

Chapitre 16

Applications linéaires

Table des matières

1	Applications linéaires	1
1.1	Image et noyau	2
1.2	Injectivité et noyau	3
1.3	Surjectivité et familles génératrices	4
2	Isomorphismes	5
2.1	Isomorphismes en dimension finie	5
3	Construire une application linéaire	6
3.1	Définition via l'image d'une base	6
3.2	Définition via une somme directe	7
3.3	Projecteurs et symétries	8
4	Matrice d'une application linéaire	9
4.1	Représenter une application linéaire par une matrice	9
5	Matrices et opérations sur les applications linéaires	11
6	Changement de bases	13
6.1	Matrice de passage	13
6.2	Changement de base pour une application linéaire	14
7	Rang d'une application linéaire	15
7.1	Invariance par composition avec un isomorphisme	16
7.2	Théorème du rang	16
8	Équations linéaires	17
8.1	Structure de l'ensemble des solutions	17
8.2	Structure de l'espace vectoriel des suites récurrentes linéaires d'ordre 2	18

Dans ce cours l'ensemble \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On dira que \mathbb{K} est un corps.

1 Applications linéaires

Premières notions

DÉFINITION 1 (**Application linéaire**)

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On dit que la fonction $f : E \rightarrow F$ est une **application linéaire** si :

$$\forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(x + \lambda.y) = f(x) + \lambda.f(y)$$

Une application linéaire est une fonction qui est "compatible" avec les opérations $+$ et \cdot sur les espaces vectoriels. (l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images)

L'ensemble des applications linéaires qui vont de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Si $E = F$, on dit que f est un **endomorphisme**.

On note $f \in \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes sur E .

DÉFINITION 2 (**Identité, homothéties**)

Soit E un \mathbb{K} -ev.

- L'endomorphisme $x \mapsto x$, noté Id ou Id_E , est appelé **l'identité de E** .
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'endomorphisme $\lambda.Id_E$ est appelé une **homothétie**, de coefficient de dilatation λ .

REMARQUE 3 (**Applications linéaires et combinaisons linéaires**) — Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors, pour tout $n \geq 1$, pour tous $u_1, \dots, u_n \in E$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$f(\lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_n.u_n) = \lambda_1.f(u_1) + \dots + \lambda_n.f(u_n).$$

La preuve s'obtient par récurrence sur n .

PROPOSITION 4 (**L'espace vectoriel des applications linéaires**)

Soient E, F deux \mathbb{K} -ev.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est muni d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

Autrement dit, pour $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, les fonctions $f+g$ et $\lambda.f$ sont encore des applications linéaires.

De plus, la fonction nulle $x \in E \mapsto 0 \in F$ est une application linéaire.

EXERCICE 1 — Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer qu'on a $f(0_E) = 0_F$.

EXEMPLE 5 — Les ensembles \mathbb{R}^2 et $\mathbb{R}[X]$ sont tous deux des \mathbb{R} -espaces vectoriels et les fonctions suivantes sont des applications linéaires :

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x + y$
- $g : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $P \mapsto XP + P'$

La fonction $h : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas une application linéaire.

THÉORÈME 6 (**Opérations sur les applications linéaires**)

Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur \mathbb{K} , un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Toute combinaison linéaire de deux applications linéaires définies sur les mêmes espaces vectoriels est une application linéaire :
 Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $f + \lambda.g \in \mathcal{L}(E, F)$
2. La composée d'applications linéaires compatibles est une application linéaire :
 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

3. La composition d'applications linéaires est une opération **bi-linéaire** :
- Si f, g, h sont des applications linéaires, alors (quand tout est bien défini) on a :
- (a) $(\lambda.f + g) \circ h = \lambda.f \circ h + g \circ h$.
- (b) $h \circ (\lambda.f + g) = \lambda.h \circ f + h \circ g$.

Démonstration — On vérifie que les fonctions définies sont des applications linéaires.

MÉTHODE 7 (Reconnaître une application linéaire)

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. Pour déterminer que f est une application linéaire :

1. On s'assure que E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels.
2. On vérifie que $f : E \rightarrow F$ vérifie la définition : $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda.f(y)$
Ou bien, on constate que f s'exprime comme composée/combinaison linéaire d'applications linéaires connues.

EXERCICE 2 — Est-ce que la fonction suivante est une application linéaire ?

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f'' + f' - f \end{aligned}$$

DÉFINITION 8 (Puissances d'un endomorphisme)

Soit E un \mathbb{K} -ev et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit la k -ième puissance de u , notée u^k , par :

- Si $k = 0$, $u^k = Id$.
- Si $k \geq 1$, $u^k = u \circ u^{k-1} = u^{k-1} \circ u$.

Il découle de la définition que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a $u^{p+q} = u^p \circ u^q$.

1.1 Image et noyau

DÉFINITION 9 (Image d'un sous-ev par une application linéaire)

Soit E, F des \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **image directe de E par f** , l'ensemble :

$$Im(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

C'est l'image de E par la fonction $f : Im(f) = f(E)$.

PROPOSITION 10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration — On vérifie la définition de sous-e.v.

EXEMPLE 11 — L'image de l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} donnée par l'expression $f : (x, y) \mapsto x - y$ est :

$$Im(f) = \mathbb{R}.$$

Dans le cas de la dimension finie (le cas que l'on étudie le plus souvent), on cherchera à trouver une base de $Im(f)$. Pour cela, on peut utiliser une famille génératrice/ base de l'espace de départ et considérer son image par f .

PROPOSITION 12

Soient (x_1, \dots, x_p) une famille génératrice de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $Im(f) = Vect(f(x_1), \dots, f(x_p))$.

L'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $f(E)$.

Démonstration — On vérifie la définition de famille génératrice.

COROLLAIRE 13

Soient E, F des e.v., $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Alors, pour tout H sous-ev de E , l'ensemble image $f(H)$ est un sous-ev de F .

Démonstration — La fonction $f : H \rightarrow F$ (restriction de f sur H) est encore une application linéaire.

DÉFINITION 14 (Noyau d'une application linéaire)

Soient E, F des \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **noyau de f** , noté $\text{Ker}(f)$ ("kernel"="noyau" en allemand), l'ensemble :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \text{ t.q. } f(x) = 0_F\}.$$

Le noyau de f est l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

PROPOSITION 15

Le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un sous espace vectoriel de E .

Démonstration — On vérifie la définition de sous-e.v.

EXEMPLE 16 — Le noyau de l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} donnée par l'expression $f : (x, y) \mapsto x - y$ est :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1))$$

MÉTHODE 17 (Déterminer le noyau d'une application linéaire)

On revient à la définition, en déterminant l'ensemble des vecteurs $x \in E$ satisfaisant l'équation :

$$f(x) = 0.$$

Ensuite, soit on utilise l'expression de f pour rapidement résoudre l'équation.

Soit, on prend une base (e_1, \dots, e_n) de E et une base (f_1, \dots, f_p) de F .

On écrit $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$, et on décompose $f(x) = x_1f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$ dans la base de F . Cela donne un système linéaire de p équations à n inconnues (un système $p \times n$), que l'on peut résoudre avec la méthode du Pivot.

EXERCICE 3 — On considère la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \Delta : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

Montrer que Δ est une application linéaire et déterminer son noyau.

1.2 Injectivité et noyau

DÉFINITION 18 (Fonctions injectives, surjectives, bijectives)

Soient E, F des ensembles, et $f : E \rightarrow F$.

On dit que f est **injective** si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution.

La fonction f est injective si $f(x) = f(y)$ implique $x = y$.

On dit que f est **surjective** si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution.

On dit que f est **bijective** si pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ possède exactement une solution.

Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Pour étudier les applications linéaires bijectives, nous allons surtout regarder les applications linéaires injectives et surjectives.

Dans le cas des applications linéaires, il existe des caractérisations assez pratiques de ces conditions (bien plus simples que pour une fonction en général).

REMARQUE 19 — Une fonction injective ne prend jamais deux fois la même valeur.

Une fonction injective passe par tous les éléments de F au moins une fois.

Une fonction bijective passe une et une seule fois par tous les éléments de F .

THÉORÈME 20 (Injectivité et noyau)

Soient E, F des \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors, l'application linéaire f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration — On démontre l'équivalence par double-implication. On a $f(x) = f(y)$ si et seulement si $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$.

MÉTHODE 21 (Montrer qu'une application linéaire est injective)

Pour montrer que l'application linéaire $f : E \rightarrow F$ est injective, il faut et il suffit de montrer que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$,

c'est-à-dire montrer que :

$$\forall x \in E, \quad (f(x) = 0 \implies x = 0).$$

En général, on va soit prendre $x \neq 0$ et montrer que $f(x) \neq 0$, soit utiliser la méthode précédente pour calculer $\text{Ker}(f)$, et obtenir $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

EXERCICE 4 — Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$g(x, y) = (x - y, x + y).$$

Montrer que l'application linéaire g est injective.

PROPOSITION 22 (Injectivité et famille libre)

Soient E, F deux e.v. et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire injective.

Alors, pour toute famille libre (e_1, \dots, e_n) , son image $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est encore une famille libre.

Démonstration — Admis.

1.3 Surjectivité et familles génératrices

D'après la définition de surjectivité, une fonction $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

PROPOSITION 23

Soient E, F deux e.v. et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On a les équivalences :

1. f est surjective
2. $\text{Im}(f) = F$
3. $\text{Im}(f)$ contient une famille génératrice/base de F .

Démonstration — Admis.

EXEMPLE 24 — La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2$ est surjective.

En effet, on a $f((1, 1)) = (2, 0)$ et $f((1, -1)) = (0, 2)$. L'ensemble $\text{Im}(f)$ contient la famille $((2, 0), (0, 2))$, qui est une base de \mathbb{R}^2 . La proposition précédente permet de conclure.

EXEMPLE 25 — La fonction $f : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P' \in \mathbb{K}[X]$ est une application linéaire surjective non injective.

On a déjà vu que cette fonction était linéaire (propriétés de la dérivée). Elle n'est pas injective car pour $P(X) = 1$ on a $f(P) = 0$. Par contre, pour tout $n \geq 0$, en prenant $Q(X) = \frac{X^{n+1}}{n+1}$, on a $f(Q)(X) = X^n$.

Donc $\text{Im}(f)$ contient la base canonique $(1, X, X^2, \dots)$ de $\mathbb{K}[X]$. D'après la proposition précédente, l'appli. lin. f est surjective.

2 Isomorphismes

Définitions et propriétés générales

On s'intéresse dans cette section aux *isomorphismes* : ce sont les applications linéaires bijectives.

La propriété d'injectivité est facile à montrer : il suffit de montrer que son noyau est réduit à l'élément neutre. Reste à étudier la surjectivité.

DÉFINITION 26 (Isomorphisme)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que f est un **isomorphisme** si f est bijective.

Si $E = F$ et si f est bijective, on dit que f est un **automorphisme**.

L'ensemble des automorphismes de E est appelé le **groupe linéaire de E** . On le note $GL(E)$.

EXEMPLE 27 — Soit E un \mathbb{K} -ev non réduit à l'élément neutre. Alors l'endomorphisme de E défini par l'expression :

$$f : x \mapsto \lambda.x$$

est un isomorphisme si et seulement si $\lambda \neq 0$.

PROPOSITION 28

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme.

Alors, la bijection réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est une application linéaire.

C'est-à-dire : $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration — Pour $u, v \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$, il faut montrer que $f^{-1}(u + \lambda v) = f^{-1}(u) + \lambda f^{-1}(v)$.

On a $f(f^{-1}(u + \lambda v)) = u + \lambda v = f(f^{-1}(u) + \lambda f^{-1}(v)) = f(f^{-1}(u) + \lambda f^{-1}(v))$.

Comme f est bijective, on obtient alors le résultat. □

EXEMPLE 29 — L'isomorphisme de E défini par l'expression

$$f : x \mapsto \lambda.x$$

admet pour réciproque l'application linéaire $x \mapsto \frac{1}{\lambda}x$.

L'application linéaire $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme (on a vu qu'elle est injective, et $(1, 0), (0, 1)$ sont des éléments dans $Im(f)$).

Sa bijection réciproque est $f^{-1} : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$.

PROPOSITION 30 (Isomorphismes et composée)

Soient E, F, G des e.v., et $g \in \mathcal{L}(E, F)$, $f \in \mathcal{L}(F, G)$ des isomorphismes.

Alors $f \circ g : E \rightarrow G$ est un isomorphisme.

Démonstration — Admis.

2.1 Isomorphismes en dimension finie

En dimension finie, on a des outils en plus : la dimension, les bases. Ces outils sont très utiles. Un isomorphisme en dimension finie se caractérise ainsi : il envoie une base de l'espace de départ sur une base de l'espace d'arrivée.

THÉORÈME 31 (Caractérisation des isomorphismes par les bases)

Soient E, F des e.v. de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a les équivalences :

1. f est un isomorphisme.
2. L'image par f d'une base de E est une base de F .
Si (u_1, \dots, u_n) est une base de E , alors $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est une base de F .

Démonstration — Sur feuille.

REMARQUE 32 — Le théorème précédent indique que lorsque f est un isomorphisme entre deux espaces vectoriels E et F de dimension finie, on a nécessairement $\dim(E) = \dim(F)$.
La réciproque est fautive (si $\dim(E) = \dim(F)$, $f : E \rightarrow F$ n'est pas forcément un isomorphisme).

THÉORÈME 33 (Caractérisation des isomorphismes, à dimension égale)

Soient E, F deux e.v. avec $\dim(E) = \dim(F)$, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors, f est un isomorphisme si et seulement si f est injective, si et seulement si f est surjective.

Démonstration — Sur feuille.

MÉTHODE 34 (Montrer qu'un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ en dimension finie est un automorphisme)

Il suffit de montrer que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ ou $\text{Im}(f) = E$.

Avec la dimension, cela s'écrit aussi $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ ou $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$.

EXERCICE 5 — Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ avec, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - z, y - z, z)$.

Montrer que f est un automorphisme.

THÉORÈME 35 (Espaces vectoriels isomorphes)

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie.

Alors, on a $\dim(E) = \dim(F)$ si et seulement si il existe un isomorphisme entre E et F .

Ainsi, un \mathbb{K} -e.v. E de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n . En tant qu'espace vectoriel, il se comporte exactement comme \mathbb{K}^n .

Démonstration — Admis.

EXEMPLE 36 — L'e.v. $\mathbb{K}_n[X]$ est un e.v. de dimension $n + 1$.

Il est donc isomorphe à \mathbb{K}^{n+1} . On peut même donner un isomorphisme entre ces deux espaces :
 $f : a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \mapsto (a_0, \dots, a_n)$.

Cette application est linéaire, injective, et les ev ont même dimension. C'est donc bien un isomorphisme.

3 Construire une application linéaire

3.1 Définition via l'image d'une base

Si E est un ev de dimension finie, définir une application linéaire $f : E \rightarrow F$ peut se faire aisément à partir d'une base de E (et d'une famille dans F).

PROPOSITION 37

Soient E un e.v. et $e_1, \dots, e_n \in E$. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Alors, on a : $f(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

L'image par f du sous-ev engendré par e_1, \dots, e_n est le sous-ev engendré par $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

Démonstration — On vérifie la définition de sous-e.v. engendré par une famille.

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

THÉORÈME 38 (Caractérisation par l'image d'une base)

Soient E un e.v. de dimension n et $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit F un e.v.

Alors, pour toute famille (f_1, \dots, f_n) de vecteurs de F , il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(e_i) = f_i.$$

C'est la fonction $f : x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto x_1f_1 + \dots + x_n f_n \in F$.

Démonstration — Pour $x \in E$ on a $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$. On pose $f(x) = x_1f_1 + \dots + x_n f_n$.
 f est bien définie car (e_1, \dots, e_n) est une base (la décomposition de x dans la base est unique).

On vérifie alors que la fonction f est une application linéaire $f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.
Par construction, on a bien $f(e_i) = f_i$.

EXEMPLE 39 — La fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a, b, c) & \longmapsto & aX^2 + (a + b)X + a + b + c \end{array}$$

est une application linéaire bijective.

En effet, pour e_1, e_2, e_3 la base canonique de \mathbb{R}^3 , on a $f(ae_1 + be_2 + ce_3) = a.(X^2 + X + 1) + b(X + 1) + c.1$.

Le théorème précédent nous dit qu'une telle fonction est une application linéaire.

Ensuite, on a $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Montrons alors que f est surjective.

On a $f(e_1) = X^2 + X + 1$, $f(e_2) = X + 1$, $f(e_3) = 1$. L'image par f de la base canonique de \mathbb{R}^3 est une famille de polynômes échelonnée en degré.

On a donc $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(f(\text{Vect}(e_1, e_2, e_3))) = \dim(\text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))) = 3$.

Comme $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, on en déduit que f est surjective. Et comme \mathbb{R}^3 et $\mathbb{R}_2[X]$ ont la même dimension, on en déduit que f est bijective : c'est un isomorphisme.

EXERCICE 6 — Montrer que l'application linéaire

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' - P \end{array}$$

est bijective. (Attention, on n'est pas en dimension finie)

MÉTHODE 40 (Montrer que deux applications linéaires sont égales)

Soient E, F des e.v., $e, f, g : E \rightarrow F$ des applis lin.

Pour montrer que $f = g$, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur une base de E .

C'est-à-dire que pour (e_1, \dots, e_n) une base de E , si on a

$$\forall i \in [[1, n]], f(e_i) = g(e_i),$$

alors on a $f = g$.

Cela découle du résultat d'unicité dans le théorème de caractérisation via l'image d'une base.

Au lieu de tester cela sur tous les vecteurs de E , on le teste uniquement sur une base.

REMARQUE 41 — Pour montrer qu'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ est la fonction nulle, il suffit de montrer que $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = 0$, pour (e_1, \dots, e_n) une base de E .

EXERCICE 7 — Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Soit f l'unique endomorphisme f de \mathbb{R}^3 tel que :

$$f(e_1) = e_3, \quad f(e_2) = -e_2, \quad f(e_3) = e_1.$$

Donner l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3.2 Définition via une somme directe

Le théorème suivant indique que si E se décompose comme une somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, alors une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par sa restriction sur E_1 et par sa restriction sur E_2 .

THÉORÈME 42 (Définition à partir d'une somme directe)

Soient E, F deux e.v., et soient E_1, E_2 deux e.v. qui sont supplémentaires dans E . Soient $f_1 : E_1 \rightarrow F$ et $f_2 : E_2 \rightarrow F$ deux applications linéaires.

Alors, il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que $f_{E_1} = f_1$ et $f_{E_2} = f_2$.
Autrement dit, pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, on a $f(x) = f(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$.

Démonstration — Admis.

EXEMPLE 43 —

1. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Construire l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f_F = 0$ et $f_G = \text{Id}_G$.
2. Soit F l'ensemble des fonctions réelles paires et soit G l'ensemble des fonctions réelles impaires.
Construire l'application linéaire f de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $f_F = \text{id}_F$ et $f_G = -\text{id}_G$.

Dans les deux cas, il s'agira de prendre un élément x de E , et de le décomposer dans $F \oplus G$ comme $x = x_F + x_G$, pour ensuite avoir une expression de $f(x)$.

3.3 Projecteurs et symétries

DÉFINITION 44 (**Projecteur**)

Soit $E = F \oplus G$ un \mathbb{K} -ev de dimension finie.

On définit p le **projecteur sur F parallèlement à G** comme l'endomorphisme de E tel que :
Pour $x \in E$ s'écrivant $x = x_F + x_G$ ($x_F \in F, x_G \in G$), on a :

$$p(x) = p(x_F + x_G) = x_F.$$

La projection p est l'identité sur F , et l'application nulle sur G .

THÉORÈME 45 (**Caractérisation des projecteurs**)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Dans ce cas p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

MÉTHODE 46 (**Manipuler un projecteur**)

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Pour montrer que p est un projecteur on peut :

- Montrer que $p \circ p = p$.
- Utiliser la décomposition de tout élément $x \in E$ sous la forme :

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in G}$$

Cette décomposition avec $p(x)$ et $x - p(x)$ est beaucoup utilisée dans les calculs. (un terme est dans F , l'autre est dans G)

EXEMPLE 47 — Soient E un \mathbb{K} -ev et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$f \circ g = f \quad \text{et} \quad g \circ f = g.$$

Alors f et g sont des projecteurs sur E .

En effet, on a $f \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ g = f$.

De même, avec les hypothèses on obtient $g \circ g = (g \circ f) \circ g = g \circ (f \circ g) = g \circ f = g$.

Ainsi, on a bien montré que f et g sont des projecteurs.

DÉFINITION 48 (**Symétrie**)

Soient $E = F \oplus G$ un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $s \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que s est la **symétrie sur F parallèlement à G** , si pour tout vecteur $x \in E$ avec $x = x_F + x_G$ ($x_F \in F, x_G \in G$) on a :

$$s(x) = s(x_F + x_G) = x_F - x_G.$$

THÉORÈME 49 (Caractérisation des symétries)

Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(E)$.

Alors p est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$.

REMARQUE 50 — Si p est le projecteur sur F parallèlement à G , alors $Id_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F .

Et, $s = p - (Id_E - p) = 2p - Id_E$ est la symétrie sur F parallèlement à G .

En effet, pour $x = x_F + x_G$, on a $s(x) = p(x) - (Id_E - p)(x) = x_F - x_G$.

Réciproquement, on a $p = \frac{s+Id_E}{2}$.

Cela se retrouve par le calcul : $(\frac{s+Id_E}{2})(x) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = \frac{1}{2}(x_F - x_G + (x_F + x_G)) = \frac{2}{2}x_F = x_F$.

4 Matrice d'une application linéaire

Commençons par un rappel sur les matrices de vecteurs dans des bases.

DÉFINITION 51 (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base)

Soient F un e.v. de dimension n , \mathcal{B} une base de F , et (u_1, \dots, u_p) une famille de p vecteurs dans F .

On définit la **matrice de la famille** (u_1, \dots, u_p) **dans la base** \mathcal{B} , notée $Mat_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$, comme la matrice :

$$\mathcal{B}(u_1, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,\dots,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

telle que $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i$.

C'est une matrice n lignes, p colonnes. Cette matrice se lit colonne par colonne : la j ème contient les coefficients de la décomposition de u_j dans la base \mathcal{B} . Autrement dit, la colonne C_j représente le vecteur u_j vis-à-vis de la base \mathcal{B} .

4.1 Représenter une application linéaire par une matrice

Si E est de dimension finie p , pour définir une application linéaire u de E vers F , il suffit de :

- **choisir** une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ de E ;
- **choisir** l'image $u(\mathcal{B}_1) = (u(e_1), \dots, u(e_p))$ de cette base.

Si l'espace vectoriel F est de dimension finie n , alors on peut ensuite :

- **choisir** une base $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ de F ;
- **écrire** dans cette base les p vecteurs $u(e_j)$ sous la forme $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i$.

On dit alors que l'application linéaire u est représentée par la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)}$ dans les bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 .

DÉFINITION 52 (Matrice d'une appli. lin. dans des bases)

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de **dimensions finies** n et p . Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

On appelle **matrice de u dans les bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2** , notée $Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$, la matrice :

$$Mat_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,\dots,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i.$$

C'est une matrice à n lignes et p colonnes. Elle se lit en colonnes : pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$, la j -ième colonne contient les coordonnées du vecteur $u(e_j)$ dans la base \mathcal{B}_2 .
Autrement dit, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u(e_1), \dots, u(e_p)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u(\mathcal{B}_1))$.

EXEMPLE 53 —

- Déterminons la matrice de l'application $u : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^2$
 $x \mapsto (x, 2x)$ dans les bases $\mathcal{B}_1 = (2)$ et $\mathcal{B}_2 = ((1, 0), (1, 1))$.

On a $u(2) = (2, 4) = -2(1, 0) + 4(1, 1)$. Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ avec $\varphi(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$. Soient $\mathcal{B}_1 = (X^0, X^1, X^2, X^3)$, $\mathcal{B}_2 = (X^0, X^1, X^2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.
On a $\varphi(X^0) = 0$, $\varphi(X^1) = X^0$, $\varphi(X^2) = 2X^1$, $\varphi(X^3) = 3X^2$.

On obtient donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

REMARQUE 54 —

- Dans le cas où u est un endomorphisme de E , c'est-à-dire $u : E \rightarrow E$, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$ est une matrice carrée.
- Pour $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme, on peut se contenter de choisir une seule base B , pas besoin de deux bases différentes (l'espace d'arrivée est aussi celui de départ).
- Pour définir $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$ il faut choisir deux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de E et de F .
Si on change de choix de bases (qu'on prend une base \mathcal{B}'_1 différente de \mathcal{B}_1 ou une base \mathcal{B}'_2 différente de \mathcal{B}_2), la matrice obtenue sera différente.
Une application linéaire u est donc associée à plusieurs matrices différentes (le choix des bases compte).
- Nous verrons cependant que chacune de ces matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$ représentent exactement l'application linéaire u .
C'est-à-dire que pour déterminer des informations sur u (noyau, image, injective, surjective, bijective, rang, ...), on utilisera la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$ pour faire les calculs.

DÉFINITION 55 (Matrice d'un endom. dans une base)

Soient E un e.v. de dimension n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme.

On définit la **matrice de u dans la base B** , notée $\text{Mat}_B(u)$, par :

$$\text{Mat}_B(u) = \text{Mat}_{B, B}(u) = \text{Mat}_B(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

EXEMPLE 56 —

- Soit \mathcal{B} une base d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$.
- Soient u et v deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^2 . La famille $\mathcal{B} = (u, v)$ est donc une base de \mathbb{R}^2 .
On définit ψ la symétrie par rapport à $\mathbb{R}u$ et parallèlement à $\mathbb{R}v$, comme l'application linéaire telle que $\psi(u) = u$ et $\psi(v) = -v$. Ainsi, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Reprenons la symétrie ψ en choisissant $u = (1, 1)$ et $v = (1, 2)$.

Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . On a $e_1 = 2u - v$ et $e_2 = v - u$.

Donc $\psi(e_1) = 2\psi(u) - \psi(v) = 2u + v = (3, 4)$ et $\psi(e_2) = \psi(v) - \psi(u) = -v - u = (-2, -3)$.

On obtient donc $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

DÉFINITION 57

Soient $n, p \geq 1$. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice n lignes, p colonnes.

On peut alors définir la fonction $u_A : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \mapsto A \times X \in \mathbb{K}^n$.

La fonction u_A est une application linéaire \mathbb{K}^p vers \mathbb{K}^n .

On l'appelle **application linéaire canoniquement associée à A** .

Pour B_1, B_2 les bases canoniques de \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n , on a $\text{Mat}_{B_1, B_2}(u_A) = A$.

Autrement dit, on peut aussi créer une application linéaire en choisissant une matrice.

D'une part toute application linéaire u est associée à une matrice $\text{Mat}_{B_1, B_2}(u)$ par un choix de bases. D'autre part toute matrice A est associée à une application linéaire u_A .

Nous allons lier ces deux phénomènes.

PROPOSITION 58

Soient E, F deux e.v. de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient deux vecteurs $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p \in E$ et $y = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n \in F$.

Alors, on a $u(x) = y$ si et seulement si $AX = Y$.

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de x, y dans $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, et où $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$.

Démonstration —

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^p x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i\right) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n x_j a_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j\right) f_i.$$

D'où

$$y = u(x) \iff \sum_{i=1}^n y_i f_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p x_j a_{i,j}\right) f_i \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j.$$

car l'écriture d'un vecteur de F dans la base \mathcal{B}_2 est unique. Donc $y = u(x) \iff Y = A \cdot X$. \square

REMARQUE 59 — Cette proposition montre le lien entre ces deux procédures. Regarder l'image du vecteur x par u correspond exactement à regarder le produit AX , pour A la matrice de u dans des bases B_1, B_2 et X les coordonnées de X dans B_1 .

5 Matrices et opérations sur les applications linéaires

Les applications linéaires pouvant être associées aux matrices, regardons quelles opérations fonctionnent bien avec celles-ci.

PROPOSITION 60 (Combinaison linéaire)

Soient E, F deux e.v. de dimension finie, et B_1, B_2 des bases de E, F . Soient $u, v : E \rightarrow F$ deux applis lin. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\text{Mat}_{B_1, B_2}(u + v) = \text{Mat}_{B_1, B_2}(u) + \text{Mat}_{B_1, B_2}(v)$$

$$\text{Mat}_{B_1, B_2}(\lambda u) = \lambda \cdot \text{Mat}_{B_1, B_2}(u)$$

Démonstration — Soient $A = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} f$, $B = (b_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} g$ et $C = (c_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \lambda f + \mu g$.
Alors $(\lambda f + g)(e_j) = \lambda f(e_j) + g(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i + \sum_{i=1}^n b_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,j} + b_{i,j}) f_i$.
Donc $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j}$. □

EXEMPLE 61 — Soit E un e.v. et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme.

Un vecteur $x \in E$ tel que $u(x) = x$ est appelé un **vecteur invariant** par u .

L'ensemble des vecteurs invariants par u est un sous-espace vectoriel de E .

En effet, comme $f - \text{Id}$ est une application linéaire, on a :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = x \iff f(x) - x = 0_E \iff (f - \text{id}_E)(x) = 0_E \iff x \in \text{Ker}(f - \text{id}_E).$$

THÉORÈME 62 (Isomorphisme fondamental)

Soient E, F des e.v. de dimensions finies n, p . Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ des bases de E, F . Alors :

1. La fonction $u \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.
2. L'e.v. $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie, avec $\dim \mathcal{L}(E, F) = np = \dim E \times \dim F$

Démonstration —

1. On choisit une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ de F . L'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u &\longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) \end{aligned}$$

est alors bien définie et est linéaire.

De plus, pour toute famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}}$ il existe une unique application linéaire u vérifiant :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i.$$

Donc l'application ϕ est donc une bijection de $\mathcal{L}(E, F)$ vers $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

2. Les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes, ils ont donc même dimension. □

REMARQUE 63 —

1. Ce théorème montre qu'en choisissant une base de E et une base de F , on a une correspondance bijective entre les applis. lin. $u : E \rightarrow F$ et les matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
De plus, cette correspondance préserve les combinaisons linéaires. Si u est associée à M et v à N , l'appli. lin. $\lambda u + \mu v$ est associée à $\lambda M + \mu N$.
2. On va ainsi pouvoir obtenir des informations sur u à partir de la matrice M , et vice-versa.

PROPOSITION 64 (Composée)

Soient E, F, G des e.v. de dimension finie, et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ des bases de E, F, G . Soient $u : E \rightarrow F, v : F \rightarrow G$ deux applis lin. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u).$$

La composition d'applications linéaires correspond au produit de matrices.

EXEMPLE 65 — Soient $f : (x, y) \mapsto (y, x)$ et $g : (x, y) \mapsto (x + y, x)$. Ce sont des endomorphismes de \mathbb{K}^2 . On peut composer f avec g et g avec f , mais cette composition n'est pas commutative.
On a en effet $(f \circ g)(1, 2) = f(3, 1) = (1, 3)$ et $(g \circ f)(1, 2) = g(2, 1) = (3, 2)$.

PROPOSITION 66 (Inverse)

Soient E, F deux e.v. de dimension finie, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ des bases de E, F , et $u : E \rightarrow F$ un isomorphisme.

Alors, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$ est inversible et $(\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(u^{-1})$.

Démonstration — Admis.

Démonstration — Soit x un vecteur de E dont les coordonnées sont (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} et (x'_1, \dots, x'_n) dans \mathcal{B}' . On écrit :

$$x = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x'_j \right) e_i.$$

D'après l'unicité de la décomposition dans la base \mathcal{B} , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x'_j$. \square

PROPOSITION 71

Soient E un e.v. de dimension finie, et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

Alors, la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est inversible et son inverse est la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} :

$$(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}.$$

Démonstration — Soient $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ et $P' = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$, d'après le Théorème précédent, on a pour tout $x \in E$, en notant X le vecteur des coordonnées de x dans \mathcal{B} et X' le vecteur des coordonnées de x dans \mathcal{B}' ,

$$X = P X' \quad \text{et} \quad X' = P' X.$$

On a donc que pour tout $X \in \mathbb{K}^n$ (n est la dimension de E), $X = P P' X = I_n X$, et donc $P P' = I_n$. Ainsi, P est inversible, d'inverse P' . \square

REMARQUE 72 — La matrice de passage donne :

- (en lisant les colonnes) les vecteurs de la **nouvelle** base \mathcal{B}' en fonction des vecteurs de l'**ancienne** base \mathcal{B} .
- (en calculant $X = P X'$) les **anciennes** coordonnées d'un vecteur x en fonction de ses **nouvelles** coordonnées.

Réaliser un changement de bases dans un e.v. consiste à multiplier par une matrice de passage. Revenir en arrière correspond à multiplier par la matrice de passage inverse. ($X = P X' \Leftrightarrow X' = P^{-1} X$)

Pour calculer l'inverse de $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, on utilisera en général la méthode du Pivot.

EXEMPLE 73 — Soit (e_1, e_2) une base de \mathbb{R}^2 . On définit une seconde base (f_1, f_2) par $f_1 = 2e_1 + 3e_2$ et $f_2 = 4e_1 + 5e_2$.

La famille (f_1, f_2) est bien une base de \mathbb{R}^2 car les deux vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires.

La matrice de passage de la première base (e_1, e_2) à la seconde base (f_1, f_2) est $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

La formule de changement de bases $\begin{cases} x = 2x' + 4y' \\ y = 3x' + 5y' \end{cases}$ exprime les anciennes coordonnées (x, y) en fonction des nouvelles coordonnées (x', y') .

L'opération inverse s'écrit avec la matrice $\frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

6.2 Changement de base pour une application linéaire

PROPOSITION 74 (Changement de base et appli. lin.)

Soient E et F deux e.v. de dimension finie, $u : E \rightarrow F$ une application linéaire, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ deux bases de E , $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F .

On pose P la matrice de passage de \mathcal{B}_1 vers \mathcal{B}'_1 , et Q la matrice de passage de \mathcal{B}_1 vers \mathcal{B}'_2 . Alors, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(u) = Q^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u) P.$$

Démonstration — Soient deux vecteurs $x \in E$ et $y \in F$. On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1} x$, $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2} y$, $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'_1} x$ et $Y' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'_2} y$.

D'après les formules de changement de bases, on a $X = P X'$ et $Y = Q Y'$, d'où

$$y = u(x) \iff Y = A X \iff Q Y' = A P X' \iff Y' = Q^{-1} A P X'$$

car la matrice de passage Q est inversible. Donc la matrice de u dans les bases \mathcal{B}'_1 et \mathcal{B}'_2 est $Q^{-1} A P$. \square

PROPOSITION 75 (Changement de base et endom.)

Soit E un de dimension finie, $u : E \rightarrow E$ une application linéaire, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . On pose P la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' . Alors, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P.$$

REMARQUE 76 — Pour $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$, s'il existe une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$, on dit que les matrices A et A' sont **semblables**.

Cela veut dire que ces deux matrices représentent la même application linéaire mais vue dans deux bases différentes.

Une grande difficulté en algèbre linéaire est de déterminer les matrices qui sont semblables, et celles qui ne le sont pas.

7 Rang d'une application linéaire

Le rang d'une application linéaire f correspond à la dimension de son image $\text{Im}(f) = f(E)$.

DÉFINITION 77 (Rang d'une application linéaire)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

On appelle **rang de f** , noté $\text{rg}(f)$, la dimension de $\text{Im}(f)$.

On a donc $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Pour (e_1, \dots, e_p) une base de E , on a $\text{rg}(u) = \dim(\text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))) = \text{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

DÉFINITION 78 (Rang d'une matrice)

Soit $A \in M_{n,p}$ matrice.

On appelle **rang de A** , noté $\text{rg}(A)$, la dimension de $\text{Im}(X \mapsto AX)$.

On a donc $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(X \mapsto AX))$.

Pour C_1, \dots, C_n les colonnes de A , on a $\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

REMARQUE 79 — Si F est de dimension finie, l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$.

En effet, on a $\text{Im}(f) = F$ si et seulement si leurs dimensions sont égales.

PROPOSITION 80

Soient E, F des e.v. de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Alors on a $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$.

Démonstration — En effet, $\text{Im}(f)$ est un sous-ev de F , donc sa dimension est inférieure.

EXEMPLE 81 — Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $g(x, y) = (x - y, x + y)$.

Alors on a $\text{rg}(g) = 2$.

En effet, $\text{Im}(g)$ contient la base canonique de \mathbb{R}^2 , donc $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$.

PROPOSITION 82

Soient E, F des e.v. de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E .

Alors, $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \dim(\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)))$.

Le rang de l'application linéaire f est le rang de l'image d'une base.

Démonstration — On a vu précédemment que $\text{Im}(f) = f(E) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Et, dans le chapitre sur les e.v., on a défini : $\text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \dim(\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)))$

□

MÉTHODE 83 (Une façon de calculer $\text{rg}(f)$)

On choisit une base (e_1, \dots, e_n) de E .

On calcule le rang de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ en utilisant les méthodes vues dans le chapitre

Espaces Vectoriels.

Cela nous donne $rg(f)$.

PROPOSITION 84

Soient E, F deux e.v. et $u, v : E \rightarrow F$ deux applications linéaires.

Alors, on a $rg(u + v) \leq rg(u) + rg(v)$.

Démonstration — *Pour tout $x \in E$, $u(x) + v(x) \in Im(u) + Im(v)$.*

Ainsi, on a $Im(u + v) \subset Im(u) + Im(v)$.

Donc, $rg(u + v) \leq \dim(Im(u) + Im(v))$.

Or, d'après les propriétés de la dimension (formule de Grassman), on a $\dim(Im(u) + Im(v)) \leq \dim(Im(u)) + \dim(Im(v)) = rg(u) + rg(v)$, ce qui conclut.

Le rang permet entre autres de caractériser la surjectivité de f .

THÉORÈME 85 (Surjectivité et rang)

Soient E, F des e.v. avec F de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow F$ une appli. lin.

Alors f est surjective si et seulement $rg(f) = \dim(F)$.

Démonstration — *On utilise le fait que $Im(f) = F$ ssi $\dim(Im(f)) = \dim(F)$.*

PROPOSITION 86

Soient F, G, H des e.v. de dimension finie et $u : F \rightarrow G$, $v : G \rightarrow H$ deux applis lin.

Alors, on a :

$$rg(v \circ u) \leq \min(rg(u), rg(v)).$$

Démonstration — *On a $Im(v \circ u) = v(u(E)) \subset v(F) = Im(v)$. Donc, $rg(v \circ u) \leq rg(v)$.*

Pour l'autre inégalité, posons $rg(u) = n$. Alors on a (e_1, \dots, e_n) une base de $Im(u) = u(E)$.

Posons $v' : Im(u) \rightarrow H$ la restriction de v à $Im(u)$. C'est une application linéaire.

D'après une proposition précédente, on a $rg(v') = rg(v(e_1), \dots, v(e_n))$.

Par propriété du rang d'une famille de vecteurs, on a donc $rg(v') \leq n$.

Or, $Im(v') = v'(Im(u)) = v(u(E)) = Im(v \circ u)$.

Donc, $rg(v \circ u) = rg(v') \leq n = rg(u)$. Cela conclut la preuve. \square

7.1 Invariance par composition avec un isomorphisme

Pour détailler davantage la proposition précédente, le fait de composer une application linéaire f à gauche ou à droite avec un isomorphisme ne change pas le rang.

PROPOSITION 87

Soient F, G, H des e.v. de dimension finie et $u : F \rightarrow G$, $v : G \rightarrow H$ deux applis lin.

Si u est un isomorphisme, alors on a $rg(v \circ u) = rg(v)$.

Si v est un isomorphisme, alors on a $rg(v \circ u) = rg(u)$.

Démonstration — *Si u est un isomorphisme, alors u est surjectif.*

Comme $Im(u) = F$, on a donc $Im(v \circ u) = v(u(E)) = v(F) = Im(v)$. Cela donne $rg(v \circ u) = rg(v)$.

Si v est un isomorphisme, alors v est injectif.

Donc v envoie une famille libre sur une famille libre.

Posons $n = rg(u) = \dim(Im(u))$.

Cela veut dire que pour (e_1, \dots, e_n) une base de $Im(u)$ (donc libre), la famille des images $(v(e_1), \dots, v(e_n))$ est libre.

Cette famille est donc de rang n . Or, on a vu que $rg(v(e_1), \dots, v(e_n)) = \dim(v(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n))) = \dim(v(Im(u))) = \dim(v(u(E))) = \dim(Im(v \circ u)) = rg(v \circ u)$.

Cela démontre le résultat. \square

7.2 Théorème du rang

Le théorème suivant, central dans ce chapitre, établit le lien entre dimension du noyau et dimension de l'image. Si on connaît l'un, alors on en déduit l'autre.

Ce théorème permet "d'améliorer" beaucoup de résultats précédents (démontrer des injectivités/surjectivités/bijectivités plus rapidement grâce à des calculs de dimension plus rapides).

THÉORÈME 88 (Théorème du rang)

Soient E, F deux e.v. avec E de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Alors, on a :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f).$$

Démonstration — On utilise une base de $\text{Ker}(f)$ que l'on complète en une base de E .

MÉTHODE 89 (Relier la dimension du noyau et de l'image d'une application linéaire f)

On utilise le théorème du rang : $\dim(\text{ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$.

Si on connaît $\dim(\text{Ker}(f))$, on connaît immédiatement $\text{rg}(f)$. Et vice-versa.

On retrouve par exemple que pour $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme, on a f bijectif ssi f injectif ($\dim(\text{Ker}(f)) = 0$) ssi f surjectif ($\dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$).

En appliquant le théorème du rang on obtient via les dimensions que injectif implique surjectif et vice-versa (surjectif implique injectif).

EXEMPLE 90 — Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Si :

$$\text{Im}(f) + \text{Ker}(g) = \text{Im}(g) + \text{Ker}(f) = E.$$

alors les sommes de sous-ev sont directes.

Le théorème du rang explique que si l'on prend de la dimension pour faire grossir le noyau (ajouter des vecteurs qui sont envoyés sur 0), alors la dimension de l'image diminue (et diminue de la même valeur).

Ce résultat a un impact sur les systèmes linéaires/équations linéaires.

EXERCICE 8 — Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'on a :

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \iff (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\text{rg}(f))$$

8 Équations linéaires

Soient E, F des e.v. Une **équation linéaire** est une équation de la forme $\varphi(x) = b$ où φ est une application linéaire de E vers F et où $b \in F$.

Cela généralise les systèmes linéaires.

Avec les propriétés des applications linéaires, on peut donner la structure de l'ensemble des solutions de cette équation.

8.1 Structure de l'ensemble des solutions

THÉORÈME 91 (Structure des solutions d'une équation linéaire)

Soient E, F des e.v., $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et $b \in F$.

L'ensemble S des solutions de l'équation linéaire $f(x) = b$ est :

$$S = \begin{cases} \{x \in E \text{ t.q. } f(x) = y\} = a + \text{Ker}(f), & \text{s'il existe } a \in E \text{ t.q. } f(a) = b. \\ \emptyset, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration — On procède par disjonction de cas, en utilisant la linéarité de f .

REMARQUE 92 — Si $b = 0$, l'ensemble des solutions de $f(x) = b$ est exactement $\text{Ker}(f)$. C'est un sous-ev de E .

Si $b \neq 0$, l'ensemble des solutions de $f(x) = b$ n'est pas un sous-ev de E . (Cela s'appelle un sous-espace affine, mais cela dépasse ce chapitre).

On retrouve ces structures chez les solutions d'équations différentielles linéaires, les solutions de systèmes linéaires, les solutions de suites récurrentes linéaires.

EXEMPLE 93 — Soient $a, b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose l'EDL1 :

$$(E) : y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

En notant φ une solution particulière de l'équation et $A : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a , l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \varphi(x) + \lambda.e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

8.2 Structure de l'espace vectoriel des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soient $a, b \in \mathbb{K}$ non-nuls. On s'intéresse à l'équation

$$(E) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

où l'inconnue est une suite $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Notons F l'ensemble des solutions de (E) .

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit $\varphi : F \rightarrow K^2, (u_n)_{n \geq 0} \mapsto (u_0, u_1)$.
Montrer que φ est une application linéaire.
3. Montrer que φ est bijective. (En utilisant des récurrences).
En déduire que F est un e-v. de dimension 2.
4. On pose le polynôme $P(X) = X^2 - aX - b$. On prend le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
5. On suppose que $a^2 + 4b \neq 0$, càd que P possède deux racines r_1, r_2 dans \mathbb{K} .
Montrer que la famille $((r_1^n)_n, (r_2^n)_n)$ est une base de F .
6. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et où r_1, r_2 sont complexes conjugués (càd $a^2 + 4b < 0$), montrer que la famille $((Re(r_1^n))_{n \geq 0}, (Re(r_2^n))_{n \geq 0})$ est une base de F .
7. On suppose que $a^2 + 4b = 0$, càd que P possède une racine double r dans \mathbb{K} . Montrer que la famille $((r^n)_n, (nr^n)_n)$ est une base de F .

Bilan du contenu nécessaire à maîtriser :

- Application linéaire de E vers F . Ensemble $\mathcal{L}(E, F)$. Une application linéaire préserve la structure des espaces vectoriels (opérations d'addition et de multiplication par un scalaire). On a $f(0_E) = 0_F$. Savoir reconnaître une application linéaire.
- Somme, multiple, composée d'applications linéaires.
- Image, noyau d'une application linéaire. $\text{Ker}(f)$ est un sous-ev de E , $\text{Im}(f)$ un sous-ev de F . Déterminer $\text{Ker}(f)$ en résolvant $f(x) = 0_F$.
Pour $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ on a $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
- Applications linéaires injectives, surjectives, bijectives.
 f est injective ssi $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$.
 f est bijective ssi $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(f) = F$.
- L'image d'une famille libre par une appli lin injective est libre.
L'image d'une famille génératrice par une appli lin surj est génératrice.
L'image d'une base par une appli lin bij est une base.
- Si $\dim(E) = \dim(F)$, une appli lin f est bijective si et seulement si elle est injective, ssi elle est surjective.
Savoir montrer qu'une appli lin est un isomorphisme (ou non) grâce aux dimensions ($\dim(\text{Ker}(f))$, $\dim(\text{Im}(f))$) ou à des bases).
- Pour (e_1, \dots, e_n) une base de E et $(f_1, \dots, f_n) \in F^n$, il existe une unique appli lin $f : E \rightarrow F$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on ait $f(e_i) = f_i$. Deux applis lin f et g sont égales ssi leurs images sur une base sont égales (pour tout i , $f(e_i) = g(e_i)$).
- Projecteur sur G , parallèlement à H (avec $E = G \oplus H$). p est un projecteur ssi ($p^2 = p$). Dans ce cas, p est le projecteur sur $\text{Im}(p) = G$ parallèlement à $\text{Ker}(p) = H$. Et, on a $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$.
Symétrie sur G , parallèlement à H . s est une symétrie ssi ($s^2 = \text{Id}$). Dans ce cas, s est la symétrie sur $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = G$, parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = H$.
Savoir identifier un projecteur/une symétrie et leurs sous-espaces associés.
- Matrice d'une appli. lin. f de la base B_1 vers la base B_2 . La fonction $f \mapsto \text{Mat}_{B_1, B_2}(f)$ est compatible avec la somme, multiplication, composée, inverse d'applications linéaires.
Pour B_1, B_2 fixées, la fonction $f \mapsto \text{Mat}_{B_1, B_2}(f)$ est une appli lin bijective. Il y a une correspondance entre f et sa matrice dans les bases B_1 et B_2 .
Savoir étudier une appli lin f en étudiant $\text{Mat}_{B_1, B_2}(f)$.
Un endom. u est inversible ssi $\text{Mat}_B(u)$ est inversible.
- Matrices de passage $P_{B \rightarrow B'}$. Contient les coordonnées de B' dans la base B .
Relation $X = P_{B \rightarrow B'} X'$ (ou $X = P X'$).
Formule de changement de base : $\text{Mat}_{B'_1, B'_2}(u) = P_{B_2 \rightarrow B'_2}^{-1} \text{Mat}_{B_1, B_2}(u) P_{B_1 \rightarrow B'_1}$.
 $\text{Mat}_{B'}(u) = (P_{B \rightarrow B'})^{-1} \text{Mat}_B(u) P_{B \rightarrow B'}$ (ou $M' = P^{-1} M P$).
- Rang d'une appli lin, rang d'une matrice. On a $\text{rg}(M) = \text{rg}(C_1, \dots, C_n)$. Surjectivité et rang.
- Théorème du rang : $\dim(E) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$.
Savoir déterminer le rang/la dimension du noyau grâce au théorème du rang.
Tous les résultats sur la dimension des ev et sur les bases sont nécessaires pour étudier les applications linéaires.
- Equations vectorielles de la forme $f(x) = a$. Résolution grâce à $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.