Chapitre 15
Analyse asymptotique

Table des matières

Vidal AGNIEL

Nous abordons de nouveaux objets en analyse : les comparaisons $(o, O, \sim)$ et les développements limités.
Ces outils permettent d'étudier localement une fonction (au voisinage d'un point a, ou bien lorsque x tend vers $+\infty/-\infty$) ou une suite (lorsque $n \to +\infty$), avec plus de précision que ce que vous connaissez déjà.
Par exemple, cela permet de lever les formes indéterminées pour les suites.
L'idée repose sur le fait qu'une fonction f "régulière" (continue et suffisamment dérivable) peut être approchée par une fonction polynômiale au voisinage d'un point a (sur un intervalle contenant a aussi petit que l'on veut). Cela généralise la notion de dérivée, qui consiste à approcher f en a par un polynôme de degré 1 (par $x \mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$).
Le but de ce chapitre est de savoir calculer des équivalents et des développements limités. C'est un but assez technique.

1 Suites négligeables, suites équivalentes

Pour ce faire, commençons par le cas des suites.

Définition 1 (**Suite négligeable**)
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}$ des suites réelles , avec $(v_n)_{n\geq n_0}$ qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
*On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **négligeable** par rapport à $(v_n)_{n\geq n_0}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.*
On le note $u_n = o(v_n)$. On le prononce "u_n est un petit o de v_n."

Remarque 2 —
- *Dire que $u_n = o(1)$ revient à dire que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 0.*
- ***Attention !** Beaucoup de suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ sont des $o(v_n)$. Cette notation ne désigne pas une unique suite. Dans des calculs, si vous voyez plusieurs $o(v_n)$ apparaître, ils désignent des suites qui sont à priori différentes. Par exemple, $n = o(n^2)$ et $n+2 = o(n^2)$.*
- ***Attention !** Chaque $o(v_n)$ désigne le terme général d'une certaine suite $(u_n)_{n\geq n_0}$. A n fixé, c'est le terme d'une suite (donc un nombre réel dont on ne connaît pas la valeur précise).*
- ***Attention !** Il faut que la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ soit non-nulle à partir d'un certain rang. Cela est absolument nécessaire (on ne divise pas par 0). La notion de $o(0)$ n'a pas de sens.*
- *On cherche souvent à utiliser une suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ dont l'expression est très simple $(n, n^2, n^k, \frac{1}{n}, \ln(n), \ldots)$. Par exemple, si on a $u_n = o(2n^2+1)$, alors on a en fait $u_n = o(n^2)$ (cela est équivalent, et plus clair). Ce qui est important est l'ordre de grandeur de la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ (le terme dominant).*
- *Les égalités faisant intervenir les o sont de vraies égalités, et on peut faire du calcul algébrique avec.*
  Addition : Pour $u_n = n + n^{\frac{1}{3}}$, on a $u_n - n = o(\sqrt{n})$. On peut aussi écrire $u_n = n + o(\sqrt{n})$. On a de même $u_n - n = o(n)$, d'où $u_n = n + o(n)$.
  Multiplication : Pour $u_n = \sqrt{n}$ on a $u_n = o(n)$. On peut aussi écrire $u_n = n.o(1)$. (la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est égale à la suite $(n)_n$ multipliée par une suite qui tend vers 0)

Proposition 3 (**Règles de calcul sur la négligeabilité**)
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}, (w_n)_{n\geq n_0}, (t_n)_{n\geq n_0}$ des suites réelles, avec $(v_n)_{n\geq n_0}, (t_n)_{n\geq n_0}$ qui sont non-nulles à partir d'un certain rang. On a :
- *Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$, alors $u_n + w_n = o(v_n)$. (Addition de o)*
- *Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$. (Multiplication de o)*
- *En particulier, si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = v_n.o(1)$.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$.*

Démonstration — On écrit la définition de négligeabilité, et on vérifie chaque cas. □

Remarque 4 — *La première propriété donne des calculs comme : $o(n) + o(n) = o(n)$. Et la deuxième donne du : $\lambda.o(n) = o(n)$.*
Cela peut sembler perturbant, mais il faut bien prendre conscience que $o(n)$ désigne une suite dont on ne connaît pas les valeurs (sa seule propriété est d'être négligeable devant n). Chaque $o(n)$ dans l'expression désigne une suite différente.
Une fois ces règles comprises, le symbole du o permet de faire des calculs d'approximations de façon très souple et efficace.

Définition 5 (**Suites équivalentes**)
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles, qui sont non-nulles à partir d'un certain rang.
*On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont **équivalentes** si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.*
On le note $u_n \sim v_n$.
Cela se lit "u_n est équivalent à v_n, quand n tend vers $+\infty$".

Proposition 6
Deux suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont équivalentes si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$, si et seulement si $u_n - v_n = o(u_n)$.

Remarque 7 —
- ***Attention !** La relation d'équivalence n'est vraie que pour les suites non-nulles à partir d'un certain rang. Dire que $u_n \sim 0$ n'a pas de sens.*
  Alors ne l'écrivez jamais. (Si vous voulez dire que $(u_n)_{n\geq n_0}$ a une limite nulle, écrivez $u_n = o(1)$).
- *Si k est un réel non nul, dire que $u_n \sim k$ est équivalent à dire que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers k. Cela revient aussi à dire que $u_n - k = o(k) = o(1)$.*
- *Si deux suites sont équivalentes, et qu'elles convergent ou divergent en l'infini, alors leurs limites sont égales.*
- *La notion d'équivalence permet d'étudier le comportement limite d'une suite (convergence, divergence, vitesse de croissance) en simplifiant son expression.*
  Par exemple, $2n^3 - 10n + \pi^2 \sim 2n^3$. (On ne garde que le terme dominant)

Proposition 8 (**Règles de calcul d'équivalences**)
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}, (w_n)_{n\geq n_0}, (t_n)_{n\geq n_0}$ des suites réelles qui sont non-nulles à partir d'un certain rang. On a :
- *Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.*
- *Si $u_n \sim v_n$, alors $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.*
- *Si $u_n \sim v_n$, et si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont positives, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.*

Démonstration —Admis.

Remarque 9 — ***Attention !** On ne peut pas additionner des équivalents en général.*
C'est une source d'erreur fréquente, qui aboutit souvent à $u_n \sim 0$.
Par exemple $n^2 + n \sim n^2$, et $-n^2 - 3 \sim -n^2$, mais la somme vaut d'un côté $n - 3$ et de l'autre 0.
***Attention !** On ne peut pas composer en général un équivalent par une fonction f.*
Par exemple, on a bien $n^2 + n \sim n^2$, mais $e^{n^2+n} \not\sim e^{n^2}$ (le quotient de ces deux suites est égal à e^n, qui tend vers $+\infty$).
Pour utiliser des sommes et des composées, il faudra manipuler des o.

Exemples : Grâce aux propriétés de l'équivalence sur le produit et le quotient, on peut déjà obtenir quelques calculs rapides de limites.
Par exemple, on a $\dfrac{n^2 + \sqrt{n} + 1}{e^n - n^4} \sim \dfrac{n^2}{e^n}$.

On sait ainsi que ce quotient converge vers 0 grâce aux croissances comparées.

DÉFINITION 10 (**Suite majorée en ordre de grandeur**)
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}$ des suites réelles.
*On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **majorée en ordre de grandeur** par $(v_n)_{n\geq n_0}$ s'il existe $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M|v_n|$.*
On le note $u_n = O(v_n)$. Cela se lit "u_n est un grand O de v_n".

REMARQUE 11 — *Cette notion différente du o a son intérêt (en informatique par exemple). On l'utilise moins en mathématiques en PTSI-PT.*

2 Fonctions négligeables, fonctions équivalentes (au voisinage d'un point/de l'infini)

Nous allons reprendre le concept de négligeabilité et d'équivalence pour les fontions. Dans le cas des suites, cela est toujours lorsque n tend vers $+\infty$. Pour les fonctions, ce sera lorsque x tend vers a (pour a un réel) ou bien vers $+\infty/-\infty$. La valeur vers laquelle tend x est une donnée en plus qui est indispensable.

Pour I un intervalle, a un élément qui est dans I ou aux extrémités de I (on autorise $\pm\infty$), et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction, on dit que g ne s'annule pas **sur un voisinage de** a s'il existe un intervalle J plus petit (éventuellement très très petit), qui contient a ou tel que a est une extrémité, pour lequel, $\forall x \in J$, on a $g(x) \neq 0$.

DÉFINITION 12 (**Fonction négligeable**)
Soient I un intervalle et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ qui est dans I ou aux extrémités de I. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, avec g qui ne s'annule pas sur un voisinage de a.
*On dit que la fonction f est **négligeable** par rapport à g quand x tend vers a, si $\lim\limits_{x\to a,\, x\in I} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.*
On le note $f(x) = o(g(x))$. On le prononce "$f(x)$ est un petit o de $f(x)$, quand x tend vers a."

Dans le reste du chapitre, pour les fonctions, on prendra toujours I un intervalle et $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ qui est dans I ou aux extrémités de I.
Et les fonctions $f, g, h, \ldots$ seront définies sur I (ou parfois sur $I \setminus \{a\}$).

REMARQUE 13 —
- *Dire que $f(x) = o(1)$ revient à dire que $f(x)$ tend vers 0 quand $x \to a$.*
- ***Attention !** Beaucoup de fonctions $f(x)$ sont des $o(g(x))$. Cette notation ne désigne pas une unique fonction. Dans des calculs, si vous voyez plusieurs $o(g(x))$ apparaître, ils désignent des fonctions qui sont à priori différentes. Par exemple, $x = o(x^2)$ et $x + 2 = o(x^2)$, quand $x \to +\infty$.*
- ***Attention !** Quand on écrit des $o(g(x))$, c'est pour x tendant vers un élément a fixé (un réel ou bien $\pm\infty$).*
  Les relations peuvent changer suivant la valeur de a.
  Par exemple, on a $x^2 = o(x)$ et $x^2 = o(x + 2)$ quand $x \to 0$. (c'est le contraire pour $x \to +\infty$)
- ***Attention !** Il faut que la fonction $g(x)$ soit non-nulle sur un voisinage de a. Cela est absolument nécessaire (on ne divise pas par 0). La notion de $o(0)$ n'a pas de sens.*
- *On cherche souvent à utiliser une fonction $g(x)$ dont l'expression est très simple $(x, x^2, x^k, \frac{1}{x}, \ln(x), \ldots)$.*
  Par exemple, si on a $f(x) = o(2x^2+1)$, alors on a en fait $f(x) = o(x^2)$. Ce qui est important est l'ordre de grandeur de la fonction $g(x)$ (le terme dominant).
- *Les égalités faisant intervenir les o sont de vraies égalités, et on peut faire du calcul algébrique avec.*
  Addition : Pour $f(x) = x + x^{\frac{1}{3}}$, et $a = +\infty$, on a $f(x) - x = o(\sqrt{x})$. On peut aussi écrire

$f(x) = x + o(\sqrt{x})$. On a de même $f(x) - x = o(x)$, d'où $f(x) = x + o(x)$.
Multiplication : Pour $f(x) = \sqrt{n}$ et $a = +\infty$, on a $f(x) = o(x)$. On peut aussi écrire $f(x) = x.o(1)$. (la fonction f est égale à la fonction $x \mapsto x$ multipliée par une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$)

PROPOSITION 14 (**Règles de calcul sur la négligeabilité**)
Soient $f, g, h, t : I \to \mathbb{R}$ des fonctions, avec g, t qui sont non-nulles sur un voisinage de a. On a :
- *Si $f(x) = o(g(x))$ et $h(x) = o(g(x))$, alors $f(x) + h(x) = o(g(x))$. (Addition de o)*
- *Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x)h(x) = o(g(x)h(x))$. (Multiplication de o)*
- *En particulier, si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) = g(x).o(1)$.*
- *Si $f(x) = o(g(x))$ et $h(x) = o(t(x))$ alors $f(x)h(x) = o(g(x)t(x))$.*

Démonstration — On écrit la définition de négligeabilité, et on vérifie chaque cas. □

REMARQUE 15 — *La première propriété donne des calculs comme : $o(x) + o(x) = o(x)$. Et la deuxième donne du : $\lambda.o(x) = o(x)$.*
Cela peut sembler perturbant, mais il faut bien prendre conscience que $o(x)$ désigne une fonction dont on ne connaît pas les valeurs (sa seule propriété est d'être négligeable devant x, quand x tend vers a). Chaque $o(x)$ dans l'expression désigne une fonction différente.
Une fois ces règles comprises, le symbole du o permet de faire des calculs d'approximations de façon très souple et efficace.

DÉFINITION 16 (**fonctions équivalentes**)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions, qui sont non-nulles sur un voisinage de a.
*On dit que $f(x)$ et $g(x)$ sont **équivalentes** si $\lim\limits_{x\to a, x\in I} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.*
On le note $f(x) \sim_a g(x)$.
Cela se lit "$f(x)$ est équivalent à $g(x)$, quand x tend vers a".

PROPOSITION 17
Deux fonctions f et g sont équivalentes en a si et seulement si $f(x) - g(x) = o(g(x))$ pour $x \to a$, si et seulement si $f(x) - g(x) = o(f(x))$ pour $x \to a$.

REMARQUE 18 —
- ***Attention !*** *La relation d'équivalence n'est vraie que pour les fonctions non-nulles sur un voisinage de a. Dire que $f(x) \sim_a 0$ <u>n'a pas de sens</u>.*
  Alors ne l'écrivez jamais. (Si vous voulez dire que $f(x)$ a une limite nulle, écrivez $f(x) = o(1)$).
- *Si k est un réel non nul, dire que $f(x) \sim_a k$ est équivalent à dire que $f(x)$ converge vers k pour $x \to a$. Cela revient aussi à dire que $f(x) - k = o(k) = o(1)$.*
- *Si deux fonctions sont équivalentes en a et ont une limite a, alors leurs limites sont égales.*
- *La notion d'équivalence permet d'étudier le comportement limite d'une fonction (convergence, divergence, vitesse de croissance) en simplifiant son expression.*
  Par exemple, $2x^3 - 10x + \pi^2 \sim_{+\infty} 2x^3$.

PROPOSITION 19 (**Règles de calcul d'équivalences**)
Soient $f, g, h, t : I \to \mathbb{R}$ des fonctions qui sont non-nulles sur un voisinage de a. On a :
- *Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $h(x) \sim_a t(x)$, alors $f(x)h(x) \sim_a g(x)t(x)$.*
- *Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \sim_a \dfrac{1}{g(x)}$.*
- *Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $f(x)^\alpha \sim_a g(x)^\alpha$.*

Démonstration —Admis.

Remarque 20 — ***Attention !*** *On ne peut pas additionner des équivalents en général.*
C'est une source d'erreur fréquente, qui aboutit souvent à $f(x) \sim_a 0$.
Par exemple $x^2 + x \sim_{-\infty} x^2$, *et* $-x^2 - 3 \sim_{-\infty} -x^2$, *mais la somme vaut d'un côté* $n-3$ *et de l'autre* 0.
Attention ! *On ne peut pas composer en général un équivalent par une fonction* j.
Par exemple, on a bien $x^2+x \sim_{-\infty} x^2$, *mais* $e^{x^2+x} \not\sim_{-\infty} e^{x^2}$ *(le quotient de ces deux fonctions est égal à* e^x, *qui tend vers* 0 *en* $-\infty$*).*
Pour utiliser des sommes et des composées, il faudra manipuler des o.

Voici un exemple pour vous rappeler que les techniques classiques sont absolument nécessaires pour s'aider dans les calculs :
Exemple :
$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{2}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})+\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Pour simplifier des expressions de suites/fonctions à l'aide de o, on utilise beaucoup les croissances comparées. On les rappelle donc.

3 Propriétés des comparaisons/équivalences

Proposition 21 (**Croissances comparées pour les suites**)
Soient $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.
- $\forall b > 0$, $\forall a > 0$, *on a* $(\ln n)^a = o(n^b)$.
  Le logarithme (et ses puissances) est négligeable devant le polynomial.
- *Si* $\alpha < \beta$, *on a* $n^\alpha = o(n^\beta)$.
  Le polynomial est négligeable devant du polynomial d'exposant plus grand.
- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, *on a* $n^b = o(a^n)$.
  Le polynomial est négligeable devant de la fonction puissance (croissance exponentielle).

Proposition 22 (**Croissances comparées pour les fonctions**)
Soient $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$. *Soit* x *qui tend vers* $+\infty$.
- $\forall b > 0$, $\forall a > 0$, *on a* $(\ln x)^a = o(x^b)$. *(logarithme-polynômial)*
- *Si* $\alpha < \beta$, *on a* $x^\alpha = o(x^\beta)$. *(polynômial-polynômial)*
- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, *on a* $x^b = o(a^x)$. *(polynômial-exponentiel)*

Corollaire 23
Une fonction polynômiale $x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_0$ *est équivalente à son terme de plus haut degré non-nul (à* $a_n x^n$, *si* $a_n \neq 0$*).*
On retrouve aussi des comparaisons que l'on utilise souvent :
- $x\ln(x) = o(1)$, *quand* $x \to 0^+$. *(Idem pour* $x^a \ln(x)^b$ *avec* $a > 0$.*)*
- *Pour tout* $n \geq 1$, *on a* $x^n e^{-x} = o(1)$ *quand* $x \to +\infty$.
- *Pour tous* $a > 0$ *et* $n \geq 1$, *on a* $x^n e^{ax} = o(1)$ *quand* $x \to -\infty$.

Proposition 24 (**Équivalents classiques**)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. *Alors :*
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$

Démonstration — Ces résultats viennent d'un résultat plus général :
Soit f est une fonction dérivable en 0, et $(u_n)_{n\geq n_0}$ qui tend vers 0. Alors $f(u_n) - f(0) \sim f'(0)u_n$.
Cette propriété est exactement équivalente au fait que le taux d'accroissement $\dfrac{f(u_n) - f(0)}{u_n - 0}$ a pour limite $f'(0)$ quand u_n tend vers 0 (ce qui est vrai). □

Le fait que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tende vers 0 est essentiel.
Ces approximations sont régulièrement utilisées en Physique et en SI (ex : approximation des petits angles).

4 Développements limités

Définition 25 (**Développement limité**)
Soient I un intervalle et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, (éventuellement pas définie en a). Soit $n \in \mathbb{N}$.
*On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** a s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré au plus n, tel que :*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

*Le polynôme P est alors appelé **partie polynômiale** du développement limité, et la fonction derrière $o(x-a)^n$ est le **reste** du développement limité.*
On abrège parfois développement limité à l'ordre n en a par $DL_n(a)$.

Remarque 26 — *Le principe d'un développement limité est de faire une approximation d'une fonction f par une fonction polynômiale. On peut ainsi étudier davantage f car les fonctions polynômiales se manipulent plus facilement.*
Cette approximation ne se fait qu'au voisinage d'un point a, et il faut de plus imposer un "degré" de précision. Si on change de point, la valeur de P change. Si on augmente le degré de précision, le polynôme P change aussi (voire n'existe pas).
Bien souvent, on réalisera un DL_n en 0.

Proposition 27
Soient I un intervalle, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ qui admet un $DL_n(a)$ (pour un $n \geq 0$).
Alors, la partie polynômiale du $DL_n(a)$ de f est unique.

Démonstration —Admis.

Corollaire 28
Soient I un intervalle contenant 0, et $f : I \to \mathbb{R}$ qui admet un $DL_n(0)$ (pour un $n \geq 0$).
Si f est une fonction paire, alors son $DL_n(0)$ ne contient que des puissances paires de x.
Si f est impaire, alors son $DL_n(0)$ ne contiendra que des puissances impaires de x.

Démonstration — Soit $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$ le $DL_n(0)$ de f.
Si f est paire, on a $f(-x) = f(x)$. C'est-à-dire

$$a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + o(x^n).$$

Par unicité de la partie polynômiale, on obtient que $-a_1 = a_1$,$-a_3 = a_3$,...
Ainsi, tous les coefficients de degré impair dans le $DL_n(0)$ de f sont nuls.
Si f est impaire, on a $f(-x) = -f(x)$. C'est-à-dire

$$a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_nx^n + o(x^n).$$

Par unicité de la partie polynômiale, on obtient que $a_1 = -a_0$,$a_2 = -a_2$,...
Ainsi, tous les coefficients de degré pair dans le $DL_n(0)$ de f sont nuls. □

Proposition 29
Si f admet un $DL_n(a)$, alors, pour tout entier $k \leq n$, f admet des $DL_k(a)$.
Pour $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ et $0 \leq k \leq q$, on a $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$.

Démonstration — Tous les termes $a_m(x-a)^m$, pour $k < m \leq n$, sont des $o((x-a)^k)$. De même, le $o((x-a)^n)$ est un $o((x-a)^k)$. Cela donne bien un $DL_k(a)$ de f. □

PROPOSITION 30
Soient I un intervalle, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. *f admet un DL_0 en a si et seulement si elle est continue en a.*
   Cela donne alors $f(x) = f(a) + o(1)$.
2. *f admet un DL_1 en a si et seulement si elle est dérivable en a.*
   Cela donne alors $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o((x-a))$.

Démonstration —On utilise les définitions de DL_0, DL_1, C^0, D^1 pour obtenir les équivalences.

REMARQUE 31 — *Pour f dérivable en a, on retrouve l'équation de la tangente à la courbe de f en a : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Une tangente c'est une approximation par un polynôme de degré 1.*

EXEMPLE 32 — *Pour $a = 0$, on a ainsi : $\cos(x) = 1+o(x)$, $\sin(x) = x+o(x)$, $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x+o(x)$, $\exp(x) = 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$.*
On retrouve les approximations faites en Physique et en SI.

4.1 Développement limité d'une primitive

PROPOSITION 33 (DL_n **et primitive**)
Soient I un intervalle, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit F une primitive de f sur I.
Si f admet un $DL_n(a)$, alors F admet un $DL_{n+1}(a)$.
Pour $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, on a

$$F(x) = F(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \frac{a_2}{3}(x-a)^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Démonstration —Pour $x \in I$ on pose $g(x) = f(x) - (a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n)$. Ainsi, g est continue, donc $G : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ existe. On a $G(x) = F(x) - F(a) - (a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \frac{a_2}{3}(x-a)^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1})$. Soit $\epsilon > 0$. Vu que $g(t) = o((t-a)^n)$ on a $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]a-\eta, a+\eta[$ on a $|\frac{g(t)}{(t-a)^n}| < \epsilon$, c'est-à-dire $-\epsilon(t-a)^n \leq g(t) \leq \epsilon(t-a)^n$. Pour $x \in]a-\eta, a+\eta[$ on obtient alors $-\epsilon\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \leq G(x) \leq \epsilon\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, donc $|\frac{G(x)}{(x-a)^{n+1}}| \leq \frac{\epsilon}{n+1} < \epsilon$. On obtient donc $G(x) = o((x-a)^{n+1})$, ce qui conclut. □

EXEMPLE 34 — *On peut obtenir de cette façon le DL_3 en 0 de $\ln(1+x)$ à partir du DL_2 en 0 de $\frac{1}{1+x}$, à partir du DL_1 en 0 de $\frac{-1}{(x+1)^2}$:*
On a $\frac{-1}{(1+x)^2} = -1 + 2x + o(x)$, donc $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} - x + x^2 + o(x^2)$,
donc $\ln(1+x) = \ln(1) + x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

4.2 Formule de Taylor-Young

Pour les développements limités, le théorème suivant permet d'obtenir des DL_n des fonctions usuelles.

THÉORÈME 35 (**Formule de Taylor-Young**)
Soient I un intervalle, $a \in I$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ($n \geq 0$).
Alors, on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ en a, alors f admet un DL_n en a, de partie polynômiale $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Démonstration — On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Si f est continue, elle possède alors un DL_0 en a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la formule vraie pour toute fonction de classe C^n sur I. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors, f' est de classe

C^n sur I et par hypothèse de récurrence on a $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^n$.

En intégrant ce développement limité, on obtient alors $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(x-a)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{k!}(x-a)^j + o(x-a)^{n+1}$, ce qui termine la récurrence. □

Cette formule complète les formules de Taylor. Ces trois formulent concernent la partie polynômiale du DL_n d'une fonction f : Taylor-Young fournit le $DL_n(a)$; Taylor reste intégral fournit une expression exacte de l'erreur d'approximation du $DL_n(a)$; Taylor-Lagrange fournit une majoration simple de cette erreur d'approximation.
Ainsi, chaque formule de Taylor a son intérêt.

4.3 Développements limités de fonctions usuelles

A l'aide de la formule de Taylor-Young, on en déduit que toute fonction dérivable (un certain nombre de fois) sur un intervalle possède un développement limité (à un certain ordre) en tout point de cet intervalle. Cela s'applique en particulier à toutes les fonctions usuelles, qui sont toutes de classe C^∞ sur leur domaine de définition (sauf éventuellement aux extrémités).
On s'intéressera en particulier aux DL_n en 0.

THÉORÈME 36
Toutes les fonctions usuelles admettent des DL pour tout ordre n en 0, donnés par les formules suivantes :

— $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

— $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

— $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

— $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

— $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$ $(DL_{2n+1}(0))$

— $sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$ $(DL_{2n}(0))$

— $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$ $(DL_{2n+1}(0))$

— $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$ $(DL_{2n}(0))$

— $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3$
$+ \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$ *(pour $\alpha \in \mathbb{R}$ un réel).*

Démonstration — Toutes ces formules découlent immédiatement de la formule de Taylor-Young, mais on peut éviter certains calculs.
La troisième est obtenue à partir de la deuxième en remplaçant x par $-x$.
Le DL des fonctions ch, sh découle immédiatement de leur expression : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Pour la dernière formule, en posant $f(x) = (1+x)^\alpha$ on a $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, et ,par récurrence, on obtient $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ pour tout entier n. □

Remarque 37 — *Ces développements limités sont à connaître **par coeur**.*
Ces DL permettent de calculer des DL pour toutes les fonctions que vous rencontrerez. Par exemple, avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtielt les premiers termes du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$. Si jamais vous oubliez un terme, faites quelques calculs de dérivée (pour $n = 2, 3, 4$) pour les retrouver.

5 Opérations sur les développements limités

5.1 Somme et produit de développements limités

Proposition 38
Soient I un intervalle, $a \in I$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonction admettant des $DL_n(a)$. $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$, $g(x) = Q(x-a) + o((x-a)^n)$. Alors :

1. *$f+g$ admet un $DL_n(a)$: $f(x)+g(x) = P(x-a) + Q(x-a) + o((x-a)^n)$.*
2. *$f.g$ admet un $DL_n(a)$ dont la partie polynômiale est la troncature au degré n de $P(x-a).Q(x-a)$.*

Démonstration —Admis.

Exemple 39 — *(DL de somme) Le DL_5 de la fonction $x \mapsto e^x + \cos(x)$ en 0 est $e^x + \cos(x) = 2 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$.*

Exemple 40 — *(DL de produit) En pratique, on développe le produit des polynômes selon les puissances de x : d'abord les coefficients constants, puis les coefficients devant $x-a$, puis ceux devant $(x-a)^2$, ..., jusqu'à ceux devant $(x-a)^n$.*
Ainsi, le DL_5 en 0 de la fonction $x \mapsto e^x.\cos(x)$ est

$$\begin{aligned}
e^x\cos(x) &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)\\
&= 1.1\\
&\quad + x(1.(-1)+0)\\
&\quad + x^2(1.\frac{-1}{2} + 0 + \frac{1}{2}.1)\\
&\quad + x^3(0 + 1.\frac{-1}{2} + \frac{1}{6}.1)\\
&\quad + x^4(1.\frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{2}.\frac{-1}{2} + 0 + \frac{1}{24}.1)\\
&\quad + x^5(0 + 1.\frac{1}{24} + 0 + \frac{1}{6}.\frac{-1}{2} + 0 + \frac{1}{120}.1)\\
&\quad + o(x^5)\\
&= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

5.2 Ramener un développement limité en 0

Proposition 41 (**Passer d'un $DL_n(a)$ à un $DL_n(0)$**)
Soient I un intervalle, $a \in I$, $f : I \to J$, qui admet un DL_n en a, $f(x) = f(a) + a_1(x-a) + \dots +$

$a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$.
Alors la fonction $u \mapsto f(a+u)$ admet un DL_n en 0, qui est :

$$f(a+u) = f(a) + a_1 u + \ldots + a_n u^n + o(u^n).$$

Démonstration — On pose $u = x-a$, c'est-à-dire $x = a+u$. Quand x tend vers a, on a u qui tend vers 0. □

En pratique, on fait en général des DL_n en 0 car ils sont plus simples à exprimer (on a des u^k au lieu des $(x-a)^k$), et car il est très simple de s'y ramener.

5.3 Composée de développements limités

Méthode 42 (**Calculer le $DL_n(a)$ d'une composée**)
Soient I, J des intervalles, $a \in I$, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet un DL_n en a, $f(x) = f(a) + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, et que g admet un DL_n en $f(a)$, $g(x) = g(f(a)) + b_1(x-f(a)) + \ldots + b_n(x-f(a))^n + o((x-f(a))^n)$.
Alors $g \circ f$ admet un DL_n en a.
Pour le calculer, on écrit $g(f(x)) = g(f(a)+a_1(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+o((x-a)^n)) = g(f(a)+u)$.
La quantité u tend bien vers 0 quand x tend vers a, donc le $DL_n(0)$ est possible.
Puis, on écrit le DL_n de $g(f(a)+u)$: $g(f(a)+u) = g(f(a)) + b_1 u + \ldots + b_n u^n + o(u^n)$.
Ensuite, on développe les produits $u, u^2, u^3, \ldots, u^n$ pour trouver une expression polynômiale en fonction de $1, (x-a), (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ (et avec un $o((x-a)^n)$).
Enfin, on remplace les développements de $u, u^2, \ldots, u^n$ dans le DL_n de $g(f(a)+u)$. Cela fournit le DL_n de $g \circ f$ en a.

Parfois, pour calculer le DL_n de $g \circ f$, il suffit de calculer un DL_m de g ou de f avec $m < n$. Cela dépend de l'expression de u (il faut voir quel $(x-a)^k$ est équivalent à u).
La méthode pour le calcul du DL d'une composée paraît longue car il faut faire un changement de variable, puis développer chaque $u, u^2, u^3, \ldots, u^n$, mais en pratique elle n'est souvent pas très longue. Les DL que l'on cherche à calculer sont pour des valeurs de n raisonnables $(3, 4, 5, 6)$, et une partie des coefficients est souvent nulle (c'est le cas si f ou g est paire/impaire, par exemple).

Exemple 43 — *(DL d'une composée) Calculons le $DL_5(0)$ de $x \mapsto e^{\cos(x)}$, via le DL_5 de exp et de cos.*
On a $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) = 1+u$.
Ainsi, $e^{\cos(x)} = e^{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)} = e^{1+u} = e \times e^u$.
On a $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$, donc $u \sim_0 \frac{-1}{2}x^2$. Comme u tend vers 0 quand x tend vers 0, on peut appliquer un DL en 0 de exp.
Comme $u \sim_0 \frac{-1}{2}x^2$, on réalise un DL_2. Cela suffit car on a $u^3 \sim_0 \frac{-1}{8}x^6$, qui est un $o(x^5)$.
On obtient ainsi : $e^{\cos(x)} = e.\left(1 + u + \dfrac{1}{2}u^2 + o(x^5)\right)$
On calcule un DL_5 en 0 de u^2 (DL d'un produit) : $u^2 = x^4(\frac{-1}{2}.\frac{-1}{2}) + x^5.0 + o(x^5)$.
Cela donne ainsi : $e^{\cos(x)} = e\left(1 + (-\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 + o(x^5)) + (\dfrac{1}{8}x^4 + o(x^5)) + o(x^5)\right) = e - \dfrac{e}{2}x^2 + \dfrac{e}{6}x^4 + o(x^5)$.

5.4 Quotient de développements limités

Méthode 44 (**Calcul du DL_n d'un quotient**)
Soient I, J des intervalles, $a \in I$, et $f, g : I \to J$ qui ont un DL_n en a, avec $g(a) \neq 0$.
Alors, la fonction $\frac{f}{g}$ est bien définie sur un voisinage de a, et admet un DL_n en a.
Pour calculer ce DL_n, on procède par étapes.
On écrit $g(x) = g(a) + b_1(x-a) + \ldots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n) = g(a)(1+u)$.
Quand x tend vers a, on a u qui tend vers 0.
On a $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(a)}\frac{1}{1+u}$.

On écrit le DL_n en 0 de $\frac{1}{1+u}$: $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \ldots + (-1)^n u^n + o(u^n)$.
On développe chaque terme $u, u^2, u^3, \ldots, u^n$ pour obtenir des polynômes en $1, (x-a), \ldots, (x-a)^n$.
On remplace ces termes dans le DL_n de $\frac{1}{1+u}$.
Enfin, on a $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(a)} . \frac{1}{1+u}$. On obtient le DL_n de $\frac{g}{f}$ en faisant le produit des DL_n de f et de $\frac{1}{1+u}$.

Exemple 45 — *(DL d'un quotient) Calculons le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \dfrac{e^x}{\cos(x)}$.*
On commence par écrire $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)} = \frac{1}{1+u}$, avec $u = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4$.
On a $u \sim_0 \frac{-1}{2}x^2$, alors on réalise un DL_2 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ (le terme u^3 est un $o(x^5)$, cela ne sert à rien de l'écrire).
On a : $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 - u + u^2 + o(x^5)$.
On développe u^2 : $u^2 = x^4(\frac{-1}{2}.\frac{-1}{2}) + 0 + o(x^5)$.
On remplace : $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{24x^4} + \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^5) = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^5)$.
Il ne reste plus qu'à faire le produit par l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{\cos(x)} &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right) \\
&= 1.1 \\
&\quad + x(1.1 + 0) \\
&\quad + x^2(1.\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}.1) \\
&\quad + x^3(1.\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{6}.1) \\
&\quad + x^4(1.\frac{1}{24} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{24}.1) \\
&\quad + x^5(1.\frac{5}{24} + 0 + \frac{1}{6}.\frac{1}{2} + \frac{1}{120}.1) \\
&\quad + o(x^5) \\
&= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{10}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Exemple 46 — *Pour une même fonction f, on a ainsi plusieurs méthodes possibles pour calculer un $DL_n(a)$.*
Voici trois méthodes différentes pour calculer le $DL_5(0)$ de la fonction tangente.

1. *Faire le DL du quotient $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.*
   On a déjà vu plus haut que $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + o(x^5)$, il ne reste plus quà faire le produit : $\tan(x) = \left(x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5\right) \times \left(1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4\right) + o(x^5) = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{12}x^5 + \dfrac{5}{24}x^5 + o(x^5) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.
2. *Partir de $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, et intégrer un DL_4.*
   On part de $\dfrac{1}{\cos^2(x)} = \left(1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4\right)^2 + o(x^4) = 1 + \dfrac{1}{4}x^4 + x^2 + \dfrac{5}{12}x^4 + o(x^4) = 1 + x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$. Comme $\tan(0) = 0$, l'intégration donne $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

3. *Calculer les dérivées successives de* $\tan$, *en* 0.
On sait que la fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ *et impaire. Donc, elle admet un* $DL_5(0)$ *de la forme* $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$ *(les coefficients d'ordre pair sont nuls).*
On sait de plus que $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.
On dérive alors 4 *fois de plus, puis on évalue en* 0 *(*$\tan(0) = 0$*), pour obtenir :* $a = 1$, $b = \dfrac{1}{3}$, *et enfin* $c = \dfrac{2}{15}$.
Ces trois méthodes donnent le même résultat.

MÉTHODE 47 (**Méthodes pour calculer un** DL_n)
Voici toutes les méthodes que nous avons vues pour calculer un $DL_n(a)$ *d'une fonction* f *:*

1. *Si* f *est de classe* C^n, *calculer les dérivées* $f', f'', \dots, f^{(n)}$, *puis calculer leur valeur en* a.
Cette méthode est quasiment toujours utilisable, mais est très vite trop lente (beaucoup de termes apparaissent en dérivant). En général, si $n > 3$, *on n'utilise pas cette méthode.*
2. *Si* $f = g + h$, *calculer un* DL_n *de* g, *un* DL_n *de* h, *et faire la somme des* DL.
Très rapide, on l'utilise souvent pour des petits calculs.
3. *Si* $f = g.h$, *calculer un* DL_n *de* g, *un* DL_n *de* h, *et faire le produit des* DL.
Convenable, utilisable souvent.
4. *Si* $f = g \circ h$, *calculer un* DL_n *de* h, *un* DL_n *de* h, *et faire la composée des* DL.
Un peu plus lente : il faut poser $h(x) = h(a) + u$, *et calculer le* DL *de* $u^2, u^3, \dots, u^n$ *(plusieurs produits de* DL *à faire).*
5. *Si* $f = \frac{g}{h}$, *calculer un* DL_n *de* g, *un* DL_n *de* h, *et faire le quotient* DL.
Aussi lente que la précédente : Il faut calculer le DL_n *de* h *composée avec* $\frac{1}{1+x}$, *puis le produit avec la fonction* g. *Il y a plusieurs produits de* DL *à faire.*
6. *Si* f *est dérivable et que* $f' = g$ *un* DL_{n-1} *en* a, *on peut intégrer le* DL_{n-1} *de* g.
Très rapide, utilisable de temps en temps.
7. *Si* f *est paire, tous les coefficients de degré impair de son* DL *sont nuls.*
Très rapide, permet d'éliminer des calculs à faire dans les méthodes précédentes (on ne calcule pas le coefficient devant x^{2k+1} *car on sait qu'il vaut* 0*).*
8. *Si* f *est impaire, tous les coefficients de degré pair de son* DL *sont nuls.*
Très rapide, permet d'éliminer des calculs à faire dans les méthodes précédentes (on ne calcule pas le coefficient devant x^{2k} *car on sait qu'il vaut* 0*).*

6 Applications des développements limités

Le but de cette partie est de faire une petite liste des calculs les plus classiques pour lesquels utiliser des DL permet d'aller beaucoup plus vite (avec moins d'efforts) ou beaucoup plus loin qu'avant.
Ces techniques utilisées doivent être parfaitement connues.

6.1 Calculs de limites

Lever des formes indéterminées Les DL permettent de lever pratiquement toutes les formes indéterminées qui apparaissent dans un calcul de limites. (les $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{0}{0}$, $+\infty.0$, $-\infty + (+\infty)$, ...)
On peut alors savoir si la suite converge ou non, et en plus on obtient la valeur de la limite.

EXEMPLE 48 — *Déterminer la limite de* $f(x) = \frac{xe^x - \sin(x)}{x}$ *quand* x *tend vers* 0.
On a une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$.
Faisons un DL *du numérateur, de sorte à avoir plusieurs termes qui apparaissent.*
$\exp(x) = 1 + x + o(x^2)$, $\sin(x) = x + o(x^2)$.

Donc, $x\exp(x) - \sin(x) = x + x^2 + o(x^3) - x + o(x^2) = x^2 + o(x^3)$.
Ainsi, $\frac{xe^x - \sin(x)}{x} = \frac{x^2+o(x^3)}{x} = x + o(x^2)$.
Donc, $f(x) \to_{x\to 0} 0$.

EXEMPLE 49 — *Calcul de* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.
C'est un exemple typique de calcul de limite nécessitant les DL.
On pose $f(x) = \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$. *On commence par utiliser l'exponentielle :* $f(x) = e^{x^2\ln(x\sin(\frac{1}{x}))}$.
Quand x *tend vers* $+\infty$, $\frac{1}{x}$ *tend vers* 0.
On va utiliser un DL avec deux termes non-nuls. On réalise un DL_3 *de* $\sin(\frac{1}{x})$ *:* $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
Ainsi, $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Alors : $\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)) = -\frac{1}{6x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.
Donc, $x^2\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{6} + o(1)$. *(Rappel : le* $o(1)$ *est une quantité qui tend vers* 0 *quand* x *tend vers* $+\infty$*).*
Autrement dit, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-\frac{1}{6}}$.

6.2 Étude locale de fonctions

L'étude locale d'une fonction consiste à déterminer pour cette fonction l'existence d'une tangente (si on est au voisinage d'une valeur finie) ou d'une asymptote, et de donner la position relative de la droite et de la courbe dans le voisinage considéré. Tous ces calculs sont très souvents faisables sans recours aux développements limités, mais les DL permettent de pouvoir tout faire en un seul calcul.
Pour l'étude d'une fonction au voisinage de 0, un DL à l'ordre 2 donnera l'équation de la tangente ($y = a_0 + a_1x$), ainsi que la position de la courbe de f par rapport à sa tangente (avec le signe du coefficient a_2). Si a_2 est nul, on regardera alors a_3 (ou a_4, etc).

EXEMPLE 50 — *Pour* f *telle que* $f(x) = 1 + 2x - 3x^2 + o(x^2)$, *on sait que la tangente à la courbe de* f *en* 0 *est d'équation* $y = 1 + 2x$. *Comme* $x \mapsto -3x^2$ *est négative sur un voisinage de* 0, *on sait de plus que* f *est en-dessous de sa tangente sur un voisinage de* 0.
Pour g *telle que* $g(x) = 3 - 4x + 2x^5 + o(x^5)$, *on sait que la tangente à la courbe de* g *en* 0 *est d'équation* $y = 3 - 4x$. *Comme* $x \mapsto 2x^5$ *est négative à gauche* 0 *et positive à droite de* 0, *on sait de plus que* g *est en-dessous de sa tangente à droite de* 0, *et au-dessus de sa tangente à gauche de* 0.

6.3 Développements asymptotiques de suites

Pour des suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ qui sont définies de façon implicite (suites récurrentes, ou bien suites telles que u_n est l'unique solution d'une certaine équation), on peut déterminer un équivalent asymptotique de u_n en utilisant les DL en boucle, pour avoir à chaque fois un degré de précision en plus.

EXEMPLE 51 — *Pour tout* $n \geq 3$, *la fonction* $x \mapsto \frac{e^x}{n} - x$ *s'annule une unique fois sur* $[0,1]$. *On note alors* u_n *le réel de* $[0,1]$ *qui vérifie* $u_n = \frac{e^{u_n}}{n}$.
Comme $u_n \leq 1$ *et* $u_n = \frac{e^{u_n}}{n} \leq \frac{1}{n}$, *on obtient* $u_n \to 0$ *:* $u_n = o(1)$. *(*DL_0*)*

Vu que $u_n \to 0$, on sait alors que $e^{u_n} \to 1$. Donc, $e^{u_n} = 1 + o(1)$.
Ainsi, on a $u_n = \frac{1+o(1)}{n} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$. ($DL_1$)
On réinjecte à nouveau l'information :
$e^{u_n} = e^{\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})} =_{DL_1} 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
Alors : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. ($DL_2$)
A chaque fois que l'on utilise la relation $u_n = \frac{e^{u_n}}{n}$, le DL de u_n augmente d'un degré, et ce grâce au DL de exp.
On continue encore une fois : $u_n = \dfrac{e^{u_n}}{n} = \dfrac{1}{n} e^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})} = \dfrac{1}{n}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$
$u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{2n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. *($DL_3$)*
Et on peut continuer de même pour obtenir $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{3}{2n^3} + \dfrac{8}{3n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$. ($DL_4$)

Bilan des utilisations des DL_n :

- Déterminer un équivalent pour une suite/fonction (quand $n \to +\infty$ ou $x \to a/\infty$).
  Nécessite un DL avec un terme non-nul (souvent DL_2, DL_3)
- Lever une forme indéterminée (pratiquement toutes).
  Nécessite un DL avec un terme non-nul (souvent DL_2, DL_3)
- Déterminer la limite d'une suite/fonction (quand $n \to +\infty$ ou $x \to a/\infty$).
  Nécessite un DL_0 en résultat.
- Déterminer si une fonction f se prolonge continument en un point a, et la valeur de $f(a)$.
  Nécessite un DL_0 en résultat.
- Déterminer si une fonction f est dérivable en un point a, la valeur de $f'(a)$, et l'équation de la tangente à f en a.
  Nécessite un DL_1 en résultat.
- Déterminer la position de f par rapport à cette tangente, sur un voisinage de a.
  Nécessite un DL avec au moins un terme non-nul de degré supérieur à 2. (DL_2 minimum)

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

— $(u_n)_{n\geq 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\geq 0}$ si $\frac{u_n}{v_n} \to_{n\to+\infty} 0$. On le note $u_n = o(v_n)$.
$(u_n)_{n\geq 0}$ est équivalente à $(v_n)_{n\geq 0}$ si $\frac{u_n}{v_n} \to_{n\to+\infty} 1$. On le note $u_n \sim v_n$.

— La relation $u_n = o(v_n)$ n'est pas symétrique. Pour $u_n = o(n^2)$ on a $u_n = o(n^4)$, mais si $v_n = o(n^4)$ rien n'assure que $v_n = o(n^2)$.
— : Règles de calculs des o : $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$, $o(v_n)o(w_n) = o(v_n w_n)$, $o(v_n) = v_n o(1)$, $o(\lambda v_n) = o(v_n)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$), $o(o(v_n)) = o(v_n)$.
— Règles de calcul pour des équivalents : Si $u_n \sim v_n$ on a $v_n \sim u_n$, et $u_n^a \sim v_n^a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ on a $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
Contre-ex : $n^2+1 \sim n^2+n$, $-n^2+1 \sim -n^2+n$, mais $(n^2+1)+(-n^2+1) \not\sim (n^2+n)+(-n^2+n)$.
Rem : Les notations $u_n = o(0)$ et $u_n \sim 0$ n'ont pas de sens.
— On a $u_n = o(1)$ ssi $u_n \to_{n\to+\infty} 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et CV, de limite λ, ssi $u_n = \lambda + o(1)$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $u_n \to_{n\to+\infty} \lambda$ ssi $u_n \sim \lambda$. (Faux pour $\lambda = 0$)
Savoir calculer un équivalent d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ pour déterminer son comportement (convergence, divergence). Savoir utiliser les o pour montrer la convergence d'une suite (en général vers 0).
— Connaître les croissances comparées pour les suites/les fonctions.
— f est négligeable devant g au voisinage de a (éventuellement $\pm\infty$) si $\lim_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = 0$. On le note $f(x) = o(g(x))$, lorsque x est proche de a.
f est équivalente à g au voisinage de a (éventuellement $\pm\infty$) si $\lim_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = 1$. On le note $f(x) \sim_a g(x)$.
Règles de calcul des o et des $\sim_a$. Les o se comportent bien pour les sommes et produits, alors que les équivalences ne se comportent bien que pour les produits/puissances (contre-exemples pour sommes et composées).
Savoir calculer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de x pour déterminer son comportement (limite ou non). Savoir utiliser les o pour montrer la convergence d'une fonction quand x tend vers a.
— Notion de développement limité. Un $DL_n(a)$ de f correspond à la possibilité d'approcher f, au voisinage de a, par une fonction polynômiale de degré n, avec une erreur d'approximation négligeable devant $(x-a)^n$.
Pour $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o(x^n)$, les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ sont uniques.
f a un $DL_0(a)$ ssi f est continue en a. On a alors $a_0 = f(a)$.
f a un $DL_1(a)$ ssi f est dérivable en a. On a alors $a_1 = f'(a)$.
— Formule de Taylor-Young : Si f est de classe C^n sur I, alors f possède un $DL_n(a)$ et $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n)$.
Savoir utiliser la formule de Taylor-Young pour calculer des DL_n via les dérivées de f.
— Développements limités usuels : $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x), (1+x)^a, \exp(x), \cos(x), \sin(x), ch(x), sh(x)$.
— DL_n d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.
Savoir calculer des DL_n de sommes/produits/quotients/composées pour des valeurs de n raisonnables (jusqu'à 3,4,5). Entre autres, savoir réaliser un produit de DL_n est crucial (ranger les termes selon les puissances de x et selon le o choisi).
— Calculer le DL_n d'une primitive.
— Pour f paire, tous les coefficients de degré impair de son $DL_n(0)$ sont nuls.
Pour f impaire, tous les coefficients de degré pair de son $DL_n(0)$ sont nuls.
— Savoir utiliser un DL_n pour calculer une limite, pour lever une forme indéterminée, pour obtenir des équivalents.
— Utiliser les DL_n pour les études locales de fonctions (tangente à la courbe, position par rapport à la tangente)
— Savoir obtenir le DL de suites récurrentes/suites implicites, grâce aux fonctions qui appa-

raissent dans leur définition.