Chapitre 1
Calculs algébriques

Table des matières

Vidal AGNIEL

1 Introduction

On présente dans ce chapitre les symboles $\sum$ et Π qui permettent de manipuler des sommes et des produits de nombres. On étudiera les propriétés de ces opérateurs ainsi que certaines valeurs remarquables (sommes télescopiques, géométriques,...). On introduit la définition et les propriétés des coefficients binomiaux, qui sont très présents dans le dénombrement et en analyse.
Sont ensuites abordés des rappels de classe de terminale sur les inégalités dans $\mathbb{R}$, et la résolution par la méthode du Pivot dit de Gauss des systèmes linéaires de taille 2×2.

L'ensemble des résultats de ce chapitre sont valables pour des suites de nombres réels $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tout **comme celles de nombres complexes**. Cela nous permettra de réaliser des calculs de dénombrement et de probabilités plus tard dans l'année.

2 Inégalités dans $\mathbb{R}$

2.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Il existe dans $\mathbb{R}$ un ordre naturel que l'on note "$\leq$". On peut le construire de façon géométrique, via des vecteurs, en suivant les étapes suivantes :

— On considère un point O et un vecteur $\vec{i}$ non-nul. Cela définit une droite $\mathcal{D}$, d'origine O, et de vecteur directeur $\vec{i}$. On a ainsi un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i})$ de la droite $\mathcal{D}$.
Cette droite $\mathcal{D}$ s'identifie à la droite des réels $\mathbb{R}$ grâce au repère $\mathcal{R}$.

— On pose le point $A = O + \vec{i}$ (le translaté de O par le vecteur $\vec{i}$).
On considère alors que A est à droite de O. Cela permet de définir l'ensemble des points "à droite" de O ceux "à gauche" de O.

— Une fois ces côtés définis, prenons x un réel. On dit que x est positif, noté $0 \leq x$, si le point P de coordonnées x se trouve "à droite" de O.

— Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on définit la relation "x est plus petit que y, notée $x \leq y$, si on a $0 \leq y - x$. C'est-à-dire si le point Q de coordonnées $y - x$ est "à droite" de O.

Cette relation entre deux nombres réels vérifie trois propriétés fondamentales. Ce sont les propriétés pour une notion d'ordre :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$. (Réflexivité)
2. Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$. (Transitivité)
3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$. (Antisymétrie)

Avec cette relation d'ordre, il existe ce que l'on appelle l'ordre strict sur $\mathbb{R}$, noté $<$. On a $x < y$ si ($x \leq y$ et $x \neq y$). L'ordre strict n'est pas réflexif ni antisymétrique.

2.2 Intervalle de $\mathbb{R}$

L'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ permet de définir les intervalles. Ce sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ les plus importants.

Définition 1 (**Intervalle**)
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Un ***intervalle de*** $\mathbb{R}$ *est un ensemble de la forme suivante :*

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

On définit également les intervalles infinis :

- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

Les intervalles $[a, b], [a, +\infty[,]-\infty, b]$ sont dits fermés, et les intervalles $]a, b[,]a, +\infty[,]-\infty, b[$ sont dits ouverts. $]a, b]$ et $[a, b[$ ne sont ni ouverts ni fermés.

2.3 Compatibilité de l'ordre avec les opérations de base

On a sur $\mathbb{R}$ quatre opérations de base : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.
Cette première proposition est le B-A-BA des règles sur les inégalités.

Proposition 2
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Alors, on a :

1. $x + z \leq y + z$
2. *pour tout* $k \geq 0$, $kx \leq ky$
3. $0 \leq x$ *si et seulement si* $-x \leq 0$.

Démonstration — Sur feuille.

Cette première démonstration utilise une méthode élémentaire mais très efficace pour démontrer une inégalité :

Méthode 3 (**Démontrer une inégalité via une soustraction**)
Quand on a deux quantités $E(x), F(x)$, définies en fonction de x, et que l'on veut montrer que "$E(x) \leq F(x)$ pour tout $x \in A$", il est souvent très pratique de faire :

1. *Poser* $G(x) = F(x) - E(x)$.
2. *Montrer que l'on a* $0 \leq G(x)$ *pour tout* $x \in A$.

*En effet, on a $E(x) \leq F(x)$ **si et seulement si** $0 \leq F(x) - E(x)$.*

La proposition suivante est plus détaillée, et étend la multiplication d'une inégalité par un nombre négatif. Dans ce dernier cas, les inégalités changent de sens.

Proposition 4
Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *alors* $x + y \leq z + t$.
2. *Si* $0 \leq x \leq y$ *et* $0 \leq z \leq t$ *alors* $0 \leq xz \leq yt$.
3. *On a* $x \leq y$ *si et seulement si* $-x \geq -y$.
4. *Si* $x \leq y$ *et* $z \leq 0$ *alors* $xz \geq yz$. *(Multiplication par un nombre négatif)*

Démonstration — *On utilise à nouveau la définition de la relation $\leq$.*

Exemple 5 — *Si $x \leq 7$ et $y \leq 3$ alors par la proposition précedente on a $xy \leq 21$.*

Exemple 6 — *Soient x et y deux nombres réels tels que $0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$ et $-1 \leq y \leq -\dfrac{1}{2}$.*
Majorer l'expression $x^2 - 3xy - y^2$.

Exercice 1 — *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$ et $-1 \leq y \leq -\dfrac{1}{2}$.*
Majorer l'expression $x^2 - 3xy - y^2$.

2.4 Valeur absolue

Lorsque l'on a deux points A et B sur la droite réelle (ou dans le plan réel, ou dans l'espace), on peut se demander quelle est la distance entre ces deux points.
Sur $\mathbb{R}$, cette notion de distance est reliée à la notion de valeur absolue.

Définition 7 (**Valeur absolue**)
Soit $x \in \mathbb{R}$.
*On définit **valeur absolue** de x, notée $|x|$, par :*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemple 8 —

- $|-1| = 1$, $|23|$ *et* $|0| = 0$
- $|x+1| = x+1$ *si* $x \geq -1$ *et* $|x+1| = -x-1$ *si* $x < -1$

Remarque 9 —

- *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|x| \geq 0$ *et* $|-x| = |x|$
- $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$
- *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *en analysant le signe de* xy *on obtient que* $|xy| = |x| \times |y|$.

On donne maintenant une définition rigoureuse de la distance entre deux points sur la droite numérique réelle.

Définition 10 (**Distance entre deux points sur la droite réelle**)
Soient $A(x), B(y)$ deux points sur la droite numérique.
On définit la distance entre A et B, notée $d(A, B)$, par $d(A, B) = |x - y|$.
La valeur absolue permet de définir un intervalle centré en un point a et d'amplitude $h \geq 0$.

Proposition 11
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h \geq 0$.
On a $|x - a| \leq h$ si et seulement si $a - h \leq x \leq a + h$, si et seulement si $x \in [a - h, a + h]$.
Démonstration —

Remarque 12 — *Cette proposition montre donc :*

$$[a - h, a + h] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leq h\}.$$

L'interprétation géométrique est la suivante : L'intervalle $[a-h, a+h]$ est l'ensemble des points de la droite réelle dont la distance à a est inférieure ou égale à h.

Exercice 2 —

1. *Mettre sous forme d'intervalle les ensembles $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 2\}$ et $\{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 4| \leq 1\}$*
2. *Mettre l'intervalle $]-7, 2[$ sous forme d'un ensemble utilisant une valeur absolue.*

Théorème 13 (**Inégalités triangulaires**)
Soient x et y deux nombres réels. Alors, on a :

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$,
2. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Démonstration — *On regarde le carré des quantités pour obtenir le résultat.*

Les inégalités triangulaires (nous verrons pourquoi au chapitre sur les nombres complexes) sont très utiles pour démontrer d'autres inégalités que l'on utilise souvent. Même un chercheur en mathématiques peut se servir régulièrement des inégalités triangulaires.

Exercice 3 — *À l'aide d'une inégalité triangulaire montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :*

$$|(x + y)^2| \leq (|x| + |y|)^2$$

2.5 Majorants/Minorants/Maximum/Minimum d'un ensemble

Avec la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$, on peut définir la notion de majorant et de minorant.

Définition 14 (**Partie majorée/minorée**)
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est :
- ***majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in A$.*
  *On dit alors que M est un **majorant** de A.*
- ***minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq x$ pour tout $x \in A$.*
  *On dit alors que m est un **minorant** de A.*
- ***bornée** si A est à la fois majorée et minorée.*

Exemple 15 —
- *$\mathbb{N}$ est une partie minorée par 0 qui n'est pas majorée.*
- *$]-5;3[\cup]16;17+\pi]$ est une partie majorée par $17+\pi$ et minorée par -10.*

— *$\mathbb{Z}$ n'est ni majorée ni minorée.*

Remarque 16 — *Une partie majorée (respectivement minorée) n'admet pas un unique majorant (resp. minorant). Elle en a une infinité.*
Les intervalles (excepté $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ tout entier) sont des parties de $\mathbb{R}$ majorées ou minorées.

Exercice 4 — *Donner l'ensemble des majorants des parties $A=]0;2[$ et $B]-1;2]$.*

Dans certains cas il existe pour une partie de $\mathbb{R}$ un plus grand élément ou un plus petit élément.

Définition 17 (**Minimum/Maximum d'une partie**)
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.
- *Si $m \in A$ et m est un minorant de A, on dit que m est le **minimum** de A, noté $\min(A)$.*
- *Si $M \in A$ et M est un majorant de A, on dit que M est le **maximum** de A, noté $max(A)$.*

Exemple 18 —
- *-2 est le minimum de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-4=0\}$.*
- *l'intervalle $]-1;2]$ admet 2 comme maximum.*
- *l'intervalle $]-1;2[$ est borné mais n'admet ni maximum ni minimum.*

Remarque 19 — *Le dernier exemple montre que l'existence d'un majorant (respectivement minorant) pour un ensemble A n'implique pas nécessairement l'existence d'un maximum (respectivement minimum).*

Exercice 5 — *Est-ce que $[-\pi;\pi]$ admet un maximum ? un minimum ?*

3 Systèmes linéaires 2×2

On aborde dans cette section la résolution des systèmes linéaires de taille 2×2 c'est-à-dire des systèmes d'équations à deux lignes et deux inconnues. On utilise pour cela la **méthode du Pivot** (dit de Gauss). Nous la reverrons dans la suite du cours, car la méthode du Pivot permet de résoudre des systèmes linéaires aussi grand que l'on veut.

Un **système linéaire de** 2 **équations à 2 inconnues** est un système d'équations de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & e & (L1) \\ cx & + & dy & = & f & (L2) \end{array}\right.$$

où a, b, c, d, e et f sont des coefficients réels ou complexes. Les nombres x, y sont appelés **inconnues**.

Résoudre ce système consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions : l'ensemble des couples (x, y) vérifiant les deux équations $L1$ et $L2$.

Donnons un exemple de résolution de système linéaire avec la méthode du Pivot :

Exemple 20 — *On considère le système suivant, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$.*

$$(S)\left\{\begin{array}{cccccc} 2x & + & y & = & 3 & (L1) \\ 4x & - & y & = & 1 & (L2) \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 2L_1}{\iff}\left\{\begin{array}{cccccc} 4x & + & 2y & = & 6 & (L_1) \\ 4x & - & y & = & 1 & (L2) \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}\left\{\begin{array}{cccccc} 4x & - & y & = & 1 & (L1) \\ 0 & + & 3y & = & 5 & (L2) \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & - & y & = & 1 \\ & & y & = & \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{ccc} 4x & = & 1 + y = \frac{8}{5} \\ y & = & \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{ccc} 4x & = & 1 + y = \frac{8}{3} \\ y & = & \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{2}{3} \\ y & = & \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Finalement, l'ensemble des solutions du système (S) est $\mathcal{S} = \{(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})\}$. Il possède une unique solution.

Proposition 21
Soit (S) un système d'équations. Notons $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les lignes de (S).
Soient $i \neq j$ dans $\{1, \ldots, n\}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
*Appliquer les opérations suivantes au système (S) **ne change pas** l'ensemble de ses solutions :*

1. *$L_i \leftarrow \lambda L_i$, pour $\lambda \neq 0$. (Multiplier une ligne par un réel non-nul)*
2. *$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$. (Ajouter à la ligne L_i un multiple de la ligne L_j)*
3. *$L_i \leftrightarrow L_j$. (Permuter les lignes L_i et L_j)*

Démonstration — *Admis.*

La méthode du Pivot utilise 3 types d'opérations pour transformer le système (S). Le but est d'obtenir étape par étape un système plus simple (faire apparaître des 0), pour arriver à un système dont on peut donner l'ensemble des solutions.

3.1 Méthode du Pivot de Gauss

Méthode 22 (**Méthode du Pivot**)
Soit (S) un système d'équations de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & k_1 \\ cx & + & dy & = & k_2 \end{array}\right.$$

— *Étape 1 : On applique une opération de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ afin d'éliminer la variable x d'une ligne (dans le nouveau système, on a fait apparaître un 0).*
— *Étape 2 : On permute si besoin les lignes ($L_1 \leftrightarrow L_2$) pour obtenir un système de la forme :*

$$(S')\left\{\begin{array}{ccccc} a'x & + & b'y & = & k'_1 \\ 0 & + & d'y & = & k'_2 \end{array}\right.$$

— *Étape 3 : On détermine la valeur de y grâce à l'équation de la deuxième ligne (avec $L_2 \leftarrow \lambda L_2$ si besoin).*
— *Étape 4 : On "remonte" le système en remplaçant la valeur de y dans la première ligne. On obtient alors la valeur de x (éventuellement en fonction de y).*
— *Étape 5 : Les solutions obtenues à l'étape 4 sont les solutions du système d'équations (S).*

3.2 Déterminant et nombre de solutions

Les systèmes linéaires $2x2$ sont les systèmes les plus rapides à résoudre. Tout comme les polynômes de degré 2, il existe des cas particuliers et des quantités qui permettent de les résoudre encore plus vite.

Proposition 23
Soit (S) un système linéaire 2×2 dont les lignes sont proportionnelles : Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $L1 = \lambda.L_2$ ou $L_2 = \lambda.L_1$.
Alors, le système (S) admet une infinité de solutions.
Démonstration — *Voir exemple.*

Définition 24 (**Déterminant**)
Soit (S) le système linéaire $2x2$:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & k_1 \\ cx & + & dy & = & k_2 \end{array}\right.$$

*On définit le **déterminant** de (S), noté $\det(S)$, par $\det(S) = ad - bc$.*

Exemple 25 — *Le système*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{cccccc} -x & + & -2y & = & 2 \\ 2x & + & 7y & = & 1 \end{array}\right.$$

a pour déterminant $det(S_1) = -1 \times 7 - 2 \times (-2) = -7 + 4 = -3$.
Le système

$$(S_2)\left\{\begin{array}{cccc} x & +by & = & -1 \\ 2x & + \quad 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

a pour déterminant $det(S) = 1 \times 2 - 2 \times 1 = 0$.
On remarque que ce système n'a aucune solution car la partie gauche des deux équations est proportionnelle par un facteur 2, mais pas la partie droite $(0 \neq 2 \times 1)$.

Proposition 26 (**Déterminant et système** 2×2)
Soit (S) *le système linéaire* 2×2 *:*

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & k_1 \\ cx & + & dy & = & k_2 \end{array}\right.$$

Alors, on a :
- $det(S) = 0$ *si et seulement si le système* (S) *admet soit une infinité de solutions soit aucune solution.*
- $det(S) \neq 0$ *si et seulement si le système* (S) *admet une unique solution.*

Le déterminant d'un système 2×2 est tout aussi utile que le discriminant d'un polynôme de degré 2.

Exercice 6 — *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que pour tout* $x > 0$, $\dfrac{1}{x(2x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{2x+1}$.
On fera apparaître pour cela un système linéaire. (Remarque : Les réels a, b *ne doivent pas dépendre de* x*)*

3.3 Interprétation géométrique dans le cas réel

Considérons le système (S) :

$$(S)\left\{\begin{array}{cccccc} ax & + & by & = & e & (L1) \\ cx & + & dy & = & f & (L2) \end{array}\right.$$

On suppose que tous les coefficients sont réels, et aussi que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$.
- Comme $(a, b) \neq (0, 0)$, l'équation $ax + by = e$ est l'équation d'une droite dans le plan. Notons $\mathcal{D}_1$ cette droite.
- Comme $(c, d) \neq (0, 0)$, l'équation $cx + dy = f$ est l'équation d'une droite dans le plan. Notons $\mathcal{D}_2$ cette droite.

Proposition 27
Soit $\mathcal{P}$ *le plan euclidien, muni d'un repère orthonormé* $\mathcal{R}$.
Alors, les solutions du système (S) *correspondent aux coordonnées des points d'intersection des droites* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$.
Il y a trois cas distincts :
1. *les droites* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *sont sécantes en un seul point.*
   Le système (S) *possède une unique solution.*
2. *les droites* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *sont confondues.*
   Le système (S) *possède une infinité de solutions.*
3. *les droites* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *sont parallèles et non confondues.*
   Le système (S) *ne possède pas de solutions.*

Démonstration — *Voir dessins des différents cas.*

4 Sommes et produits

En mathématiques, on va très souvent la somme ou le produit de beaucoup de nombres (somme de n nombres, produit de m nombres, avec n et m parfois aussi grands que l'on veut).

EXEMPLE 28 — *Un épargnant place sur son livret A un montant de* 2500 XPF *. Sachant que le taux d'intérêt de ce compte est de* 2% *et que le titulaire ni n'alimente ni de débite ce compte, il sera au bout de* 5 *ans crédité de la somme en euros de :*

$$1,02 \times 1,02 \times 1,02 \times 1,02 \times 1,02 \times 2500 \approx 2760$$

Sur un grand nombre d'années, et si le taux d'intérêt est variable, l'écriture du gain à l'aide du symbole $\times$ est peu commode. On introduit alors un nouveau symbole pour condenser l'information, et rendre les manipulations plus pratiques.

DÉFINITION 29 (**Symbole** Π)
Soient i, j des entiers avec $i \leq j$. Soient $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ des nombres réels ($j - i + 1$ réels). On définit :

$$\prod_{k=i}^{j} a_k = a_i \times a_{i+1} \times \cdots \times a_j.$$

Cela se se lit "produit pour k allant de i à j des a_k". Ce symbole représente la répétition de l'opération de multiplication, afin de multiplier entre eux tous les nombres $a_i, \ldots, a_j$.

EXEMPLE 30 — *Reprenons l'énoncé de l'exemple précédent. Le montant S obtenu au bout de* 5 *ans peut s'écrire sous la forme* $S = (\prod_{k=0}^{4} 1,02) \times 2500$.

DÉFINITION 31 (**Produit vide**)
Dans la définition précédente, si $i > j$, on pose $\Pi_{k=i}^{j} a_k = 1$.
Un tel produit est appelé produit vide (produit de 0 éléments).

DÉFINITION 32 (**Factorielle**)
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.
*On définit la **factorielle** de n, notée $n!$, par $\prod_{k=1}^{n} k$ si $n \geq 1$ et 1 si $n = 0$.*
Cette expression se lit "factorielle de n" ou "factorielle n".

EXEMPLE 33 — *Voici les premières valeurs des factorielles*

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24 \textit{ et } \quad 5! = 120$$

Même chose pour la somme de nombres.

EXEMPLE 34 — *Un actionnaire possède un porte-feuille d'actions dans lequel il possède* 6 *types de titre différents. Il possède pour chaque type différent les valeurs suivantes :* $1000, 2000, 3000, 4000, 5000$ *et* 6000. *La somme totale de son porte-feuille est donc la quantité* $S = 1000 + 2000 + 3000 + 4000 + 5000 + 6000 = 21000$

L'expression de l'exemple précédent peut se simplifier avec le symbole suivant.

Définition 35 (**Symbole $\sum$**)
Soient i, j des entiers, et $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j \in \mathbb{R}$ des réels ($j - i + 1$ réels). On définit alors

$$\sum_{k=i}^{j} a_k = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j.$$

Cela se lit "somme pour k allant de i à j des a_k".

Exemple 36 — *Reprenons le contexte de l'exemple précédent. Avec le symbole $\sum$, le montant du portefeuille d'action de l'actionnaire s'élève à $\sum\limits_{k=1}^{6} k \times 1000$*

Définition 37 (**Somme vide**)
Dans la définition précédente, si $i > j$, on pose $\sum_{k=i}^{j} a_k = 0$.
Une telle somme est appelée somme vide (somme de 0 éléments).

Remarque 38 — *Dans la définition de Π et de $\sum$, la lettre "k" est appelée une* ***variable muette****.*
Il s'agit d'un choix arbitraire de nom (on aurait pu prendre s,t,α,ζ,...). La plupart du temps on utilise les lettres i, j, k, l, m et n.
Cette lettre désignant une variable, il faut toujours en choisir une qui n'est pas déjà utilisée au préalable. Par exemple, la somme $\sum_{n=0}^{n} 1$ n'a pas de sens.
Une somme vide est associée au nombre 0 (l'élément neutre pour l'addition), tandis qu'un produit vide est associé au nombre 1 (l'élément neutre pour la multiplication).
Ainsi, $\Pi_{k=1}^{0} k = 1$ et $\sum_{k=1}^{0} 2k + 3 = 0$.

Remarque 39 — *Le choix d'une variable muette doit tenir compte des variables déjà utilisées dans l'énoncé, et ne doivent pas s'utiliser en-dehors de l'énoncé.*
Prenons par exemple $n \geq 0$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ($n+1$ nombres réels). Alors l'expression $\sum\limits_{n=0}^{n} a_n$ n'a pas de sens car la variable "n" est déjà utilisée.

Application à l'Informatique
La variable "i" ou "k" dans les sommes seront ce qu'on appelle des variables locales dans une fonction en Python. C'est-à-dire des variables utilisées dans un contexte spécifique et non global.

Notation 40
Pour un ensemble fini I, et une suite finie $(a_i)_{i \in I}$ de nombres, la notation $\sum\limits_{i \in I} a_i$ désigne la somme de tous les nombres a_i. (La somme des a_i, pour i appartenant à l'ensemble I)

Exemple 41 — *Notons $I = \{0, 1, \dots, n\}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i \in I} a_i$$

4.1 Propriétés des sommes et des produits

Donnons des propriétés pour les symboles $\sum$ et $\prod$, notamment par rapport à l'addition et la multiplication.

Proposition 42 (**Découpage**)
Soit $n \geq 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels, et $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Alors on a :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{i} a_k + \sum\limits_{k=i+1}^{n} a_k$
2. $\prod\limits_{k=0}^{n} a_k = (\prod\limits_{k=0}^{i} a_k) \times (\prod\limits_{k=i+1}^{n} a_k)$

Démonstration —

1. *Il s'agit d'appliquer simplement l'associativité de l'addition. En effet,*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_i) + (a_{i+1} + \cdots + a_n) = \sum_{k=0}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k$$

2. *On applique ici l'associativité de la multiplication.*

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n = (a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_i) \times (a_{i+1} \times \cdots \times a_n) = (\prod_{k=0}^{i} a_k) \times (\prod_{k=i+1}^{n} a_k)$$

□

Cette propriété est l'analogue de la relation de Chasles pour les intégrales. ($\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$).

Proposition 43 (**Multiplication par un réel**)
Soit $n \geq 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
2. $\prod\limits_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n+1} \prod\limits_{k=0}^{n} a_k$

Démonstration —

1. *Il suffit de factoriser par λ dans l'expression $\lambda a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n$.*
2. *Ici on utilise la commutativité de la multiplication en faisant passer les λ dans les premiers termes du produit.*

$$\prod_{k=0}^{n} \lambda a_k = (\lambda a_0) \times \cdots \times (\lambda a_n) = \lambda \times \cdots \times \lambda \times a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n = \lambda^{n+1} \times (\prod_{k=0}^{n} a_k)$$

□

Proposition 44 (**Linéarité**)
Soit $n \geq 0$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $b_0, b_1, \ldots, b_n$ des réels. Alors on a :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = (\sum\limits_{k=0}^{n} a_k) + (\sum\limits_{k=0}^{n} b_k)$
2. $\prod\limits_{k=0}^{n} (a_k b_k) = (\prod\limits_{k=0}^{n} a_k) \times (\prod\limits_{k=0}^{n} b_k)$

Démonstration —

1. *On utilise la commutativité de l'addition en séparant d'un côté les a_k et de l'autre côté les b_k. En effet, l'expression*

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + b_0 + b_1 + \ldots b_n$$

2. *On utilise la commutativité de la multiplication en séparant d'un côté les a_k et de l'autre côté les b_k. En effet, l'expression*

$$(a_0 b_0) \times \cdots \times (a_n b_n) = (a_0 \times \cdots \times a_n) \times (b_0 \times \cdots \times b_n)$$

□

Proposition 45 (**Changement de variable**)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $b_0, b_1, \ldots, b_n$ des réels. Alors on a :

1. $\sum_{k=r}^{n} a_k = (\sum_{i=0}^{n-r} a_{i+r})$
2. $\prod_{k=r}^{n} a_k = (\prod_{i=0}^{n-r} a_{i+r})$

Démonstration — *On vérifie que chaque somme est égale à $a_r + a_{r+1} + \ldots + a_n$ et que chaque produit est égal à $a_r . a_{r+1} . \ldots . a_n$.* □

4.2 Sommes et produits téléscopiques

Exercice 7 — *Donner une expression plus simple des quantités suivantes :*

1. $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(k+1)k}$
2. $\prod_{k=1}^{6} \frac{2^k}{3^{k-1}}$

Solution :

1. *On utilise le fait que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{(k+1)k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.*
Donc $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(k+1)k} = (\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k}) - (\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k+1})$ en utilisant la propriété précédente.
Par changement d'indice, on remarque que : $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{16} \frac{1}{k}$ d'où
$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(k+1)k} = \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{16} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{15} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{15} \frac{1}{k} - \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

2. *On a $\prod_{k=1}^{6} \frac{2^k}{3^{k-1}} = \prod_{k=1}^{6} 2^k \times \frac{1}{3^{k-1}}$.*
D'après la propriété précédente, cette quantité est égale à :
$$(\prod_{k=1}^{6} 2^k) \times (\prod_{k=1}^{6} \frac{1}{3^{k-1}}) = (\prod_{k=1}^{6} 2^k) \times \prod_{k=0}^{5} \frac{1}{3^k} = \frac{\prod_{k=1}^{6} 2^k}{\prod_{k=0}^{5} 3^k}$$
Or, $\prod_{k=1}^{6} 2^k = 2^{\left(\sum_{k=1}^{6} k\right)} = 2^{21}$ et $\prod_{k=0}^{5} 3^k = 3^{\left(\sum_{k=0}^{5} k\right)} = 3^{15}$.
On en conclut que $\prod_{k=1}^{6} \frac{2^k}{3^{k-1}} = \frac{2^{21}}{3^{15}}$

La somme de l'exercice précédent est un cas de ce que l'on appelle une **somme télescopique**. On peut calculer ce type de somme avec la méthode suivante.

Proposition 46 (**Sommes télescopiques, produits télescopiques**)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![1, n]\!]$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ des réels et $b_0, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}$ des réels non-nuls. Alors on a :

1. $\sum_{k=r}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_r$
2. $\sum_{k=r}^{n} a_{k-1} - a_k = a_{r-1} - a_n$
3. $\prod_{k=r}^{n} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_{n+1}}{b_r}$
4. $\prod_{k=r}^{n} \frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{b_{r-1}}{b_n}$

Démonstration — *On sépare la somme en deux, puis on applique un changement d'indice* ($i = k+1$)*, puis un découpage. Cela donne :*
$\sum_{k=r}^{n} a_{k+1} - a_k = \sum_{k=r}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{i=r+1}^{n+1} a_i - \sum_{k=r}^{n} a_k = \sum_{i=r+1}^{n} a_i + a_{n+1} - (a_r + \sum_{k=r+1}^{n} a_k) = a_{n+1} - a_r$.
On procède de même pour l'autre somme, ainsi que pour les produits. Pour les produits, cela donne :
$\prod_{k=r}^{n} \frac{b_{k+1}}{b_k} = (\prod_{k=r}^{n} b_{k+1})(\prod_{k=r}^{n} \frac{1}{b_k}) = (\prod_{i=r+1}^{n+1} b_i)(\prod_{k=r}^{n} \frac{1}{b_k}) = (\prod_{i=r+1}^{n} b_i . b_{n+1})(\frac{1}{b_r} \prod_{k=r+1}^{n} \frac{1}{b_k}) = \frac{b_{n+1}}{b_r}$ □

REMARQUE 47 — *On est souvent amené à faire des cassages, des découpages, et des changements d'indice dans une somme pour simplifier des calculs (pas uniquement pour les sommes télescopiques). Le but est de rendre l'expression la plus simple possible, pour ensuite retrouver une ou des sommes connues.*

4.3 Sommes d'indices pairs/impairs

PROPOSITION 48 (**Changement de variable pour les indices pairs/impairs**)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$. Alors on a :

1. $\displaystyle\sum_{k=0,\, k \text{ pair}}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0,\, k \text{ impair}}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1}$
3. $\displaystyle\prod_{k=0,\, k \text{ pair}}^{n} a_k = \prod_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j}$
4. $\displaystyle\prod_{k=0,\, k \text{ impair}}^{n} a_k = \prod_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1}$

Démonstration — • *Si n est pair, on a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$, et $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$. Si n est impair on a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ et $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n-1$.*
Ainsi le plus grand nombre entier pair entre 0 et n est $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
Les nombres entiers k pairs entre 0 et n sont donc $0, 2, 4, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
Ainsi, on a $\sum_{k=0,\, k \text{ pair}}^{n} a_k = a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
De l'autre côté, on a $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} = a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$*, ce qui prouve l'égalité.*
• *Si n est impair, $n-1$ et pair, et donc $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$, puis $2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 = (n-1)+1 = n$.*
Si n est pair, $n-1$ et impair, et donc $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n-2}{2}$, puis $2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 = (n-2)+1 = n-1$.
Le plus grand nombre entier pair entre 0 et n est donc $2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$.
Les nombres entiers k impairs entre 0 et n sont donc $1, 3, 5, \dots, 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$.
Ainsi, on a $\sum_{k=0,\, k \text{ impair}}^{n} a_k = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}$. *Et on a* $\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}$, *ce qui prouve l'égalité.* □

REMARQUE 49 — *Dans le cas de sommes/produits d'indices pairs, on évoque cette proposition en parlant de changement d'indice $k = 2j$.*
Pour les sommes/produits d'indices impairs, on parle de changement d'indice $k = 2j+1$.
Souvent, les sommes d'indices pairs/impairs vont de 0 à $2n/2n+1$, ce qui simplifie l'expression après changement d'indice : $\sum_{k=0,\, k \text{ pair}}^{2n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{2j}$, $\sum_{k=0,\, k \text{ impair}}^{2n+1} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1}$.

EXEMPLE 50 — *Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose* $u_n = \sum_{k=0,\, k \text{ impair}}^{n} (\frac{1}{3})^k$.
Avec le changement d'indice $k = 2j+1$, on a :
$u_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\frac{1}{3})^{2j+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\frac{1}{3})^{2j} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (\frac{1}{9})^j = \frac{1}{3} \frac{(\frac{1}{9})^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} - 1}{(\frac{1}{9}) - 1}$.
Si n est impair, on a $u_n = \frac{1}{3} \frac{-9}{8}((\frac{1}{9})^{\frac{n+1}{2}} - 1) = \frac{3}{8}(1 - (\frac{1}{3})^{n+1})$.
Si n est pair, on a $u_n = \frac{1}{3} \frac{-9}{8}((\frac{1}{9})^{\frac{n}{2}} - 1) = \frac{3}{8}((1 - \frac{1}{3})^n)$.
Vu que $\frac{1}{3^n} \to_{n \to +\infty} 0$*, on peut alors montrer que* $u_n \to_{n \to +\infty} \frac{3}{8}$.

4.4 Sommes de référence

Nous allons exploiter le raisonnement par récurrence dans le cas des deux propriétés suivantes concernant l'expression de sommes usuelles.

Théorème 51
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} n+1 \text{ si } a=1, \\ \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Démonstration — *On utilise un raisonnement par récurrence, et une disjonction de cas.*

Théorème 52
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

1. $\sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Démonstration — *On utilise un raisonnement par récurrence.*

Proposition 53
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ des complexes. On a :

- $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$,
- *Si n est impair :* $a^n + b^n = (a+b) \times \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k$.

Démonstration — *La propriété dépend d'un entier n et porte sur des sommes/produits. On utilise un raisonnement par récurrence pour la démontrer.*

5 Sommes doubles

Une **somme double** est une somme finie de la forme $\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ où A est un ensemble fini inclus dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (ensemble de paires d'entiers).
Il y a deux cas généraux : celui où A est un *produit cartésien* ($A = I \times J$), et celui où A est *triangulaire* ($A = \{(i,j),\, m \leq i \leq j \leq n\}$).

5.1 Somme double sur un produit cartésien

Dans la partie précedente nous avons des sommes de nombres complexes avec un indice $i \in I$.
Nous allons ici voir comment calculer des sommes de complexes dépendant de deux indices.
Par exemple $S = \sum_{(i,j)\in[\![0,2]\!]^2} ij$ se calcule comme cela :

$$S = 0\times 0 + 0\times 1 + 0\times 2 + 1\times 0 + 1\times 1 + 1\times 2 + 2\times 0 + 2\times 1 + 2\times 2 = 1+2+2+4 = 9$$

Ici, il est possible de transformer cette somme en un produit de sommes plus simples :

$$S = \left(\sum_{k=0}^{2} i\right) \times \left(\sum_{k=0}^{2} j\right) = 3 \times 3 = 9$$

mais cette simplification n'est pas toujours possible.

La définition de somme double est :

DÉFINITION 54 (**Somme double sur un produit cartésien**)
Soient I, J deux ensembles finis. Soient $a_{i,j}$, $(i,j) \in I \times J$, des réels.
On définit la ***somme double des*** $a_{i,j}$ *par :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

PROPOSITION 55
Soient I, J deux ensembles finis, et $(b_i)_{i\in I}$, $(c_j)_{j\in J}$ deux familles de nombres complexes. On a :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} b_i c_j = (\sum_{i\in I} b_i) \times (\sum_{j\in J} c_J)$$

Démonstration — *On utilise la définition de la somme double.*

EXERCICE 8 — *Pour $m, n \in \mathbb{N}$, calculer en fonction de n et m la somme double* $\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]} i2^j$.

5.2 Sommes doubles triangulaires

Dans le premier cas, l'ensemble A ($A = I \times J$) a une forme de rectangle. Pour le cas des sommes doubles que l'on appelle sommes triangulaires, l'ensemble A a une forme de triangle.

Exemple : Prenons $(a_{k,l})_{0\le k\le l\le 3}$, une famille de nombre complexes dont les valeurs sont données par le tableau suivant

l	*k : 0*	*1*	*2*	*3*
0	*2*			
1	*4*	*2*		
2	*-1*	*-3*	*5*	
3	*-3*	*4*	*2*	*7*

On a $\sum_{0\le k\le l\le 3} a_{k,l} = 2+4-1-3+2-3+4+5+2+7 = 19$
Pour obtenir ce résultat on peut soit sommer colonne par colonne, soit ligne par ligne.
Pour les sommes triangulaires, il faut ***faire attention aux indices****.*
On utilise généralement la méthode de calcul suivante :

MÉTHODE 56 (**Somme colonne par colonne**)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $A = \{0 \le k \le l \le n\}$, et $(a_{k,l})_{(k,l)\in A}$ une famille de nombres complexes. Calculons $S = \sum_{(k,l)\in A} a_{k,l}$.

1. *On calcule d'abord tous les $b_l = \sum_{k=0}^{l} a_{k,l}$, pour $l \in [\![0,n]\!]$.*

2. *On calcule la somme la somme* $\sum_{l=0}^{n} b_l$, *qui donne* S.

Si la somme colonne par colonne ne fonctionne pas bien, on peut sommer les éléments $a_{i,j}$ *ligne par lignes.*

Remarque 57 — ***Attention !***

Dans le cas d'une somme triangulaire on ne peut pas inverser les indices k *et* l *comme dans le cas d'un produit cartésien.*

Exemple 58 — *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Calculons la somme triangulaire* $S_n = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} 1$.

1. *Pour tout* $l \in [\![1, n]\!]$, *on a* $\sum_{k=1}^{l} 1 = l$.
2. *Ainsi,* $S_n = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} 1 = \sum_{l=1}^{n} l = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Quand on a une somme triangulaire $S = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} a_{k,l}$, il est possible de l'écrire de deux façons différentes. Cela correspond à sommer colonne par colonne ou bien ligne par ligne. Pour passer d'une écriture à l'autre, on utilise la proposition suivante.

Théorème 59 (**Permutation de sommes, somme triangulaire**)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $A = \{(k,l),\ \ 0 \leq k \leq l \leq n\}$ *et* $(a_{k,l})_{(k,l) \in A}$. *On a :*

$$\sum_{(i,j) \in A} a_{k,l} = \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{l} a_{k,l} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=k}^{n} a_{k,l}$$

Exercice 9 — *Vérifier que* $\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} 2^k$ *puis donner une expression plus simple de cette somme en permutant l'ordre de sommation.*

5.3 Produit de deux sommes finies

On peut écrire le produit de deux sommes finies à l'aide d'une seule somme.

Proposition 60
Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ *et* $(b_j)_{0 \leq j \leq m}$. *On a :*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \times \sum_{j=0}^{m} b_j = \sum_{k=0}^{n+m} C_k,$$

en posant, pour tout $k \in \{0; n+m\}$, $C_k = \sum_{i+j=k} a_i.b_j$.

Démonstration —*Admis.*

6 Coefficients binomiaux

Pour A un ensemble fini, son cardinal ($Card(A)$) est son nombre d'éléments. On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble de toutes les parties de A.
Ces ensembles apparaissent régulièrement en mathématiques (par exemple $\{0, 1, \ldots, n\}$ dans les sommes/produits), et il faut ainsi les étudier un peu pour les comprendre.
Nous allons donner ici des propriétés des sous-ensembles de A. Nous reviendrons sur cela au chapitre Dénombrement.

6.1 Sous-ensembles d'un ensemble fini et arbres

Pour un ensemble fini A et un sous-ensemble B, vous savez que B contient moins d'éléments que A. C'est-à-dire, que $Card(B) \leq Card(A)$. La question de cette section est la suitante :

QUESTION 1 — *Soient $n \geq 0$ et A un ensemble à n éléments. Pour $0 \leq p \leq n$ un entier, Combien existe-t-il de sous-parties $B \subset A$ tels que $Card(B) = p$?*

DÉFINITION 61
Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble de cardinal n.
On appelle coefficient binomial "p parmi n", noté $\binom{n}{p}$, le nombre de sous-ensembles de E de cardinal p.
C'est-à-dire : $\binom{n}{p} = Card(\{B \subset E,\ t.q.\ Card(B) = p\})$.

EXEMPLE 62 — *Considérons $E = \{rouge, jaune, bleu\}$. Il y a 3 sous-ensembles de E à 2 éléments. L'ensemble de ces sous-ensembles est $E_2 = \{\{rouge, jaune\}; \{rouge, bleu\}; \{jaune, bleu\}\}$.*
On en déduit que $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$.
On compte de même 3 sous-ensembles à 1 élément ($\{rouge\}; \{bleu\}; \{jaune\}$), un sous-ensemble à 3 éléments (E tout entier), et 1 sous-ensemble à 0 éléments ($\emptyset$ l'ensemble vide).
On a ainsi $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{3} = 1$, $\binom{3}{0} = 1$.

REMARQUE 63 — *Soient $n \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$, et E un ensemble à n éléments.*
- *Si $p > n$, on a $\binom{n}{p} = 0$. En effet, il n'existe pas de sous-parties A de E de cardinal strictement plus grand que $n = Card(E)$.*
- *Si $p = 1$, on a $\binom{n}{1} = n$. Les sous-parties à 1 élément sont de la forme $A = \{x\}$ avec x dans E. Il y en a autant que d'éléments dans E.*
- *Si $p = n$ on a $\binom{n}{n} = 1$. Une sous-partie A à n éléments est égale à E tout entier. Il y en a donc une seule.*
- *Si $p = 0$ on a $\binom{n}{0} = 1$. Une sous-partie A à 0 éléments est l'ensemble vide $\emptyset$. Il y en a donc une seule.*

QUESTION 2 — *Est-il possible de déterminer une formule simple en fonction de n et p pour déterminer le nombre de sous-ensembles de E de cardinal p ?*

Avant de déterminer cette formule, regardons quelques résultats plus simples à obtenir.

PROPOSITION 64
Soit E un ensemble fini à n éléments. Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E. Alors, on a

$$Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Démonstration — *On pose $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Choisir une partie A de E c'est exactement dire pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$ si $x_k \in A$ ou $x_k \notin A$.*
On a ainsi autant de parties de E que de choix possibles. Pour chaque indice k on a deux choix possibles ($x_k \in A$ ou $x_k \notin A$), et tous ces choix sont indépendants. Cela donne ainsi $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ choix possibles. □

PROPOSITION 65 (**Somme de coefficients binomiaux**)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et un entier naturel $0 \leq p \leq n$. Alors :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

Démonstration — *Soit A une partie à $p+1$ éléments dans $\{1, \ldots, n+1\}$. On fait une disjonction de cas.*
Soit A contient 1. Dans ce cas, il faut choisir p éléments parmi les n entiers restants, donc $\binom{n}{p}$ choix possibles.

Sinon A ne contient pas 1. Il faut alors choisir $p+1$ éléments parmi les n entiers restants, soit $\binom{n}{p+1}$ choix possibles.
Les deux situations étant disjointes, on obtient le résultat. □

*La propriété précédente permet de calculer tous les coefficients binomiaux les uns après les autres. On représente ce calcul avec le **triangle de Pascal**.*

Remarque 66 — ***Triangle de Pascal*** *(les coefficients binomiaux valant 0 ne sont pas écrits)*

$\binom{n}{p}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Grâce à ce résultat, on obtient une expression de $\binom{n}{p}$ que l'on peut directement calculer.

Théorème 67
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq p \leq n$ un entier. Alors on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Démonstration — *On démontre cela par récurrence sur n, pour tout $0 \leq p \leq n$. Cela est vrai pour $n=0$. Et, la relation $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ permet de traiter l'hérédité.* □

Exemple 68 — *La quantité $\dfrac{n!}{(n-p)!p!}$ se simplifie en $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.*
On a ainsi $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2.1}$, $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3.2.1}$.

On en déduit les propriétés suivantes :

Proposition 69
Soient n et p deux entiers naturels. On a :

1. *Si $0 \leq p \leq n$, alors $\displaystyle\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.*
2. *Si $p > n$, alors $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$.*
3. *Si $n \geq 1$, alors $\displaystyle\binom{n}{0} = 1$ et $\displaystyle\binom{n}{1} = n$.*
4. *Si $1 \leq p \leq n$, $\displaystyle p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.*

Démonstration — *On utilise la formule précédente ainsi que la définition de $\binom{n}{p}$.* □

6.2 Formule du binôme

L'une des plus grandes applications des coefficients binomiaux est la possibilité de développer les expressions de la forme $(a+b)^n$.

Exemple 70 — *Remarquons que $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, et $\binom{2}{2} = 1$.*
De l'autre côté, pour $x, y \in \mathbb{C}$, on a l'identité remarquable $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
D'où : $(x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$.

Cet exemple découle de ce théorème (très utilisé en mathématiques).

THÉORÈME 71
Soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $x, y \in \mathbb{C}$ *deux nombres complexes. Alors on a :*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration — *On démontre cela par récurrence sur* $n \geq 0$.

EXEMPLE 72 — *En utilisant le triangle de Pascal et la formule du binôme, on obtient ainsi :* $(3+2i)^4 = 3^4 + 4.3^3 + (2i) + 6.3^2.(2i)^2 + 4.3.(2i)^3 + (2i)^4 = (81 - 6.9.4 + 16) + i(8.27 - 12.8) = 119 - 120i$.

La formule du binôme permet de déterminer la valeur de certaines sommes (ex : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$*), mais aussi de calculer la puissance* n *de certains nombres à partir de puissances déjà connues.*

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

— *Ordre $\leq$: Sommer des inégalités. Multiplier une inégalité par un réel (attention au signe). Ordre strict $<$.*
— *Intervalles de $\mathbb{R}$. Lien avec les inégalités : $]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ t.q.\ a < x \leq b\}$.*
— *Fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$. Propriété : $|x.y| = |x|.|y|$.*
Inégalité triangulaire : $|x+y| \leq |x| + |y|$.
— *Majorant|minorant|maximum|minimum d'un ensemble E.*
S'il existe, le maximum|minimum est unique.
— *Savoir résoudre un système linéaire 2×2 : $ax + by = e$ et $cx + dy = f$.*
— *Sommes $\sum$: $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.*
Découpage en 2 : $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{i} a_k + \sum\limits_{k=i+1}^{n} a_k$
Factorisation : $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
Linéarité : $\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = (\sum\limits_{k=0}^{n} a_k) + (\sum\limits_{k=0}^{n} b_k)$
Changement de variable : $\sum\limits_{k=r}^{n} a_k = (\sum\limits_{i=0}^{n-r} a_{i+r})$
— *Connaître les sommes arithmétiques|sommes géométriques|identités remarquables :*
$\sum\limits_{k=0}^{n} k$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k$, $(a+b)^2$, $a^2 - b^2$, $a^n - b^n$.
— *Sommes télescopiques.*
— *Produits Π : $\Pi_{k=0}^{n} a_k = a_0.a_1.a_2.\ldots.a_n$.*
Maîtriser les manipulations : Découpage en 2 | Factorisation | Linéarité | Changement de variables.
— *Factorielle : $n! = \pi_{i=1}^{n} i$ si $n \geq 1$, et $0! = 1$.*
Propriété : $(n+1)! = (n+1)n!$.
— *Somme double rectangulaire : $\sum\limits_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum\limits_{i \in I} (\sum\limits_{j \in J} a_{i,j}) = \sum\limits_{j \in J} (\sum\limits_{i \in I} a_{i,j})$.*
— *Somme double triangulaire : $\sum\limits_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$.*
Découpage en colonnes : $\sum\limits_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum\limits_{j=0}^{n} (\sum\limits_{i=0}^{j} a_{i,j})$
Découpage en lignes : $\sum\limits_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum\limits_{i=0}^{n} (\sum\limits_{j=i}^{n} a_{i,j})$.
— *Coeficients binomiaux : $\binom{n}{k} = Card(\{B \subset \{1, \ldots, n\}\ t.q.\ Card(B) = k\})$.*
Propriétés : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 0$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, Triangle de Pascal.
— *Formule du binôme : $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$.*
Savoir l'appliquer pour des valeurs particulières de a, b ($a = b, a = 0, a = 1, \ldots$).
Savoir reconnaître une formule du binôme avec les coefficients binomiaux.