Chapitre 9
Calcul matriciel

Table des matières

Vidal AGNIEL

1 Introduction

Les matrices sont des objets mathématiques qui se présentent comme des tableaux de nombres. Elles apparaissent dans de multiples domaines d'applications et sont incontournables pour les épreuves écrites des concours.
Pour n'en citer que quelques unes :

— La géométrie. Les matrices peuvent être associées à des fonctions appelées *applications linéaires* (ex : translations, rotations, symétries,...), ce qui permet de calculer des sommes/multiples/composées d'applications linéaires
— Calculer le terme général de suites récurrentes (cf TD).
— Manipuler plus synthétiquement les systèmes linéaires.
— Modéliser des situations en théorie des probabilités comme les *chaînes de Markov.*

L'objectif principal de ce chapitre est la méthode du Pivot : Décomposer une matrice rectangulaire A en un produit de la forme $A = ER$, où R est échelonnée réduite par lignes et E est un produit de matrices élémentaires.

2 Ensembles de matrices

Notation : Dans ce chapitre on notera $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ces ensembles sont ce que l'on appelle des **corps**.

PROPOSITION 1
*Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ des entiers. Une **matrice** M à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times p$ est un tableau de $n \times p$ nombres dans $\mathbb{K}$.*
*Ces nombres, $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, sont appelés **coefficients** de la matrice.*
L'indice $i \in \{1, \dots, n\}$ indique la ligne, et l'indice $j \in \{1, \dots, m\}$ indique la colonne.
On le note aussi $M = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ (ou $M = (a_{i,j})_{i,j}$ en abrégé).
*Le nombre $a_{i,j}$ est le **coefficient ligne** i **colonne** j de M.*
Une matrice $M = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ à n lignes et p colonnes se représente comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots a_{i,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots a_{n,p} \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 2
Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$.

- *On définit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
- *On définit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices **carrées** de taille $n \times n$, à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
- *On définit $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices **lignes** et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices **colonnes**, à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

3 Opérations matricielles

Vous avez déjà rencontré au lycée les opération d'addition et de multiplication par un scalaire (un nombre) sur les vecteurs.

Ce type d'opération s'applique également à l'ensemble des matrices.

Définition 3 (**Multiplication par un scalaire**)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit la multiplication de la matrice A par le scalaire λ, notée $\lambda.A$, comme la matrice dont les coefficients $(c_{i,j})$ valent :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, p\},\ c_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}.$$

Exemple 4 — *Pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\lambda = 2$ *on a* $\lambda.A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Définition 5 (**Addition de matrices**)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit la somme de A et B, notée $A + B$, comme la matrice $(c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les coefficients vérifient :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p,\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Exemple 6 — *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *alors* $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Risque d'erreur
Il est fondamental de vérifier que les matrices qu'on veut additionner soient de même taille. Par exemple, le calcul suivant n'a pas de sens : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

En général on a la propriété suivante qui généralise les calculs de l'exemple précédent.

Proposition 7 (**Propriétés de l'addition matricielle**)
Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a :
— $A + B = B + A$. *(L'opération + est commutative)*
— $A + (B + C) = (A + B) + C$. *(L'opération + est associative)*

Démonstration —*Sur feuille.*

Proposition 8 (**Propriétés de la multiplication par un scalaire**)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $(\lambda + \mu).A = \lambda.A + \mu.A$
2. $(\lambda \times \mu).A = \lambda.(\mu.A)$
3. $\lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B$.

Démonstration —*Admis.*

Définition 9 (**Combinaison linéaire de matrices**)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
*On appelle une **combinaison linéaire des matrices** A **et** B une matrice M de la forme :*

$$M = \lambda.A + \mu.B \qquad \text{pour} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

EXEMPLE 10 — *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
La matrice suivante est une combinaison linéaire de A *et* B *dans* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *:*

$$M = 1.A + i.B = \begin{pmatrix} 1-i & 1+2i \\ -2i & -1 \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 11
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.
On définit la ***matrice nulle*** *de* $\mathcal{M}_{n,p}(K)$*, notée* $0_{n,p}$ *(ou* 0*), comme la matrice* $(0)_{i,j}$.
C'est la matrice $n \times p$ *dont tous les coefficients sont nuls.*

On retrouve alors que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ on a $A + 0_{n,p} = A$, $A + (-A) = 0_{n,p}$, $\lambda.0_{n,p} = 0_{n,p}$. Pour démontrer une égalité entre ces matrices, on montre cela pour leurs coefficients.

PROPOSITION 12
Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients.
Pour $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, on a* $A = B$ *si et seulement si ,* $\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$*,* $a_{i,j} = b_{i,j}$.

MÉTHODE 13 (**Montrer que deux matrices sont égales**)
Pour montrer que deux matrices A *et* B *sont égales :*
Pour tous $1 \leq i \leq n$*,* $1 \leq j \leq p$*, on écrit les valeurs de* $a_{i,j}$ *et* $b_{i,j}$.
Puis, on montre que $a_{i,j} = b_{i,j}$.

3.1 Matrices élémentaires

Une première famille de matrices que nous utiliserons de temps en temps est celle des matrices élémentaires.

DÉFINITION 14 (**Matrices élémentaires**)
Soient $n, p \in \mathbb{N}$*, et* $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, p\}$.
On définit la ***matrice élémentaire*** $E_{i,j} = (e_{k,l}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *par :*

$$e_{k,l} = \left\{ \begin{array}{r} 1, \text{ si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

EXEMPLE 15 — *Dans* $\mathbb{M}_{2,3}(\mathbb{K})$*, on a :*

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La propriété principale de ces matrices est la suivante. Nous la reverrons dans le chapitre sur les espaces vectoriels.

PROPOSITION 16
Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *s'écrit de manière unique comme combinaison linéaires des matrices de la forme* $E_{i,j}$.
Pour $M = (m_{i,j})_{i,j}$*, on a :* $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} E_{i,j}$.

DÉFINITION 17 (**Symbole de Kronecker**)
Soient $i, j \in \mathbb{N}$.
On définit le symbole de Kronecker d'indice (i,j), noté $\delta_{i,j}$*, par :*

$$\delta_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{array} \right. .$$

Remarque 18 — *Pour la matrice élémentaire $E_{i,j} = (e_{k,l})_{k,l}$, on a : $e_{k,l} = \delta_{i,k}.\delta_{j,l}$.*
En effet, le coefficient $e_{k,l}$ vaut 1 si $k = i$ et $j = l$, et vaut 0 sinon.

En plus d'une addition et d'une multiplication par un scalaire (comme les vecteurs), on peut définir un produit entre deux matrices. Cette définition est un peu moins simple, mais se comprend bien visuellement.

3.2 Produit de deux matrices, propriétés

Définition 19
*Soient $\mathbb{K}$ un corps et $p, q, r \in \mathbb{N}^*$. On définit le **produit** de deux matrices*

$$A = (a_{i,k})_{i,k} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \text{ et } B = (b_{k,j})_{k,j} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}),$$

noté $A \times B$ ou AB, comme la matrice :

$$C = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,r]\!]} \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \text{ avec } c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k}\, b_{k,j}.$$

Remarque 20 —

1. *Le produit AB n'a de sens que si le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B. (taille (p, q) multiplié par taille (q, r) donne taille (p, r))*
2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si A et B appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors le produit $A \times B$ est bien défini et est aussi un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
3. *Dans le calcul de $c_{i,j}$ interviennent les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B :*

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & & b_{k,j} & & b_{k,r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{q,1} & \dots & b_{q,j} & \dots & b_{q,r} \end{pmatrix} \\
 & & \downarrow \\
\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,k} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & & \dots & c_{1,r} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & \boxed{c_{i,j}} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{p,1} & \dots & & \dots & c_{p,r} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Exemple 21 —

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 9 & -4 \\ 12 & -9 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ n'a pas de sens.

3. Le produit d'une matrice carrée et d'une matrice colonne est une matrice colonne. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple permet de remarquer que le produit de deux matrices non-nulles peut être une matrice nulle. Ainsi :

$$A\,X = 0 \not\Longrightarrow A = 0 \quad \text{ou} \quad X = 0.$$

Exercice 1 — *Soient* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. *Calculer les produits suivants en précisant à chaque fois la taille des matrices :* AX, AY *et* AB.

Remarque 22 —

1. *Le produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne de même longueur est une matrice* 1×1 *qu'on identifie à un scalaire. Par exemple :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14) = 14.$$

2. *Le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne de même longueur est une matrice carrée. Par exemple :*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 — *Calculer les deux produits*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 23 (**Propriétés du produit matriciel**)
Soient $\mathbb{K}$ *un corps et* $p, q, r, s \in \mathbb{N}^*$. *Soient* $A, A' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *On a :*

1. $A\,(\lambda\,B) = \lambda\,(A\,B)$.
Le produit matriciel et la multiplication par un scalaire commutent.
2. $A\,(B + B') = (A\,B) + (A\,B')$ *et* $(A + A')\,B = (A\,B) + (A'\,B)$.
Le produit matriciel est ***distributif*** *à gauche et à droite par rapport à l'addition de matrices.*
3. $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$.
On dit que le produit matriciel est ***associatif****. Le résultat d'une suite de produits matriciels ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les produits.*

Démonstration — Soient $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$, $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,r]\!]}$, $B' = (b'_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,r]\!]}$ et $C = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,r]\!]\times[\![1,s]\!]}$ quatre matrices. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors les égalités :

1.
$$\begin{array}{rcl} A(\lambda B) & = & (\sum_{k=1}^{q} a_{i,k}\lambda b_{k,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,r]\!]} \\ & = & (\lambda \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,r]\!]} \\ & = & \lambda(AB). \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcl} A(B+B') & = & (\sum_{k=1}^{q} a_{i,k}(b_{k,j}+b'_{k,j}))_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,r]\!]} \\ & = & (\sum_{k=1}^{q} a_{i,k}b_{k,j} + \sum_{k=1}^{q} a_{i,k}b'_{k,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,r]\!]} \\ & = & AB+AB'. \end{array}$$

L'autre égalité se démontre de la même manière.

3.
$$\begin{array}{rcl} (AB)C & = & (\sum_{l=1}^{r}(\sum_{k=1}^{q} a_{i,k}b_{k,l})c_{l,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,s]\!]} \\ & = & (\sum_{k=1}^{q} a_{i,k}(\sum_{l=1}^{r} b_{k,l}c_{l,j}))_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,s]\!]} \\ & = & A(BC) \end{array}$$

□

PROPOSITION 24
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \geq 1$, et $1 \leq i, j \leq n$. On a :

$$E_{i,j}\, E_{k,l} = \delta_{j,k}\, E_{i,l}.$$

Démonstration — On calcule avec soin le produit des deux matrices élémentaires.

3.3 Transposition

PROPOSITION 25
Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et $M = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
*On définit la **transposée** de M, notée M^t, comme la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients $(b_{k,l})_{1\leq k\leq p, 1\leq, l\leq n}$ vérifient*

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p,\ b_{i,j} = a_{j,i}.$$

EXEMPLE 26 — *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour transposée la matrice ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$*

REMARQUE 27 —
1. *Transposer une matrice transforme ses lignes en colonnes (et ses colonnes en lignes).*
2. *La transposée est parfois notée ${}^tM$.*
3. *La transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne.*
   La transposée d'une matrice carrée est une matrice carrée.
4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice carrée. Alors les matrices carrées A et A^t :*
   (a) *ont la même diagonale ;*
   (b) *sont les symétriques l'une de l'autre par rapport à la diagonale.*

EXERCICE 3 — *Calculer la transposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$*

PROPOSITION 28
Soiet $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors :
1. *On a $(A+B)^t = A^t + B^t$.*
2. *Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda.A)^t = \lambda.(A^t)$.*
3. *On a $(AC)^t = C^tA^t$.*
4. *On a $(A^t)^t = A$*

4 Ensemble des matrices carrées

4.1 Quelques matrices carrées particulières

Définition 29 (**Matrice nulle et identité**)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

- *La matrice identité de taille n, notée $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Elle est de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *La matrice nulle est la matrice de taille n, notée 0_n est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.*

Proposition 30
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A.I_n = I_n.A = A$ et $A.0_{n,n} = 0_{n,n}.A = 0$.
La matrice identité est l'élément "1" de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et la matrice nulle est l'élément "0" de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Démonstration — *On vérifie les calculs.*

Risque d'erreur
*En général le produit de deux matrices **n'est pas commutatif** (AB n'est pas forcément égal à BA).*
Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 — *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3.*

Définition 31 (**Puissances d'une matrice carrée**)
*Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Pour $k \in \mathbb{N}$ on définit la **puissance k-ième** de A, notée A^k, par :*

$$\begin{array}{lcl} A^0 & = & I_n \\ A^k & = & A \times A \times \ldots \times A \text{ (k fois), si } k > 0 \end{array}$$

Remarque 32 — *On trouve que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k, l \in \mathbb{N}$, on a :*

$$A^k A^l = A^{k+l}.$$

Exercice 5 — *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer A^6.*

Exercice 6 — *Soit $A = \begin{pmatrix} (-2) & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^8.*

4.2 Matrices triangulaires et diagonales

Définition 33 (**Matrices triangulaires**)
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que M est :
- ***triangulaire supérieure*** *si pour tout $1 \le j < i \le n$ on a $a_{i,j} = 0$.*
- ***triangulaire inférieure*** *si pour tout $1 \le i < j \le n$ on a $a_{i,j} = 0$.*

*Si M est triangulaire supérieure ou inférieure, on dit qu'elle est **triangulaire**.*

Calculer un produit de matrices $A \times B$ (matrices p, q et q, r) demande beaucoup de calculs.
On a $p \times r$ coefficients, qui s'écrivent chacun comme une somme de q termes.
Pour des matrices carrées $n \times n$, cela fait n^3 opérations.
Ainsi, calculer les puissances d'une matrice M est en général long (après M^2, M^3).
On s'intéresse ainsi aux familles de matrices dont le calcul des puissances est très simple. La famille la plus facile est celle des matrices diagonales.

Définition 34 (**Matrices diagonales**)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
*On dit que A est **diagonale** si, $\forall (i,j)$ avec $i \neq j$, on a $a_{i,j} = 0$. C'est-à-dire, si A est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice se note $Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de taille $n \times n$.

Proposition 35
Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice diagonale. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Alors, la matrice D^k est encore une matrice diagonale.
Pour $D = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a $D^k = Diag(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

Exemple 36 — *Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

4.3 Matrices symétriques et antisymétriques

Proposition 37
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
*On dit que la matrice M est **symétrique** si ${}^tM = M$.*
*On dit que M est **antisymétrique** si $M^t = -M$.*

Exemple 38 — *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique de taille 2.*

Exercice 7 — *Existe-t-il une matrice A de taille 2 qui soit symétrique et triangulaire supérieure ?*

4.4 Formule du binôme

Il est possible d'étendre la formule du binôme aux matrices carrées, en ajoutant la condition que celles-ci commutent ($AB = BA$)

Proposition 39
*Soient $A, B \in \mathcal{M}_n\mathbb{R}$ des matrices telles que $AB = BA$ (A et B **commutent**).*
Alors, pour tout $p \geq 1$, on a :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}.A^k.B^{p-k}$$

Démonstration —*Identique à celle de la formule du binôme pour les complexes. (Preuve par récurrence sur p.)*

Exemple 40 — *Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*
On a $AB = BA = B$ car $A = I_2$ donc les matrices commutent et on peut appliquer la formule du binôme.
Remarquons que $B^2 = 0_2$ et que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $A^m = A = I_2$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a donc :

$$\begin{aligned} (A+B)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}.A^{p-k}.B^k && (1)\\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}.B^k && (2)\\ &= \binom{p}{0}.B^0 + \binom{p}{1}.B^1 + 0 = I_2 + p.B && (3)\\ &= \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && (4) \end{aligned}$$

Méthode 41 (**Calculer** $(A+B)^p$)
Pour calculer la puissance p d'une somme de matrices $A + B$ en appliquant la formule du binôme :

1. *On s'assure que A et B vérifient $AB = BA$.*
2. *On calcule les puissances de A et de B. En général leur forme est simple dans les exercices.*
3. *On calcule les coefficients binomiaux $\binom{k}{p}$, pour $0 \leq k \leq p$.*
4. *On applique la formule du binôme.*

Remarque 42 — *Pour A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ne peut en général pas appliquer les formules du binôme pour développer $(A+B)^2$, $(A+B)^m$ ou pour factoriser A^2-B^2,A^m-B^m. On a par exemple $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$, mais on ne peut pas simplifier plus cette expression car A et B ne commutent pas forcément (on ne sait rien entre AB et BA).*

Remarque 43 — *Prenons $a \in [0, 1]$ et $b = \sqrt{1-a^2}$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. On a alors :*

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab-ba \\ ab-ba & b^2+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ainsi, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il existe une infinité de matrices A telles que $A^2 = I_2$. (alors que l'équation $x^2 = 1$ ne possède que deux solutions dans $\mathbb{R}$)

4.5 Matrices carrées inversibles

Maintenant que nous avons une multiplication sur l'ensemble des matrices carrées, nous pouvons définir les matrices inversibles : celles qui admettent un inverse pour la multiplication.

Définition 44 (**Matrices inversibles, droupe linéaire**)
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
*On dit que A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tell que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.*
*Une telle matrice B est appelée **l'inverse de** A. On la note $B = A^{-1}$.*
*L'ensemble des **matrices inversibles** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $Gl_n(\mathbb{R})$.*
*Cet ensemble est appelé le **groupe linéaire** de taille n (Gl_n).*

Proposition 45
Soit $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.
Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $BA = AB = I_n$.
L'inverse d'une matrice est unique.
Démonstration —

Remarque 46 — *Une matrice inversible A possède un unique inverse, ce qui justifie bien dans la définition de parler de "l'inverse" de A et d'employer la notation A^{-1}.*

Proposition 47
Soit $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.
Alors, A est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $BA = I_n$ ou $BA = I_n$.

Méthode 48 (**Montrer qu'une matrice est inverse d'une autre**)
Soient A, B deux matrices carrées.
Pour montrer que A est inversible d'inverse B, il suffit de calculer le produit AB ou le produit BA, et de vérifier que cela donne l'identité I_n.
Avec la proposition précédente, calculer un seul de ces produits suffit.

Exemple 49 — *La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$*

Proposition 50
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors :

1. *La matrice I_n est inversible, d'inverse elle-même.*
2. *La matrice nulle n'est pas inversible.*
3. *Pour A, B des matrices non-nulles telles que $AB = 0$, les matrices A et B ne sont pas inversibles.*

Démonstration —*Sur feuille.*

Théorème 51 (**Propriétés du groupe linéaire**)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles. Alors :

1. *AB est inversible, d'inverse $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.*
2. *$(A^{-1})^{-1} = A$.*

Démonstration — *On utilise la définition de l'inverse d'une matrice.*

Risque d'erreur

La somme de deux matrices inversibles n'est, en général, pas inversible. Par exemple, $I_3 + (-I_3) = 0$ n'est pas inversible.

Proposition 52 (**Inverse et transposée**)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
Alors, on a $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. **Démonstration** —*On a $(A^t).(A^{-1})^t = (A^{-1}.A)^t = I_n^t = I_n$, ce qui prouve le résultat.*

4.6 Matrices de taille 2×2 inversibles

Proposition 53
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
La matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
Si $ad - bc \neq 0$, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration — *Posons $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On calcule :*

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

$$BA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da-bc & 0 \\ 0 & da-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2.$$

Donc, si $ad - bc \neq 0$, en posant $C = \frac{1}{ad-bc}B$, on a $AC = CA = I_2$. Donc A est inversible d'inverse C.
Supposons maintenant que $ad - bc = 0$. On a alors $AB = 0$. Supposons par l'absurde que A est inversible.
Alors on a $B = A^{-1}.A.B = 0$. Donc $B = 0$, donc $a = b = c = d = 0$. Donc $A = 0$.
Mais la matrice nulle n'est pas inversible, contradiction. Donc, A n'est pas inversible. □

5 Systèmes linéaires et matrices

5.1 Systèmes linéaires de n équations à p inconnues

Définition 54 (**Équation linéaire à p inconnues**)
Soient $p \in \mathbb{N}^\star$, ainsi que $a_1, a_2, \dots, a_p, b \in \mathbb{K}$.
*On appelle **équation linéaire à p inconnues**, d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{K}$, une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$.*

Exemple 55 — *L'équation $x + y + z + t = -1$ est une équation linéaire à 4 inconnues x, y, z, t dont $(1, 0, 0, -2)$ et $(1, 1, 1, -4)$ sont des solutions.*

Définition 56 (**Système linéaire**)
*Un système linéaire à **n lignes** et **p inconnues** est un système de la forme :*

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \quad (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \quad (L_n) \end{array}\right.$$

*Les nombres $a_{i,j}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, p\}$) sont appelés les **coefficients** du système. Les nombres b_i sont appelés les **seconds membres** du système.*

*Les **inconnues** sont les nombres $x_1, \dots, x_p$.*
Une solution du système (S) est un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$.

Remarque 57 — *On peut voir un système linéaire à n lignes et p inconnues comme n équations linéaires L_i pour $i \in [\![1;n]\!]$ vérifiées simultanément.*

Définition 58

- ***Résoudre** un système linéaire (S) de n lignes à p inconnues consiste à déterminer l'ensemble des $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui sont solution du système (S).*
- *On appelle aussi un système linéaire à n lignes et p inconnues un système $\boldsymbol{n} \times$ $\boldsymbol{p}$.*
- *Un système qui n'a pas de solutions est dit **incompatible**.*
- *Un système qui a des solutions est dit **compatible**.*

Application à la Physique

En physique les équations de Laplace pour déterminer la circulation de la chaleur à l'intérieur d'un objet passe dans certains cas par la résolution de ce système de taille $n \times n$.

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & b_1 & (L_1) \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & +0 & \cdots & + & 0 & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & & & \\ 0 & + & 0 & + & \cdots & + & -x_{n-1} & + & 2x_n & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

Pour résoudre ce système on peut utliser une méthode de résolution générale que nous allons rencontrer dans la prochaine section. Ce type de résolution sera abordé à l'aide de Python en TP d'informatique.

5.2 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Un système linéaire de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{cccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

peut se représenter comme une équation matricielle $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots a_{i,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots a_{n,p} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définition 59 (**Matrice augmentée associée à un système linéaire**)
Soit (S) le système linéaire de taille $n \times p$:

$$(S)\left\{\begin{array}{cccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

La ***matrice augmentée associée à*** (S)*, notée* $(A \mid b)$ *est la matrice de taille* $n \times (p+1)$ *dont les coefficients sont les suivants :*

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots a_{i,p} & b_p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots a_{n,p} & b_n \end{pmatrix}.$$

La matrice $(A \mid b)$ *est aussi appelée la* ***concaténation*** *de la matrice* A *avec la matrice* b*. (on colle les deux matrices)*

Exemple 60 — *La matrice augmentée associée au système de taille* 2×3

$$(S) \begin{cases} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 4x & + & y & - & z & = & -12 \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) *est* $(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & -12 \end{pmatrix}$.

5.3 Matrices élémentaires

Nous définissons de nouvelles matrices carrées, les **matrices élémentaires**. Elles nous serviront pour utiliser la méthode du Pivot.

Définition 61 (**Matrices de transvection**)
Soit $a \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$ *et* $1 \leq j \leq m$.
On définit la ***matrice de transvection*** $T_{i,j}(a) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$*, par :*

$$T_{i,j}(a) = I_n + a.E_{i,j}$$

Définition 62 (**Matrices de transposition**)
Soient $1 \leq i, j \leq n$.
On définit la ***matrice de transpostion*** $T_{i,j}$ *comme la matrice obtenue en échangeant les colonnes* C_i *et* C_j *de la matrice identité* I_n.
C'est-à-dire : $T_{i,j} = I_n + E_{j,i} + E_{i,j} - E_{i,i} - E_{j,j}$.

Définition 63 (**Matrices de dilatation**)
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $1 \leq i \leq n$.
On définit la ***matrice de dilatation*** $D_i(\lambda)$ *par :*

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1).E_{i,i}$$

Exemple 64 — *Dans* $M_3(\mathbb{R})$ *on a* $D_2(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Avec cela, définissons les opérations élémentaires sur un système linéaire (S).

Définition 65 (**Opérations élémentaires**)
Soit (S) *un système linéaire de taille* $n \times p$*, d'équation associée* $AX = b$*. On note* $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ *les lignes du système* (S)*.*
On définit les ***opérations élémentaires*** *comme les opérations suivantes :*

- *Permuter les lignes* L_i *et* L_j *:* $L_i \leftrightarrow L_j$.

- *Multiplier la ligne L_i par $\lambda \in \mathbb{K}$ non-nul : $L_i \leftarrow \lambda.L_i$.*
- *Ajouter $\lambda.L_j$ à la ligne L_i : $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$ (pour $i \neq j$).*

Théorème 66 (**Action des matrices élémentaires**)
Soit (S) un système linéaire d'équation associée $AX = b$. On pose $M = (A \mid b)$. On a :

1. *La matrice $T_{i,j}(a)M = (A' \mid b')$ est la matrice associée au système $\mathcal{S}'$, obtenu en appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + a.L_j$ à $\mathcal{S}$.*
2. *La matrice $T_{i,j}M = (A' \mid b')$ est la matrice associée au système $\mathcal{S}'$, obtenu en appliquant l'opération élémentaire $L_j \leftrightarrow L_i$ à $\mathcal{S}$.*
3. *La matrice $D_i(\lambda)M = (A' \mid b')$ est la matrice associée au système $\mathcal{S}'$, obtenu en appliquant l'opération élémentaire $L_j \leftarrow \lambda.L_j$ à $\mathcal{S}$.*

Proposition 67
Les matrices élémentaires sont inversibles.

Corollaire 68
Soit (S) un système linéaire, et soit (S') le système obtenu après avoir appliqué une opération élémentaire à (S).
Alors, les systèmes (S) et (S') ont les mêmes ensembles de solutions.

5.4 Méthode du Pivot, opérations élémentaires

Soit (S) un système linéaire, d'équation associée $AX = b$. Si la matrice A est "**échelonnée**" (en forme d'escalier), alors il est facile de trouver les solutions de (S) en "remontant" le système. Pour résoudre un système linéaire quelconque, on lui applique une succession d'opérations élémentaires jusqu'à arriver à un système qui est "échelonné".
C'est ce qu'on appelle *la méthode du Pivot* (dit de Gauss), déjà rencontrée au chapitre *Calculs algébriques*.

Méthode 69
On travaille sur la matrice augmentée $(A \mid b)$ associée à (S). On procède par étape :

- *Étape 1 : On échange les lignes de la matrice de manière à ce que les premières lignes contiennent des coefficients non nuls.*
  On fait en sorte que la première ligne ait un coefficient non-nul le plus à gauche possible.
- *Étape 2 : Si la ligne L_1 possède un coefficient non-nul dans sa première colonne.*
  Alors, pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, on effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}}.L_1$.
  Cela annule les coefficients dans la première colonne aux lignes $L_2, \ldots, L_n$.
- *Étape 3 : On recommence les étapes (1) et (2) au système $(n-1) \times (p+1-1)$ formé par les lignes $(L_i)_{2 \leq i \leq n}$, jusqu'à arriver à $n = 1$ ou $p = 1$.*
- *Étape 4 : la matrice obtenue est "échelonnée" (la matrice a une forme d'escalier).*
  On distingue alors deux cas :
  • S'il existe des lignes dans la matrice finale dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la dernière colonne, alors le système n'a pas de solutions.
  • Si ce n'est pas le cas, alors le système (S) admet au moins une solution.
- *Si (S) possède des solutions, on prend le système d'équations associé à la matrice obtenue.*
  Puis, on "remonte" les lignes (on résout chaque ligne en partant de la dernière et en allant vers la première), afin de trouver toutes les solutions de (S).

Exemple 70 — *Résolvons par l'algorithme de Gauss le système suivant :*

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 2y & + & z & = & 1 \quad (L_1) \\ x & - & y & + & z & = & 0 \quad (L_2) \\ x & + & y & + & z & = & 3 \quad (L_3) \end{array} \right.$$

5.5 Exemples d'utilisation de la méthode du Pivot

Exemple 71 — *A*

ppliquer la méthode du Pivot sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

On a : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

On a bien obtenu une matrice échelonnée.
Pour B cette matrice échelonnée, les opérations effectuées donnent :

$$E(3,2,3)M(2,\frac{1}{3})E(3,1,-2)E(1,2,1)A = B.$$

Exemple 72 — *A*

ppliquer la méthode du Pivot sur $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

On a : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{-6}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.$$

On a bien obtenu une matrice échelonnée. Pour B cette matrice échelonnée, les opérations effectuées donnent : $E(3,2,-2)M(2,\frac{-1}{6})E(2,1,-2)S(1,3)A = B$.

Si l'on avait effectué $L_1 \leftrightarrow L_2$ *dans l'exemple précédent, on aurait obtenu une matrice échelonnée différente. Cela ne dérange pas.*

Exemple 73 — *(*

Résolution d'un système linéaire avec la méthode du Pivot, sans passer par les matrices associées))

Résoudre le système linéaire : $(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$.

On utilise la méthode du Pivot :

$$(\mathcal{S}) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ 0 & - & 10x_2 & + & 11x_3 & = & -2 \\ 0 & - & 13x_2 & + & 14x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}) \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{-10}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 13L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ 0 & + & x_2 & + & \frac{-11}{10}x_3 & = & \frac{1}{5} \\ 0 & + & 0 & + & (14 + \frac{-143}{10})x_3 & = & -2 + \frac{13}{5} \end{array}\right. \quad (\textit{système échelonné})$$

$$(\mathcal{S}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & = & 1 \\ 0 & + & x_2 & + & \frac{-11}{10}x_3 & = & \frac{1}{5} \\ 0 & + & 0 & - & \frac{3}{10}x_3 & = & \frac{3}{5} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 - 4x_2 + 5x_3 \\ x_2 = \frac{1}{5} + \frac{11}{10}x_3 \\ x_3 = \frac{-10}{5} = -2 \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x_1 &= 1 - 4x_2 + 5x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{5} + \frac{11}{10}(-2) = \frac{-10}{5} = -2 \\ x_3 &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 &= 1 - 4(-2) + 5(-2) = -1 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= -2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ *est* $\{(-1,-2,-2)\}$.

5.6 Calcul de l'inverse d'une matrice avec la méthode du Pivot

Proposition 74
Soient $\mathbb{K}$ *un corps,* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si, en appliquant la méthode du Pivot à A*, on obtient à une étape une matrice dont une ligne est nulle, alors* A *n'est pas inversible.*
Si, en appliquant la méthode du Pivot à A*, on obtient une matrice échelonnée sans ligne nulle, alors* A *est inversible.*

Exemple 75 — *L*

a matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ *est-elle inversible ?*

On applique la méthode du Pivot à A *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 6 \\ 0 & 11 & 6 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a obtenu une matrice avec la ligne nulle pendant la méthode du Pivot. Donc A *n'est pas inversible.*

Remarque 76 — *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *S'il existe des matrices élémentaires* $M_1, \dots, M_r$ *telles que* $M_1 \dots M_r A = I_n$*, alors on a* $A = (M_1 \dots M_r)^{-1}$. *Donc* A *est inversible et* $M_1 \dots M_r = A^{-1}$.

Proposition 77
Soient $\mathbb{K}$ *un corps,* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On pose $B = (A \mid I_n) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$*, la matrice obtenue en "collant" les matrices* A *et* I_n. *C'est-à-dire :*

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Si, en appliquant la méthode du Pivot à B*, on obtient une matrice de la forme* $(I_n \mid M)$*, alors on a* $M = A^{-1}$.

Méthode 78 (**Déterminer si une matrice A est inversible, et calculer son inverse**)

1. *On applique la méthode du Pivot à la matrice* $(A \mid I_n)$.
2. *Si à un moment on obtient une matrice avec une ligne nulle, alors la matrice* A *n'est pas inversible.*
   Sinon, on continue la méthode du Pivot.
3. *Lorsqu'on arrive à une matrice de la forme* $(I_n|M)$.
   Alors, la matrice A *est inversible, et* $A^{-1} = M$.

Quand la matrice A est très grande ou que l'on ne connaît pas explicitement ses coefficients, il faudra utiliser d'autres méthodes pour dire si elle est inversible et pour calculer son inverse.

Exemple 79 — *M*

ontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible, et calculer son inverse.

On applique la méthode du Pivot à la matrice $B = (A \mid I_3)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{11} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{-23}{11} & \frac{-3}{11} & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{11}{4} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{6}{11} L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{27}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{11} + \frac{23.6}{4.11} & \frac{1}{11} + \frac{3.6}{4.11} & \frac{-6}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-23}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{27}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-11}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-23}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-23}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{11}{4} \end{pmatrix}$$

On a obtenu une matrice de la forme $(I_3 \mid M)$. Donc A est inversible et $A^{-1} = M$, avec :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 14 & 2 & -6 \\ -23 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 — *À l'aide de la méthode précédente, déterminer l'inverse de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

— Définition d'une matrice à coefficients dans un corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Coefficient $m_{i,j}$ d'une matrice M. Ecriture $M = (m_{i,j})_{i,j}$. Ensemble de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ensemble de matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Connaître les matrices particulières : nulle $O_{n,p}$, identité I_n, élémentaires $E_{i,j}$.

— Formes particulières de matrices : triangulaire (supérieure ou inférieure), diagonale, symétrique, antisymétrique, inversible.

— Opérations matricielles : somme, multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$, produit de matrices, puissance de matrices.
Savoir réaliser les opérations matricielles à l'aide des coefficients des matrices. ($(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$, $(\lambda A)_{i,j} = \lambda.A_{i,j}$, $(A.B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j}$).
Savoir représenter au brouillon un produit de matrices correctement, et faire attention aux tailles de matrices.

— Le produit matriciel n'est en général pas commutatif.

— Lorsque A et B commutent, toutes les relations algébriques connues s'appliquent (identités remarquables, formule du binôme pour $(A+B)^n$, $A^n - B^n$).

— Calcul des puissances d'une matrice (par la formule du binôme, ou par récurrence).

— Transposée d'une matrice. Transposée et produit (${}^t(A.B) = B^t.A^t$)

— Matrice carrée inversible. Définition. Une matrice inversible possède un unique inverse, noté M^{-1}. Ensemble $Gl_n(\mathbb{K})$. Proposition : $M \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi il existe $M' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $MM' = I_n$ **ou** $M'M = I_n$.
Un produit de matrices inversibles est inversible. On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

— Cas des matrices $2x2$: Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, M est inversible ssi $\det(M) = ad - bc$ est non-nul. Et, on a $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

— Système linéaire de n équations à p inconnues. Correspondance entre système linéaire (S) et équation matricielle $MX = B$.
Résolution d'un système linéaire échelonné (pas de solutions, une solution, ou une infinité de solutions).
Résolution d'un système linéaire avec la méthode du Pivot sur les lignes.
Savoir reconnaître la forme des solutions d'un système linéaire.

— Résolution du système (S) en échelonnant la matrice concaténée $(M|B)$.

— Matrices échelonnées. Concaténation de deux matrices. Opérations élémentaires sur les lignes.
Méthode du Pivot sur les lignes pour échelonner une matrice M.

— Méthode du Pivot et inverse : Une matrice carrée M est inversible ssi elle s'échelonne en une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous non-nuls.
En échelonnant la matrice $(M|I_n)$ de la forme $(I_n|M')$, on a $M' = M^{-1}$.