E$, $\langle x, e_k\rangle \underset{k\infty}{\longrightarrow} \langle x, 0\rangle$, et donc $e_k \rightharpoonup 0$.

6. Pour montrer la convergence faible vers 0, on peut montrer que les f_n forment bien une famille orthonormée de vecteurs de E. Les calculs sont un peu plus pénibles qu'avec des e^{int}, mais c'est pour rester dans le cadre préhilbertien *réel*... On applique alors la question précédente pour conclure. Remarquons qu'on retrouve, dans ce contexte particulier, le lemme de Riemann-Lebesgue ! En effet, dire que $f_n \rightharpoonup 0$, c'est exactement dire que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbf{R})$, on a :

$$\langle f, f_n \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'ailleurs, si on ne pense pas à appliquer la question précédente, on peut aussi démontrer la convergence faible en utilisant Riemann-Lebesgue, en tout cas ça fait une occasion de reparler de la démonstration classique, par approximation par des fonctions étagées. Mais voilà, c'est quand même trop cool, dans ce cadre là, on a une démonstration de Riemann-Lebesgue sans aucun argument d'approximation, juste avec l'inégalité de Bessel !

Et pour montrer que la suite f_n ne converge pas fortement, c'est parce qu'on a dit que la famille est orthonormée, donc en particulier les f_n sont de norme 1, donc ne tendent pas vers 0 pour la norme euclidienne.

□

Semaine 16 : espaces euclidiens, théorème spectral

Exercice 47 (Classique) **:**
Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ (i.e. si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ contenant $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, alors il est égal à $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$).
Indication : utiliser la décomposition polaire.

Idée de correction : Soit G un sous groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \subseteq G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$$

Montrons que $G \subseteq \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$. Soit $M \in G$. On écrit $M = OS$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ (on utilise le résultat de l'exercice sur la décomposition polaire). Alors puisque G contient $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, ${}^t\!O \in G$, et donc :

$${}^t\!O(OS) = S \in G.$$

La compacité de G permet ensuite de montrer que les valeurs propres de S sont nécessairement de module 1. En effet, on peut diagonaliser S en base orthonormée d'après le théorème spectral. Puisque $S \in G$ et que G est un groupe, tous les S^m, pour $m \in \mathbf{Z}$ appartiennent aussi à G. Mais G est borné (car compact), donc les puissances des valeurs propres de S, et leurs inverses, ne peuvent pas exploser. On en déduit facilement que les valeurs propres sont de module 1, et comme elles sont réelles positives, elles sont toutes égales à 1. Donc S est diagonalisable avec pour unique valeur propre 1, donc $S = I_n$. Ainsi $M = O \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$.

□

Exercice 48 (Un bon contre-exemple à retenir) **:**
Existe-t-il $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$,

$$P(0) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t \ ?$$

Idée de correction : La réponse est non, ce qui montre que le théorème de Riesz peut être faux en dimension infinie : la forme linéaire $P \mapsto P(0)$ ne peut pas s'écrire comme le produit scalaire contre

un vecteur fixé, si on munit $\mathbf{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
Une méthode astucieuse mais rapide : si un tel Q existait, alors en prenant $P = XQ(X)$, on aurait

$$P(0) = 0 = \int_0^1 tQ(t)^2 \mathrm{d}t.$$

On en déduit que $Q = 0$ en utilisant le fait qu'une fonction continue positive d'intégrale nulle sur un segment est nulle. Mais $Q = 0$ ne convient pas car il y a des polynômes non nuls en 0, d'où la contradiction.

Une autre méthode, qui aboutit peut-être, et qui utilise le cours : pour chaque $n \in \mathbf{N}$, si on restreint la forme linéaire $P \mapsto P(0)$ à $\mathbf{R}_n[X]$, on sait qu'il existe un unique $Q_n \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $P(0) = \langle P, Q_n\rangle$ (car on est en dimension finie cette fois-ci). En particulier, si il existe un Q comme dans l'énoncé, et si on note N son degré, alors pour tout $n \geqslant N$, $Q = Q_n$ (l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $P(0) = \int_0^1 P(t)Q_n(t)\mathrm{d}t$). Mais ça semble un peu dingue que le polynôme Q, de degré N, convienne pour tous les $\mathbf{R}_n[X]$ pour $n \geqslant N$. Je ne sais pas si c'est vrai, mais peut-être qu'on peut montrer que le polynôme Q_n est nécessairement de degré exactement n... En tout cas c'est une piste à encourager, parce que les élèves se ramènent à la dimension finie, où le théorème est vrai, et donc c'est une méthode qui est très bien vue à l'oral je pense, alors que l'autre est une astuce, on ne peut pas reprocher de ne pas la trouver je pense ! □

Exercice 49 :
Quel est le cardinal de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$? Et celui de $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$?

Idée de correction : Si $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ alors ses colonnes sont normées, donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

Comme les $a_{i,j}$ sont entiers, on en déduit que sur chaque colonne, tous les coefficients sauf un sont nuls, et l'unique coefficient non nul est égal soit à 1, soit à -1. De plus, comme les colonnes sont orthogonales, deux colonnes distinctes ne peuvent avoir leur unique coefficient non nul dans la même ligne. Ainsi, M est une matrice de permutation dans laquelle on a autorisé des -1. Réciproquement, une telle matrice est bien sûr dans $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$. Pour dénombrer cet ensemble :
Il y a n choix possibles pour la ligne où se trouve le coefficient non nul de la première colonne, et une fois qu'on a choisi la position du coefficient non nul, il y a deux possibilités : on met 1 ou -1. Ensuite, un fois la première colonne fixée, il n'y a plus que $n-1$ choix possibles pour la position du coefficient non nul dans la deuxième colonne, et 2 choix possibles pour ce coefficient : 1 ou -1 etc. Finalement :

$$\#\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) = (2 \times n)(2 \times (n-1))(2 \times (n-2)) \dots (2 \times 1) = 2^n n!$$

Une autre façon de le voir : se donner une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, c'est se donner une matrice de permutation (il y a $n!$ choix possibles), puis insérer des -1 à la place de certains 1 (il y a 2^n choix possibles : pour chaque 1, soit on le laisse, soit on met un -1).

Pour le dénombrement de $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, on donne plusieurs méthodes, les élèves ayant trouvé des approches qui m'ont bien plu !

- *Méthode 1 :* Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, on note $|M|$ la matrice formée des valeurs absolues des coefficients de M. C'est une matrice de permutation, associée à une permutation σ_M disons. Alors en écrivant la formule du déterminant en fonction des permutations, on voit facilement que seul le terme correspondant à σ_M a une contribution non nulle, et qu'on a

$$\det(M) = \varepsilon(\sigma_M)(-1)^k$$

où k est le nombre de -1 dans la matrice M. Ainsi, les matrices de déterminant 1 parmi les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ sont :

- celles associées à une permutation paire, ayant un nombre pair de -1.
- celles associées à une permutation impaire ayant un nombre impair de -1.

Finalement, se donner une matrice de $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, c'est se donner une matrice de permutation paire ($n!/2$ choix possibles), puis insérer un nombre pair de -1 à la place de certains 1 OU (union disjointe) se donner une matrice de permutation impaire et remplacer un nombre impair de 1 par des -1.

Dénombrons les matrices du premier type : comme on l'a dit, il y a $n!/2$ choix possibles pour la matrice de permutation paire de départ. Ensuite pour tout $d \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, il y a $\binom{n}{2d}$ façons de remplacer $2d$ coefficients égaux à 1 par des coefficients égaux à -1. Donc le nombre de matrices de ce type est :

$$\frac{n!}{2} \sum_{d=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2d}.$$

De même, on montre que le nombre de matrices du deuxième type est :

$$\frac{n!}{2} \sum_{d=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2d+1}.$$

D'où :

$$\#\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) = \frac{n!}{2} \sum_{d=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2d} + \sum_{d=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2d+1} = \frac{n!}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right) = 2^{n-1} n!$$

- *Méthode 2 :* On peut reprendre la technique de dénombrement de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, en disant que pour les $n-1$ premières colonnes, on a les mêmes choix qu'avant. Par contre, pour remplir la dernière colonne, non seulement la ligne où doit apparaître le coefficient non nul est imposée, mais la valeur de ce coefficient l'est aussi ! En effet, on ne peut plus choisir entre 1 et -1 car on est obligés de mettre le seul qui permet d'avoir un déterminant égal à 1. Donc on trouve bien que le cardinal cherché est celui de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ divisé par 2.

- *Méthode 3 :* On peut remarquer que le déterminant induit un morphisme de groupes de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ vers $\{\pm 1\}$ (le fait que le membre de gauche est bien un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ repose juste sur la formule de la comatrice, qui permet de montrer que l'inverse d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ est aussi à coefficients entiers). Le noyau de ce morphisme de groupes est exactement $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, et il est de cardinal la moitié de l'ensemble de départ, car l'image est de cardinal 2. Sans trop parler de quotients de groupes, on peut introduire une relation d'équivalence comme dans la démonstration du théorème de Lagrange qu'on fait en prépa...

□

Exercice 50 (Remet en mémoire la réduction, question 1 assez difficile) **:**
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe $k \geqslant 2$ tel que $A^k = {}^tA$.

1. Montrer que ${}^tAA$ est la matrice d'un projecteur orthogonal.
2. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbf{C}$.

Idée de correction : 1. C'est un peu perturbant, car pour une fois on ne montre pas qu'un endomorphisme est un projecteur en montrant facilement que $p \circ p = p$...

Comme ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée. Donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (pas forcément distincts) tels que :

$$
{}^tAA = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP
$$

Pour montrer que ${}^tAA$ est un projecteur orthogonal, il ne reste plus qu'à montrer que les λ_i appartiennent à $\{0,1\}$. Pour cela, on cherche un polynôme annulateur de ${}^tAA$. Puisque ${}^tA = A^k$, ${}^tA$ commute avec A, et donc on peut écrire :

$$
({}^tAA)^k = ({}^tA)^k A^k = {}^t(A^k){}^tA = {}^t({}^tA){}^tA = A{}^tA = {}^tAA.
$$

Ainsi, le polynôme $P := X^k - X = X(X^{k-1} - 1)$ est un polynôme annulateur de ${}^tAA$. On en déduit que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont incluses dans l'ensemble des racines de ce polynôme. Donc $\mathrm{Sp}({}^tAA) \subseteq \{0\} \cup \mathbf{U}_{k-1}$. Mais comme on sait aussi que les valeurs propres sont réelles, elles appartiennent à $\{0,1,-1\}$. On exclut la possibilité d'avoir une valeur propre égale à -1 en remarquant que ${}^tAA$ est non-seulement symétrique, mais même symétrique positive !

2. Comme ${}^tAA$ est un projecteur, on a $({}^tAA)^2 = {}^tAA$. En remplaçant ${}^tA$ par A^k, on obtient : $A^{2(k+1)} = A^{k+1}$. Ainsi, le polynôme $Q := X^{k+1}(X^{k+1} - 1)$ est un polynôme annulateur de A. D'après le lemme des noyaux, on en déduit que

$$
\mathbf{C}^n = \ker(A^{k+1}) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathbf{U}_{k+1}} \ker(A - \lambda I_n) \right).
$$

Or $A^{k+1} = {}^tAA$, et donc $\ker(A^{k+1}) = \ker({}^tAA)$. Maintenant,c'est un exercice classique de montrer que $\ker(A) = \ker({}^tAA)$. En effet, une inclusion est immédiate, et pour l'autre : si $X \in \ker({}^tAA)$, alors ${}^tAAX = 0$, donc ${}^tX{}^tAAX = 0$. Mais ce dernier terme est égal à $\|AX\|^2$, d'où le résultat. Ainsi,

$$
\mathbf{C}^n = \ker(A) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathbf{U}_{k+1}} \ker(A - \lambda I_n) \right),
$$

ce qui montre bien la diagonalisabilité de A dans $\mathbf{C}$.

□

Exercice 51 (Mines-Ponts) **:**
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, inversible et semblable à son inverse. Montrer que $\mathrm{tr}(A^2) \geqslant n$, et qu'il y a égalité si et seulement si A est une symétrie orthogonale.

Idée de correction : Comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, il n'est d'arme plus adaptée que le théorème spectral. L'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable en base orthonormée, ce qui se traduit matriciellement par l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et d'une matrice diagonale réelle D telles que :

$$
P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

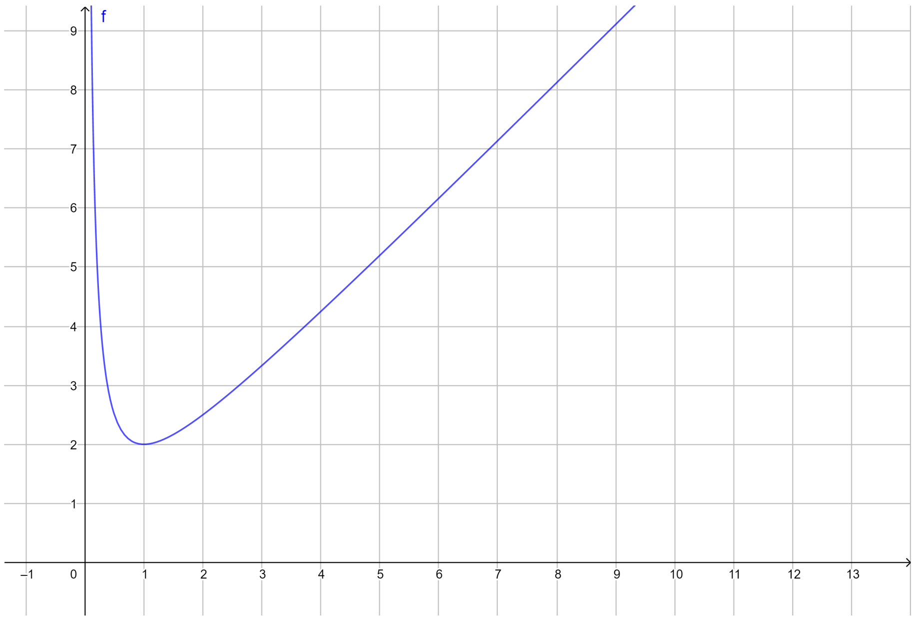
On a alors :

$$
\mathrm{tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \ldots \lambda_n^2.
$$

A étant inversible, aucun λ_i n'est nul et on a :

$$
P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\lambda_n \end{pmatrix}
$$

D'où
$$\operatorname{tr}\left((A^{-1})^2\right) = \frac{1}{\lambda_1^2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n^2}$$
Mais puisque A et A^{-1} sont semblables, on a : $\operatorname{tr}\left((A^{-1})^2\right) = \operatorname{tr}(A^2)$, et donc :
$$2\operatorname{tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \dots \lambda_n^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^2 + \frac{1}{\lambda_i^2}\right)$$
Or une rapide étude de la fonction $x \mapsto x + 1/x$ sur $\mathbf{R}_+^*$ montre qu'elle a cette tête :



Autrement dit, elle est toujours au dessus de 2, et même strictement au dessus sauf si $x = 1$. Ainsi, on obtient bien $2\operatorname{tr}(A^2) \geqslant 2n$, c'est-à-dire $\operatorname{tr}(A^2) \geqslant n$. De plus, il y a égalité si et seulement si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\lambda_i^2 = 1$. Donc il y a égalité si et seulement si les valeurs propres de A sont dans $\{\pm 1\}$, c'est-à-dire lorsque A est diagonalisable en base orthonormée à valeurs propres dans $\{\pm 1\}$, ce qui est une caractérisation des symétries orthogonales. □

Exercice 52 (X, pas facile sans les détails) **:**
Soit E un espace euclidien, et soit $(v_0, \dots, v_p)$ une famille obtusangle de vecteurs de E, c'est-à-dire telle que pour tout $i \neq j \in \{0, \dots, p\}$, $\langle v_i, v_j \rangle < 0$. Montrer que $(v_1, \dots, v_p)$ est libre (en particulier, $p \leqslant \dim(E)$).

Idée de correction : Voici quelques questions intermédiaires :

1. On suppose que la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est liée, on a donc une combinaison linéaire non triviale qui est égale à 0 :
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0.$$
Quitte à multiplier par -1, on peut supposer que l'un des $\lambda_i > 0$. On pose
$$I := \{i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i > 0\},\ J = [\![1, p]\!] \setminus I \text{ et } u = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$$
En remarquant que u est aussi égal à $-\sum_{j \in J} \lambda_j v_j$, calculer $\|u\|^2$ et en déduire que $u = 0$
2. En calculant $\langle u, v_0 \rangle$, aboutir à une contradiction.

□

Semaine 17 et 18 : séries entières

Exercice 53 : 1. Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$, et $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = 0$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Montrer que a est isolé c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ tel que :

$$\forall y \in]a-h, a+h[\backslash\{a\},\ f(y) \neq 0.$$

2. En déduire que si f est non nulle et développable en série entière autour de chaque point sur $\mathbf{R}$, alors les zéros de f sont isolés.

3. La fonction

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle développable en série entière en 0 ?

Idée de correction : 1. Il s'agit juste d'écrire un développement limité à l'ordre n de f en a (en prenant n l'entier minimal vérifiant la propriété de l'énoncé). Pour η assez petit, on a :

$$\left| f(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right| \leqslant \frac{|f^{(n)}(a)|}{2\,n!}|x-a|^n, \quad \forall x \in [a-\eta, a+\eta].$$

Ce qui interdit à f de s'annuler sur $[a-\eta, a+\eta]\backslash\{a\}$.

2. Il s'agit de voir que pour tout $x \in \mathbf{R}$, alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que : $f^{(n)}(x) \neq 0$. On raisonne par l'absurde, il existe donc $x \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f^{(n)}(x) = 0.$$

Comme f est développable en série entière autour de x, on déduit que f est nulle sur un intervalle de la forme $]x-\delta, x+\delta[$, avec $\delta > 0$. On considère :

$$S := \sup\{t \geqslant x, \forall s \in [x,t],\ f(s) = 0\},$$

l'ensemble étant non vide. Supposons que $S < +\infty$. Par continuité de f, $f(S) = 0$, puisqu'il existe une suite de zéros de f qui converge vers le sup. S n'est donc pas isolé puisque f est nulle sur $[x, S]$. On déduit que pour tout n, $f^{(n)}(S) = 0$ et le même raisonnement qu'au début de la question montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est nulle sur $[S, S+\varepsilon[$, ce qui contredit la définition de S. On a donc montré que f est nulle sur $[x, +\infty[$. On peut procéder de même pour montrer que f est nulle sur $]-\infty, x]$.

3. Non car 0 n'est pas un zéro isolé de f qui est non nulle.

□

Exercice 54 (tiré d'un oral d'entrée à l'Ens Rennes sur dossier) **:**
On considère :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{e}^{x^2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt. \end{array}$$

Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbf{R}$ et donner son développement en série entière.

Idée de correction : Les fonctions $x \mapsto e^{x^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont développables en séries entières avec un rayon infini. En primitivant, on déduit que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ est également développable en série entière de rayon infini. Par stabilité par produit, f est également développable en série entière avec un rayon infini : il existe une suite de complexes a_n tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

On vérifie facilement que f est solution de :

$$f' = 2xf + 1.$$

En traduisant cette égalité avec l'écriture en série et en identifiant les coefficients (qui sont uniques !), on déduit que :

$$\forall n \geqslant 1,\ (n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}.$$

Or $a_0 = 0$ et $a_1 = f'(0) = 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{2^n}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 3\times 1} = \frac{4^n n!}{(2n+1)!}$$

□

Exercice 55 :
Soit $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que $n \underset{n\infty}{=} o(p_n)$. On définit la série entière $\sum x^{p_n}$, dont on notera f la somme là où elle est bien définie.

1. Quel est le rayon de convergence de la série ?
2. Quelle est la limite de $(1-x)f(x)$ lorsque $x \to 1^-$?
3. On prend $p_n = n^2$. Trouver un équivalent de f en 1^-.

Idée de correction :

1. si $x < 1$, $x^{p_n} \underset{n\infty}{\to} 0$, donc le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1. Mais si $x > 1$, la série diverge grossièrement, d'où finalement $R = 1$.
2. L'idée est que comme p_n tend rapidement vers $+\infty$, f ne prend pas des valeurs trop grandes, même quand x s'approche de 1, et donc on peut s'attendre à avoir $(1-x)f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$.
   Soit $\varepsilon > 0$.
   Soit $M \in \mathbf{N}^*$ tel que $0 \leqslant \frac{1}{M} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$.

   D'après l'hypothèse $n \underset{n\infty}{=} o(p_n)$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{p_n}{n} \geqslant M$.

   Alors pour tout $x \in [0,1[$ on a :

$$\begin{aligned}
(1-x)f(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n} \\
&= (1-x)\left[\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + \sum_{n=n_0}^{+\infty}\left(x^{\frac{p_n}{n}}\right)^n\right] \\
&\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + (1-x)\sum_{n=n_0}^{+\infty}\left(x^M\right)^n \\
&\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + (1-x)\frac{1}{1-x^M} \\
&= (1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} + \frac{1}{1+x+\cdots+x^{M-1}}
\end{aligned}$$

Or
$$\frac{1}{1+x+\cdots+x^{M-1}} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{1}{M} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$
donc il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]1-\delta, 1[$,
$$\frac{1}{1+x+\cdots+x^{M-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part,
$$\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} n_0$$
donc
$$(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0.$$
Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]1-\eta, 1[$,
$$(1-x)\sum_{n=0}^{n_0-1} x^{p_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En prenant $\alpha := \min(\delta, \eta)$, on a : pour tout $x \in]1-\alpha, 1[$, $0 \leqslant (1-x)f(x) \leqslant \varepsilon$. Finalement, on a bien montré que
$$(1-x)f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0.$$

3. On fait une comparaison série-intégrale. Fixons $x \in]0,1[$ et considérons la fonction
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2 \ln(x)} \end{array}.$$

Cette fonction est bien décroissante et intégrable sur $\mathbf{R}_+$, car $\ln(x) < 0$. On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:
$$\int_n^{n+1} g(t)\mathrm{d}t \leqslant g(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} g(t)\mathrm{d}t.$$
En ajoutant le terme en 0 et en sommant, on obtient
$$1 + \int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

Maintenant,
$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2\ln(x)}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(t\sqrt{-\ln(x)}\right)^2}\mathrm{d}t.$$
Après changement de variable $u = t\sqrt{-\ln(x)}$, on obtient :
$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-\ln(x)}}.$$

Puisque $\ln(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} x-1$, on en déduit que le terme de droite dans (7) est équivalent à

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

Le terme de gauche dans (7) se traite de la même manière, et on peut donc conclure :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

$\square$

Exercice 56 (C'est bien de savoir le faire, exercice important) **:**
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,\infty[$. On note f la fonction définie sur $[0,R[$ par la somme de cette série. Montrer que si $\sum a_n R^n$ converge, alors :

$$f(x) \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Application : Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Idée de correction : On peut supposer que $R=1$ (petit exercice).

Nous allons effectuer une tranformation d'Abel, on note zuzuellement $S_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$ (avec la convention $S_{-1}=0$), et $S := \lim S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1})\, x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N} S_{n-1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1} \qquad \text{car } S_{-1}=0 \\
&= S_N x^N + (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n
\end{aligned}$$

Par hypothèse $S_N \underset{N\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, donc la suite $(S_N)_{N\in\mathbf{N}}$ est bornée, donc $S_N x^N \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme le terme de gauche converge quand $N\to+\infty$ (vers $f(x)$), on en déduit que la série des $S_n x^n$ converge. En passant à la limite $N\to\infty$, on obtient :

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

(égalité vraie pour tout $x\in[0,1[$). On en déduit que pour tout $x\in[0,1[$,

$$\begin{aligned}
f(x) - S &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S x^n \\
&= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S) x^n
\end{aligned}$$

Une fois que l'on a obtenu cette égalité, on conclut rapidement. En effet, si on fixe $\varepsilon > 0$, alors il existe un rang N à partir duquel les différences $|S_n - S|$ sont toutes majorées par ε. On en déduit que pour tout $0 \leqslant x < 1$,

$$
\begin{aligned}
|f(x) - S| &\leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |S_n - S| x^n + (1-x) \sum_{n=N}^{+\infty} |S_n - S| x^n \\
&\leqslant (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} |S_n - S| x^n \quad + \ \varepsilon
\end{aligned}
$$

Or le premier terme tend vers 0 lorsque $x \to 1^-$, et donc il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, $|f(x) - S| \leqslant 2\varepsilon$, et c'est ce qu'on voulait.

Pour l'application, il suffit d'appliquer la partie précédente au développement en série entière de la fonction arctan. Dans ce cas on sait que $\sum a_n$ converge car c'est une série alternée.

□

Remarque :
Si on suppose que $\sum a_n R^n$ converge absolument, alors la démonstration est beaucoup plus simple, il y a convergence uniforme sur $[0, R]$, et donc la somme de la série est continue en R. Le cadre d'application est plutôt quand on a une convergence au bord due à un argument du style séries alternées, et qu'on aimerait calculer la somme au bord en connaissant une expression simple de la somme de la série à l'intérieur du disque de convergence.

Exercice 57 :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon supérieur ou égal à 1. On note f la fonction définie sur $[0, 1[$ comme la somme de la série. On suppose que f admet une limite en 1^-. Peut-on en déduire que la série des a_n converge ? Si maintenant on rajoute l'hypothèse

$$a_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$$

montrer que la série des a_n converge. *Indication :* Considérer la différence

$$f\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Idée de correction : Pour la première question il suffit de considérer $\sum (-1)^n z^n$ pour se convaincre que non.

Maintenant, supposons que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Par hypothèse, il existe un $l \in \mathbf{C}$ tel que

$$f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} l.$$

En particulier,

$$f\left(1 - \frac{1}{N}\right) \underset{N\infty}{\longrightarrow} l.$$

Donc pour montrer que la série des a_n converge et que sa somme est l, il suffit que montrer que :

$$f\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
f\left(1-\frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(1-\frac{1}{N}\right)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_n \left[\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - 1\right] + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \left(1-\frac{1}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left| f\left(1-\frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| &\leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n| \underbrace{\left|\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - 1\right|}_{\leqslant n/N \ \ (\mathrm{IAF})} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left(1-\frac{1}{N}\right)^n \\
&\leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n|a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left(1-\frac{1}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

- Le premier terme tend vers 0 d'après le lemme de Cesàro, car par hypothèse $na_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Pour le second terme :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left(1-\frac{1}{N}\right)^n &= \sum_{n>N} \frac{n|a_n|}{n} \left(1-\frac{1}{N}\right)^n \\
&\leqslant \left(\sup_{n>N} n|a_n|\right) \times \sum_{n>N} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \\
&\leqslant \left(\sup_{n>N} n|a_n|\right) \times \frac{1}{N}\sum_{n>N} \left(1-\frac{1}{N}\right)^n \\
&\leqslant \left(\sup_{n>N} n|a_n|\right) \times \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n\geqslant 0} \left(1-\frac{1}{N}\right)^n}_{=1}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\left| f\left(1-\frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} n|a_n| + \sup_{n>N} n|a_n|$$

et les deux termes de droite tendent vers 0 grâce à l'hypothèse $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où le résultat.

$\square$

Remarque :
En fait, le théorème reste vrai en supposant seulement que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, mais c'est considérablement plus difficile à démontrer.

Semaines 19 et 20 : probabilités

Exercice 58 :
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ iid et indépendantes d'une autre variable aléatoire N également à valeurs dans $\mathbf{N}$. On définit alors la variable aléatoire S par :

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

1. Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a :

$$G_S(t) = G_N(G_{X_1}(t)).$$

2. Montrer que si N suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et la suite (X_n) est iid de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors S suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(p\lambda)$.

3. Montrer que si X_1 et N sont d'espérances finies, alors il en est de même pour S et on a la formule de Wald :

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1).$$

Idée de correction : 1. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Commençons par calculer $\mathbf{P}(S = k)$. On a :

$$\mathbf{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = k, N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = n)\mathbf{P}(S_n = k) \quad \text{par indépendance de } N \text{ et } S_n.$$

Le théorème de sommation par paquets assure alors que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = n)\mathbf{P}(S_n = k)t^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = n) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = k)t^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = n)G_{S_n}(t). \end{aligned}$$

Or puisque les variables aléatoires $(X_n)_n$ sont iid, on sait que :

$$G_{S_n}(t) = (G_{X_1}(t))^n.$$

(marche aussi pour $n = 0$, car S_0 est une somme de 1 à 0, donc nulle par convention. Ainsi, $G_{S_0} = 1$).

On a donc :

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(N = n)(G_{X_1}(t))^n = G_N(G_{X_1}(t)).$$

2. N suit une loi de Poisson de paramètre λ donc on a :

$$G_N(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

Pour X_1 suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, on a :

$$G_{X_1}(t) = pt + (1 - p).$$

D'après la première question :

$$G_S(t) = e^{\lambda(pt+(1-p)-1)} = e^{p\lambda(t-1)}.$$

On reconnait la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$: comme la fonction génératrice caractérise la loi, cela achève la preuve.

3. Comme le signale Ouvrard (*Probabilités 1*, Cassini), il faut éviter de dire un peu trop vite « G_S est dérivable en 1 par composition de fonctions qui le sont par hypothèse (N et X_1 admettent une espérance finie) donc S admet une espérance finie et on a :

$$\mathbf{E}(S) = G_S'(1) = G_{X_1}'(1)G_N'(G_{X_1}(1)) = G_{X_1}'(1)G_N'(1) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(N) \text{ »}$$

En effet, il n'y a pas de théorème général sur la composition de fonctions dérivables à gauche (ou à droite). On voit facilement qu'il y a un problème si on essaie de montrer le résultat en revenant aux taux de variation. En effet, pour tout t au voisinage de 1^-, on a :

$$\frac{G_S(1) - G_S(t)}{1-t} = \frac{G_N(1) - G_N(G_{X_1}(t))}{1-t} = \frac{G_N(1) - G_N(G_{X_1}(t))}{1 - G_{X_1}(t)} \times \frac{1 - G_{X_1}(t)}{1-t}$$

Or le terme $\frac{1-G_{X_1}(t)}{1-t}$ tend bien vers la dérivée à gauche en 1 de G_{X_1} lorsque t tend vers 1 par valeurs inférieures. Par contre, pour utiliser la dérivabilité à gauche en 1 de G_N pour montrer que le terme $\frac{G_N(1)-G_N(G_{X_1}(t))}{1-G_{X_1}(t)}$ converge bien, il y a un petit truc à justifier. Plus précisément, il s'agit de montrer que lorsque t tend vers 1 par valeurs inférieures, il en est de même de $G_{X_1}(t)$. Le fait que $G_{X_1}(t)$ tende vers 1 est connu (continuité de la fonction génératrice sur $[-1,1]$). Pour expliquer que $G_{X_1}(t) < 1$ pour $t < 1$ suffisamment proche de 1, il suffit d'utiliser le fait que la dérivée à gauche en 1 de G_{X_1} est égale à $\mathbf{E}(X_1)$, et est donc strictement positive (à condition que X_1 ne soit pas nulle presque sûrement, mais ce dernier cas se traite à part sans problème, car dans ce cas S est aussi nulle presque sûrement, et donc la formule de Wald est aussi vérifiée).

□

Voici deux exercices qui portent sur les permutations aléatoires, un thème qui a l'air assez à la mode en ce moment.

Exercice 59 :
Soit σ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de σ. Calculer l'espérance de X. (on répond ainsi à la question : « quel est le nombre moyen de points fixes d'une permutation prise au hasard ? »)

Idée de correction : Le nombre de points fixes de σ est :

$$X = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\sigma(k)=k}$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\sigma(k)=k}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\sigma(k) = k).$$

Comme σ est uniformément distribuée, pour calculer la probabilité que k soit un point fixe, il suffit de dénombrer le nombre de permutations fixant k : il y en a $(n-1)!$ (choix d'une permutation quelconque de $\{1,\ldots,n\}\backslash\{k\}$). Ainsi pour tout k :

$$\mathbf{P}(\sigma(k) = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}\cdot$$

On conclut que :

$$\mathbf{E}(X) = 1.$$

□

Exercice 60 :
Soit $n \geqslant 1$, et soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de cycles dans la décomposition de σ_n en produit de cycles à supports disjoints (en comptant les cycles réduits à un singleton, par exemple l'identité a n cycles dans sa décomposition). Le but de l'exercice est de donner une formule explicite pour l'espérance de X_n, puis un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$. On répond ainsi à la question : « en moyenne, quel est le nombre de cycles à supports disjoints d'un élément de $\mathfrak{S}_n$? »

1. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $c_{n,k}$ le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui ont exactement k cycles dans leur décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Établir la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + nc_{n,k}$$

2. En déduire une relation entre les fonctions génératrices $G_{X_{n+1}}$ et G_{X_n}.
3. En déduire G_{X_n} et conclure sur la question de l'espérance de X_n.

Idée de correction : 1. Fixons $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$. Comment construire une permutation τ de l'ensemble $\{1, \dots, n+1\}$ ayant k cycles à supports disjoints à partir d'une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$?

- Ou bien $\tau(n+1) = n+1$, et dans ce cas le cycle dans lequel est $n+1$ est réduit à $(n+1)$, et on peut choisir n'importe quelle permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ ayant $k-1$ cycles pour compléter ($k-1$ car $(n+1)$ forme déjà un cycle). C'est ce qui donne le terme $c_{n,k-1}$ dans la formule de récurrence.
- Ou bien $\tau(n+1) = j \in [\![1, n]\!]$, et dans ce cas il y a n choix possibles pour la valeur de j. Une fois fixée la valeur de j, tout se passe comme si on ajoutait $n+1$ à gauche de j dans l'écriture en décomposition en produit de cycles à supports disjoints d'une permutation de $\{1, \dots, n\}$ ayant k cycles.

Une reformulation : pour fabriquer une permutation de $[\![1, n+1]\!]$ à k cycles, soit on part d'une permutation de $[\![1, n]\!]$ à $k-1$ cycles, et on rajoute un cycle trivial $(n+1)$, soit on part d'une permutation de $[\![1, n]\!]$ qui a déjà k cycles, et on choisit où l'on intercale le $n+1$. Dans ce dernier cas, il n'est pas difficile de se convaincre qu'on a n possibilités pour où on intercale le $n+1$.

On obtient ainsi la formule de récurrence annoncée.

2. Puisque σ_n suit la loi uniforme sur $\mathfrak{S}_n$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $\mathbf{P}(X_n = k) = \frac{c_{n,k}}{n!}$. On en déduit que pour tout $t \in \mathbf{R}$ (ici, les fonctions génératrices sont des polynômes comme on travaille avec des variables aléatoires qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs) :

$$\begin{aligned}
G_{X_{n+1}}(t) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_{n+1,k}}{(n+1)!} t^k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_{n,k-1} + nc_{n,k}}{(n+1)!} t^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_{n,k-1}}{(n+1)!} t^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{nc_{n,k}}{(n+1)!} t^k \\
&= \frac{t}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_{n,k-1}}{n!} t^{k-1} + \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{c_{n,k}}{n!} t^k
\end{aligned}$$

En remarquant que $c_{n,n+1} = 0$ (il n'y a pas de permutation de $[\![1, n]\!]$ ayant $n+1$ cycles) et que $c_{n,0} = 0$, puis en réindexant la première somme, on obtient : $G_{X_{n+1}}(t) = \frac{t+n}{n+1} G_{X_n}(t)$

3. On déduit facilement de la question précédente que pour tout $n \geqslant 1$, et tout $t \in \mathbf{R}$,

$$G_{X_n}(t) = \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}$$

On calcule ensuite la dérivée en 1 pour obtenir l'espérance (résultat du cours, ici on n'a pas à faire attention pour des questions de dérivée à gauche, car notre fonction génératrice est un polynôme). On trouve

$$\mathbf{E}(X_n) = G'_{X_n}(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =: H_n$$

En particulier, on a $\mathbf{E}(X_n) \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers l'infini.

□

Exercice 61 (Mines-Ponts) **:** 1. Soit $E := \{1, \dots, n\}$. Quel est le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E)$ tels que $A \subseteq B$?

2. Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on pioche une poignée de boules (i.e. on pioche une partie de $\{1, \dots, n\}$ suivant la loi uniforme sur les parties de $\{1, \dots, n\}$, en particulier, on peut ne piocher aucune boule). Puis, on remet les boules dans l'urne, et on effectue une deuxième pioche de la même manière. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune boule en commun entre les deux pioches ?

Idée de correction : 1. Pour fabriquer un tel couple (A, B), il faut et il suffit de choisir le cardinal de la partie A, disons k, puis de choisir la partie A (choix de k éléments dans un ensemble à n éléments), puis ensuite on choisit B commme étant n'importe quelle partie de $E \setminus A$, il y a 2^{n-k} telles parties. Finalement, le cardinal cherché est :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$$

2. Notons X la variable aléatoire renvoyant le résultat de la première pioche, et Y celle renvoyant le résultat de la deuxième pioche. Alors X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes (enfin, c'est une hypothèse que l'on fait, mais qui semble raisonnable vu l'expérience décrite), suivant toutes deux la loi uniforme sur $\mathscr{P}(\{1, \dots, n\})$ (l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$).

On en déduit que (X, Y^c) suit la loi uniforme sur $\mathscr{P}(\{1, \dots, n\}) \times \mathscr{P}(\{1, \dots, n\})$, et donc :

$$\mathbf{P}(X \cap Y = \emptyset) = \mathbf{P}(X \subset Y^c) = \frac{\text{le résultat de la première question}}{\text{le cardinal de } \mathscr{P}(\{1, \dots, n\}) \times \mathscr{P}(\{1, \dots, n\})}$$

On trouve que la probabilité cherchée est $\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

□

Exercice 62 (Mines-Ponts) **:**
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose qu'il existe $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (mesurable je suppose, même si l'énoncé ne précise pas comme c'est un mot hors-programme) telle que $Y = f(X)$. Que dire de Y ?

Idée de correction : Comme Y est indépendante de X, elle est aussi indépendante de $f(X)$ (lemme des coalitions), mais comme $f(X) = Y$, on en déduit que Y est indépendante d'elle même. Nous allons montrer que ceci implique que Y est presque-sûrement constante. Pour cela, on utilise le fait que Y

est une variable aléatoire réelle, et on introduit sa fonction de répartition F_Y, définie pour tout $y \in \mathbf{R}$ par

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leqslant y)$$

Quelques propriétés très classiques des fonctions de répartition (que vous pouvez montrer en exercice, ce sont des applications directes du cours, notamment des propriétés de continuité croissante / décroissante) : F_Y est croissante, continue à droite avec une limite à gauche en tout point, tend vers 1 en $+\infty$ et vers 0 en $-\infty$.

Ici, en utilisant le fait que Y est indépendante d'elle même, on a : pour tout $y \in \mathbf{R}$,

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leqslant y) = \mathbf{P}(Y \leqslant y, Y \leqslant y) = \mathbf{P}(Y \leqslant y)^2 = F_Y(y)^2$$

Donc $F_Y(y)$ est un réel, racine du polynôme $X^2 - X$, donc $F_Y(y) \in \{0, 1\}$. En combinant cela avec les propriétés classiques des fonctions de répartition rappelées au-dessus, on en déduit que F_Y est de la forme

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < a \\ 1 \text{ si } y \geqslant a \end{cases}$$

Pour un certain $a \in \mathbf{R}$, et cela nous dit précisément que Y est presque-sûrement constante égale à a. $\square$