## 1. Théorème de Cartan

On notera $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ selon le contexte.

***Lemme 1.1.*** — *Soit $H \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe fermé. Alors,*

$$\mathfrak{h} = \left\{ X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : \forall t \in \mathbb{R},\ e^{t \cdot X} \in H \right\},$$

*est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. On l'appelle l'algèbre de Lie du groupe $H$.*

***Théorème 1.2.*** — *Un sous-groupe fermé $H \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

*Démonstration.* — Soit $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application,

$$\varphi : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ X + Y \mapsto e^X e^Y.$$

Alors $\varphi : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $\varphi(0) = I_n$, $(d\varphi)_0 = I_n$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $U \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ de $X = 0$ et un voisinage $V \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $I_n$ tel que la restriction $\varphi_U$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $U \simeq V$. Par définition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, on a $\varphi_U(\mathfrak{h}) \subseteq H$ donc $\varphi_U(\mathfrak{h} \cap U) \subseteq H \cap V$. Il s'agit maintenant de restreindre $U$ et $V$ de sorte que l'égalité ait lieu. Notons que si $h \in H \cap V$, il existe un unique $X + Y \in U$ tel que $e^X e^Y = h$, donc par conséquent $e^Y = e^{-X} h$ est un élément de $H$. D'où l'intérêt du lemme suivant.

***Lemme 1.3.*** — *Soit $\mathcal{A}_0 = \left\{ Y \in \mathfrak{m} : e^Y \in H \right\}$. Alors $\{0\}$ est isolé dans $\mathcal{A}_0$, c'est à dire qu'il existe un ouvert $W \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{A}_0 \cap W = \{0\}$.*

*Démonstration.* — Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors une suite $\{Y_k\}_k$ d'éléments non nuls de $\mathcal{A}_0$ telle que $\lim_{k\to\infty} Y_k = 0$ avec $h_k = \exp(Y_{n_k})$ dans $H$. Considérons alors $\alpha_k = Y_k / \|Y_k\|$. Par compacité de la sphère unité de $\mathfrak{m}$, il existe $\alpha \in \mathfrak{m}$ tel que $\|\alpha\| = 1$ et une sous-suite $\{\alpha_{n_k}\}$ telle que $\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha$. On va montrer que $\alpha \in \mathfrak{h}$ et ainsi conclure (car $\alpha = 0$ et $\|\alpha\| = 1$ sont contradictoires). Soit $t \in \mathbb{R}$ et posons $t \|Y_{n_k}\|^{-1} = \nu_k + \mu_k$ avec $\nu_k \in \mathbb{Z}$ et $|\mu_k| < 1/2$, de sorte que $\alpha_{n_k} t = \nu_k Y_{n_k} + \mu_k Y_{n_k}$. On a alors, puisque $\nu_k Y_{n_k}$ et $\mu_k Y_{n_k}$ commutent,

$$e^{\alpha t} = \lim_{k\to\infty} e^{\nu_k Y_{n_k}} e^{\mu_k Y_{n_k}}.$$

Mais $\lim_{k\to\infty} \exp(\mu_k Y_{n_k}) = I_n$ car $\{\mu_k\}$ est bornée et que $Y_{n_k}$ converge vers $Y = 0$. En particulier, l'élément $g_k = \exp(\nu_k Y_{n_k})$ converge vers un élément $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Mais puisque $\nu_k \in \mathbb{Z}$ et que $g_k = h_{n_k}^k$, on a $g_k \in H$ pour tout $k$ et puisque $H$ est fermé, on a $g \in H$. Celà conclut puisque $g = e^{\alpha t}$. $\square$

Il ne reste plus qu'à choisir $U' = U \cap W$ et $V' = \varphi(U')$. D'après les remarques précédentes, on a bien $\varphi(\mathfrak{h} \cap U') = H \cap V'$. On transporte cette structure en tout point $h \in H$ puisque les translations par des éléments de $H$ sont des difféomorphismes. $\square$