Chapitre 4
Nombres complexes

Table des matières

Vidal AGNIEL

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est, à l'aide notamment de figures, de donner une solide pratique des nombres complexes.

QUESTION 1 — *Quelle est la différence entre les équations algébriques du second degrés suivantes ?*

$$\begin{array}{lr} (1) & x^2 - 1 = 0 \\ (2) & x^2 - 2x + 1 = 0 \\ (3) & x^2 + 1 = 0 \end{array}$$

Ce qui distingue ces équations est leur nombre de solutions.
L'équation (1) a deux solutions distinctes $x = -1$ et $x = 1$ tandis que la seconde équation possède une unique solution égale à $x = 1$.
Enfin l'équation (3) n'a pas de solutions réelles puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$ et donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.
L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ étend l'ensemble des nombres réels de façon à permettre à l'équation (3) d'avoir des solutions.
Ainsi, on notera $-i$ et i les deux solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$, et on aura $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Au XIX$^{\text{ième}}$ siècle les nombres complexes ont été introduits en géométrie grâce à la notion d'affixe. Ce point de vue est riche d'applications puisqu'il permet de manipuler des points du plan comme des nombres, avec leurs opérations classiques $+, -, \times$ ainsi que la division.

Dans ce chapitre nous allons commencer par faire des rappels de classe de terminale, puis nous approfondirons cela.

2 Nombres complexes

2.1 Définition

DÉFINITION 1 (Construction de l'ensemble des nombres complexes)
L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des paires de nombres réels. On a $\mathbb{R}^2 = \{(a, b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$.
L'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ est l'ensemble des points du plan, mais écrits d'une façon différente.
On note $i = (0, 1)$ et "1" $= (1, 0)$. L'élément i est appelé ***nombre imaginaire****.*
Alors, un élément (a, b) s'écrit $a+ib$. En effet, $(a, b) = (a, 0)+(0, b) = a.(1, 0)+b.(0, 1) = a+ib$.
On définit $\mathbb{C} = \{a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.
Un élément de $\mathbb{C}$ est appelé un ***nombre complexe****.*

DÉFINITION 2 (Addition et multiplication sur $\mathbb{C}$)
Soient $a + ib, c + id \in \mathbb{C}$.
On définit une ***addition*** *$+$ sur $\mathbb{C}$ par $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$. ($(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$)*
On définit une ***multiplication*** *$\times$ sur $\mathbb{C}$ par $(a + ib) \times (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$. ($(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$)*
On a en particulier : $i^2 = i \times i = -1$.

DÉFINITION 3 (**Partie réelle, partie imaginaire**)
Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de la forme $z = x + iy$.
Cette écriture est appelée la ***forme algébrique*** *de z.*

- *Le nombre réel x est appelée la* ***partie réelle de*** *z.*
- *Le nombre réel y est appelée la* ***partie imaginaire de*** *z.*

Cela définit ainsi deux fonctions dans $\mathbb{C}$:

La fonction partie réelle : $\mathfrak{Re}: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z = x+iy & \longmapsto & x \end{array}$.

La fonction partie imaginaire $\mathfrak{Im}: \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z = x+iy & \longmapsto & y \end{array}$.

EXEMPLE 4 — *Soit $1+2i \in \mathbb{C}$, on a $\mathfrak{Re}(1+2i) = 1$ et $\mathfrak{Im}(1+2i) = 2$.*
Donner la forme algébrique de $(1+2i)(3+i)$.

REMARQUE 5 — *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$. Il s'identifie à l'axe des abscisses (la droite $\{(a,0),\ a \in \mathbb{R}\}$).*
On dit qu'un nombre complexe z est ***imaginaire pur*** *si sa partie réelle est nulle. C'est-à-dire si $z = ib$, $b \in \mathbb{R}$.*

2.2 Opérations sur les nombres complexes

Les opérations d'addition et de multiplication sur $\mathbb{R}$ (et leurs réciproques $-$ et) s'étendent à $\mathbb{C}$ grâce aux définitions précédentes.
La grande différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ est que l'ensemble $\mathbb{C}$ contient un élément i qui vérifie $i^2 = -1$.

DÉFINITION 6 (**Règles de calcul dans $\mathbb{C}$**)
Les opérations sur l'ensemble des nombres complexes vérifient les règles suivantes, que vous connaissez bien sur $\mathbb{R}$.
Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. On a :

1. $z_1.(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ ***(distributivité)***
2. $z_1.(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_2$ ***(associativité)***
3. $z_1.z_2 = z_2.z_1$ ***(commutativité)***
4. *si* $z_1 \neq 0$, $\dfrac{1}{z_1} \in \mathbb{C}$ ***(inversibilité d'un élément non nul)***

REMARQUE 7 — *Tout comme pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{C}^\star$ est l'ensemble des nombres complexes différents de 0 : $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

PROPOSITION 8 (**Obtenir l'écriture algébrique d'un quotient**)
Soit $z \in \mathbb{C}$ non-nul, $z = x+iy$. Alors, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Par exemple, on a $\frac{1}{2+3i} = \frac{2}{13} - i\frac{3}{13}$.

PROPOSITION 9
Opérations et écriture sous forme algébrique :
Soient $z_1 = x_1+iy_1$ et $z_2 = x_2+iy_2$ deux nombres complexes. La somme z_1+z_2, la différence z_1-z_2, le produit $z_1 \times z_2$ et le quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$ (si $z_2 \neq 0$) ont l'écriture algébrique suivante :

- $z_1+z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$
- $z_1-z_2 = (x_1-x_2) + i(y_1-y_2)$
- $z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right) + i\left(\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$

Démonstration — *On vérifie les calculs d'écritures algébriques.*

La partie imaginaire et réelle d'un nombre complexe se comporte bien avec + et $-$, mais pas avec le produit ou la division. (ex : $Re(i \times i) = -1 \neq 0 = Re(i).Re(i)$)

Corollaire 10
Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

1. $\mathfrak{Im}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Im}(z_2)$
2. $\mathfrak{Re}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Re}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2)$
3. $\mathfrak{Re}(z_1 z_2) = \mathfrak{Re}(z_1)\mathfrak{Re}(z_2) - \mathfrak{Im}(z_1)\mathfrak{Im}(z_2)$
4. $\mathfrak{Im}(z_1 z_2) = \mathfrak{Im}(z_1)\mathfrak{Re}(z_2) + \mathfrak{Im}(z_2)\mathfrak{Re}(z_1)$

Sur $\mathbb{C}$, on peut introduire une opération supplémentaire : la conjugaison d'un nombre complexe.

Définition 11 (**Conjugaison de nombres complexes**)
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
On définit le ***conjugué*** *de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.*

Remarque 12 — *Cette opération de conjugaison est* ***involutive*** *: On a $\overline{\overline{z}} = z$.*
En regardant $\mathbb{C}$ comme le plan $\mathbb{R}^2$, la conjugaison s'identifie à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

La conjugaison se comporte très bien avec les autres opérations sur les nombres complexes.

Proposition 13
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$.
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
4. $\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ *et* $\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$.

Démonstration — *On vérifie les résultats par les calculs.*

Méthode 14
Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur, on utilise parfois la méthode suivante :

1. *Si l'on veut montrer que $Z \in \mathbb{R}$, on montre que $\overline{Z} = Z$.*
2. *Si l'on veut montrer que Z est imaginaire pur ($Z \in i\mathbb{R}$), on montre que $\overline{Z} = -Z$.*

Exercice 1 — *Application Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = 1 + iz$.*
Montrer que Z est réel si et seulement si z est imaginaire pur.

Exercice 2 — *Application Soit $z \in \mathbb{C}$ non-nul et $Z = \frac{z}{\overline{z}}$.*
Montrer que Z est réel si et seulement si z est réel ou est imaginaire pur.

Les formules suivantes, connues dans $\mathbb{R}$, sont valables dans $\mathbb{C}$:

Théorème 15 (**Somme géométrique**)
Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, on a :

1. $\sum_{k=0}^{n} z^k = n + 1$ *si* $z = 1$
2. $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$ *sinon*

Proposition 16
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $a, b \in \mathbb{C}$. On a :
- $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$
- *si n est impair,* $a^n + b^n = (a+b) \times \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k$

Théorème 17 (**Formule du binôme**)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $z, w \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes. Alors, on a :

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

2.3 Représentation géométrique des nombres complexes

Vous avez vu au lycée que les points du plan $\mathcal{P}$ s'identifient à des vecteurs si l'on utilise un repère orthonormé. On a ainsi un objet que l'on peut voir de 3 façons différentes (point du plan, vecteur du plan, nombre complexe).

Définition 18 (Affixe)
Soit $P(x, y)$ un point ou un vecteur $\vec{u} = \binom{x}{y}$ du plan usuel.
*On appelle **affixe** du point P ou du vecteur $\vec{u}$ le nombre complexe $z_P = x + iy$.*

Remarque 19 — *Les fonctions $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$ s'interprêtent géométriquement comme la projection orthogonale sur l'axe des abscisses et la projection orthogonale sur l'axe des ordonnées.*

Dessin sur feuille.

Proposition 20
Soit P un point du plan d'affixe z_P.
Alors le symétrique du point P par rapport à l'axe des abscisses est d'affixe $\overline{z_P}$.
Démonstration —
La somme de deux vecteurs $\vec{u} = \binom{x_1}{y_1}$,$\vec{v} = \binom{x_2}{y_2}$ du plan correspond à la somme de leurs affixes.
Dessin sur feuille .

3 Module d'un nombre complexe

3.1 Définitions

Un vecteur du plan $\vec{u} = \binom{x}{y}$ possède une norme, qui vaut $||u|| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pour un nombre complexe, on parle de module.

Définition 21
Module d'un nombre complexeSoit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
*On appelle **module de** z, noté $|z|$, le nombre réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*
Dessin sur feuille.

Remarque 22 — *Pour tout nombre réel x, le module de x dans $\mathbb{C}$ (avec $x = x + i.0$) est exactement sa valeur absolue dans $\mathbb{R}$.*
En effet, vous avez vu au lycée que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemple 23 —
- $|1 + i| = \sqrt{2}$, $|i| = 1$, $|1 + 2i| = \sqrt{3}$.
- *Pour tout $r > 0$, on a $|ri| = r$.*

Le module d'un nombre complexe z s'exprime aussi à l'aide du conjugué $\overline{z}$.

THÉORÈME 24
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Alors on a $|z|^2 = z.\overline{z}$.
Démonstration — *On montre le résultat par le calcul.*

Avec les propriétés du conjugué $\overline{z}$ et le fait que $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, on en déduit des propriétés sur le module d'un produit $z_1.z_2$ ou d'un quotient $\frac{z_1}{z_2}$.

PROPOSITION 25
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ des complexes. On a :

1. $|z_1| = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$.
2. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$.
3. *Si* $z_2 \in \mathbb{C}^\star$, *alors* $|\dfrac{z_1}{z_2}| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Démonstration — *On montre ces résultats par le calcul.*

3.2 Inégalité triangulaire

L'inégalité triangulaire vue pour les nombres réels (avec la valeur absolue) s'étend aux nombres complexes (avec le module) :

THÉORÈME 26 (**Inégalité triangulaire**)
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

- *On a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. (Inégalité triangulaire)*
- *On a $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda.z_1$ ou $z_1 = \lambda.z_2$. (Cas d'égalité)*

Démonstration — *On élève les quantités au carré pour étudier l'inégalité et le cas d'égalité.*

Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire, sur feuille.

3.3 Lieux géométriques

Les opérations sur les nombres complexes que nous avons définies permettent de décrire des ensembles géométriques (en identifiant nombre complexe et point du plan).

PROPOSITION 27
Soient P, Q deux points du plan, d'affixes z_1 et z_2.
Alors la distance entre les points P et Q vaut : $d(P, Q) = |z_1 - z_2|$.
Démonstration — *On utilise la définition de la distance euclidienne.*

PROPOSITION 28
Soit P un point du plan d'affixe z. Soit $\mathcal{C}(A, r)$ (respectivement $\mathcal{D}(w_0, r)$) le cercle (resp. le disque) de centre $A(x_0, y_0)$ et de rayon $r \geq 0$. On pose $z_0 = x_0 + iy_0$. Alors, on a :

- $P \in \mathcal{C}(A, r) \iff |z - w_0| = r$.
- $P \in \mathcal{D}(A, r) \iff |z - w_0| \leq r$.

Démonstration — *Sur feuille.*

EXERCICE 3 — *Déterminer si les points $P(1 + 3i)$ et $M(2 - 4i)$ appartiennent :*

1. *Au cercle $\mathcal{C}(1 + i, 2)$.*

2. *Au disque $\mathcal{D}(i, 4)$.*

4 Nombres complexes de module un et trigonométrie

Nous avons vu qu'avec les nombres complexes, les cercles ont pour équation $|z - z_0| = r$ (avec z_0 l'affixe du centre et r le rayon).
Un cas particulier est celui du cercle trigonométrique (cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 1).
C'est l'ensemble des points du plan d'affixe z qui vérifient l'équation $|z| = 1$.

4.1 Définition

DÉFINITION 29 (Ensemble $\mathbb{U}$)
L'ensemble des nombres complexes de module 1 se note $\mathbb{U}$ (pour unité). On a

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ t.q\ .|z| = 1\}.$$

REMARQUE 30 — *On a aussi $z \in \mathbb{U} \iff z\overline{z} = 1$.*
Utiliser le conjugué plutôt que le module ($z\overline{z} = |z|^2$) allège souvent les calculs, en évitant de poser une racine carrée.

EXEMPLE 31 — *On a :*
- $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{U}$
- $-i \in \mathbb{U}$
- $-0,5 + i.0,5 \notin \mathbb{U}$

Nous avons vu en Trigonométrie que l'on peut paramétrer tout point M du cercle unité par un réel $t \in \mathbb{R}$, afin M ait pour coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$.
En utilisant les nombres complexes, on obtient alors :

$$\boxed{z \in \mathbb{U} \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \text{t.q. } z = \cos(t) + i\sin(t)}$$

On introduit une nouvelle manière de voir les points de $\mathbb{U}$: la notation exponentielle.

DÉFINITION 32 (**Module un et exponentielle complexe**)
Soit $t \in \mathbb{R}$.
On définit e^{it} le nombre complexe $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$.
On l'appelle "exponentielle de it".

REMARQUE 33 — *La fonction $t \in [0, 2\pi[\mapsto e^{it} \in \mathbb{U}$ est une bijection. L'exponentielle complexe permet de paramétrer le cercle trigonométrie (de décrire tous ses points à l'aide d'un intervalle de $\mathbb{R}$).*

4.2 Trigonométrie et exponentielle complexe

Avec les formules de trigonométrie, on obtient des règles de calcul pour l'exponentielle complexe. Ces règles sont identiques aux propriétés de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 34 (**Exponentielle complexe et produits**)
Soient $t, t' \in \mathbb{R}$. Alors :
- *On a $e^{it} \times e^{it'} = e^{i(t+t')}$ (Formule d'addition)*
- *On a $\frac{1}{e^{it'}} = e^{-it'}$.*

- *On a* $\dfrac{e^{it}}{e^{it'}} = e^{i(t-t')}$.
- *Pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, *on a* $(e^{it})^k = e^{ikt}$.

Démonstration — *On utilise les propriétés des fonctions* $\cos, \sin$.

PROPOSITION 35 (Valeurs particulières)
On a :

- $e^{2i\pi} = 1$.
  Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2ik\pi} = 1$.
- $e^{i\pi} = -1$.
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
- $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
- $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. *(Ce nombre est souvent noté j)*

PROPOSITION 36 (Factorisation par l'arc moitié)
Soient $t, t' \in \mathbb{R}$.
On a $e^{it} + e^{it'} = e^{i(\frac{t+t'}{2})} \times \left(e^{i\frac{t-t'}{2}} + e^{i\frac{t'-t}{2}}\right)$.

Les propriétés de l'exponentielles fonctionnent bien dans les calculs.
Nous avons défini e^{it} *avec* $\cos(t)$ *et* $\sin(t)$. *Il est possible de faire la réciproque.*

PROPOSITION 37 (**Formules d'Euler**)
Soit $t \in \mathbb{R}$. *Alors, on a :*

- $\cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$
- $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

Démonstration — *On vérifie la propriété par le calcul.*

EXERCICE 4 — *Soit* $t \in \mathbb{R}$. *Factoriser de la manière la plus simple possible les nombres complexes suivants :*

1. $1 + e^{it}$
2. $1 - e^{it}$

Avec les propriétés de l'exponentielle complexe, on peut retrouver assez facilement les formules trigonométriques :

THÉORÈME 38 (Formules trigonométriques (additions et soustractions))
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, *on a :*

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
   (Partie imaginaire de $e^{ia}e^{ib}$*)*
2. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
3. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
   (Partie réelle de $e^{ia}e^{ib}$*)*
4. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
5. *Soit* $k \in \mathbb{Z}$. *Si* $a, b, a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, *alors* $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.
   ($\cos(a+b)$ *divisé par* $\sin(a+b)$*)*
6. *Soit* $k \in \mathbb{Z}$. *Si* $a, b, a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, *alors* $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

THÉORÈME 39 (Formules de duplication de l'angle)
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ *on a*

1. $\cos(2a) = 2\cos(a)^2 - 1$
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
3. *Soit $k \in \mathbb{Z}$. Si $a, b, a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors* $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan(a)^2}$

THÉORÈME 40 (Formules de factorisation)
Soient p et $q \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
2. $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$
3. $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
4. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

Une nouvelle formule s'ajoute à ce répertoire, la formule de Moivre.

THÉORÈME 41 (**Formule de Moivre**)
Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$(e^{it})^n = (\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt).$$

Démonstration — *On utilise les propriétés précédentes sur l'exponentielle complexe.*

Risque d'erreur

La formule de Moivre ne s'applique qu'avec n entier. Par exemple,

$$-1 = e^{i\pi} \neq \left(e^{2i\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Avec la formule de Moivre nous pouvons simplifier les sommes suivantes :

THÉORÈME 42 (Deux sommes trigonométriques)
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \begin{cases} n+1 \text{ si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}t)\cos(\dfrac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \end{cases}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(kt) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}t)\sin(\dfrac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \end{cases}$

Démonstration —*(Sur feuille)*

4.3 Linéarisation

La formule d'Euler permet de simplifier les <u>expressions polynomiales</u> en $\cos(x)$ et $\sin(x)$, pour les écrire comme combinaison linéaire d'expressions de la forme $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ (avec n un entier).
*On appelle cela **linéariser** une expression trigonométrique. (passer de produits à des sommes)*

EXEMPLE 43 — *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression $2\sin(t)\cos(t)$ se linéarise en $\sin(2t)$: $2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$.*

REMARQUE 44 — *Une expression polynômiale en deux variables X et Y est une somme de termes de la forme X^nY^m ($n,m \in \mathbb{N}$), multipliés par des coefficients. Par exemple, $2XY - X^3$.*

MÉTHODE 45 (**Linéariser**)
Pour linéariser une expression polynômiale en $\cos(x), \sin(x)$:

1. *On transforme les produits de* $\cos$ *et de* $\sin$ *en exponentielles complexes avec la formule d'Euler.*
   Par exemple $\cos(t)^3 = (\frac{e^{it}+e^{-it}}{2})^3 = \frac{(e^{it}+e^{-it})^3}{2^3}$.
2. *On développe tous les produits (souvent avec la formule du binôme), et on factorise par les dénominateurs.*
   Par exemple, $\frac{(e^{it}+e^{-it})^3}{2^3} = \frac{e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it}}{8}$.
3. *On regroupe les termes conjugués pour faire apparaître* $\cos(nx)$ *(ou* $\sin(nx)$*) en se servant de la formule d'Euler à nouveau.*
   Par exemple, $\frac{e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it}}{8} = \frac{2\cos(3t)+6\cos(t)}{8} = \frac{\cos(3t)+3\cos(t)}{4}$. *Ainsi,* $\cos(t)^3 = \frac{\cos(3t)+3\cos(t)}{4}$.

Cette méthode de linéarisation permet de linéariser n'importe quel polynôme en $\cos(x), \sin(x)$. Cependant, pour des petites expressions (puissances 2 ou 3, petits produits), on obtient aussi facilement le résultat à l'aide des formules trigonométriques précédentes.

EXERCICE 5 — *Linéariser l'expression* $E = \cos^2(x)\sin^3(x)$.

5 Argument d'un nombre complexe non nul

NOTATION 46
On rappelle la notation de congruence modulo 2π : $a = b \quad [2\pi]$ *signifie qu'il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $a = b + k.2\pi$.
On rappelle aussi que les fonctions $\cos$ *et* $\sin$ *sont* 2π*-pédiodiques. Si les réels* a *et* b *sont congrus modulo* 2π*, alors leur cosinus et leur sinus sont égaux. La fonction* $t \mapsto e^{it}$ *est de même* 2π*-périodique.*

5.1 Définition

L'expression des nombres complexes de module 1 à l'aide de l'exponentielle complexe ($t \mapsto e^{it}$) peut s'étendre à tous les complexes.
Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. Alors on a $|z| > 0$. Comme $|\frac{z}{|z|}| = \frac{|z|}{|z|} = 1$, on obtient $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.
Donc, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{it}$. Cela se réécrit $z = |z|e^{it}$. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$ l'écriture exponentielle d'un nombre complexe n'est pas unique. On a la définition suivante :

DÉFINITION 47 (**Ecriture exponentielle**)
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Alors il existe $r \geq 0$ *et* $t \in \mathbb{R}$ *tels que* $z = re^{it}$. *On l'appelle* ***écriture exponentielle*** *de* z.
On dit que r *est le* ***module*** *de* z. *On a* $r = |z|$.
Si $z \neq 0$, *on dit que* t *est* ***un argument*** *de* z. *On note* $Arg(z) = t$.
Si $z = 0$, tous les réels t conviennent. On ne parle donc pas d'argument pour le nombre complexe zéro.

REMARQUE 48 — *Pour un nombre complexe* z*, tous ses arguments sont égaux modulo* 2π *(l'argument de* z *n'est pas unique car* $t \mapsto e^{it}$ *est périodique).*
Par contre, il existe un unique argument de z *appartenant à l'intervalle* $[0, 2\pi[$. *On l'appelle* ***argument principal*** *de* z.
On parlera de ***l'argument*** *de* z *pour un argument à* 2π *près.*

Représentation géométrique sur feuille.

MÉTHODE 49
Pour déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe z :

1. *On calcule le module $|z|$ de z, souvent avec la formule $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*
2. *Si $z \neq 0$, on calcule $\frac{z}{|z|}$.*
3. *Comme ce nombre s'écrit aussi e^{it}, on cherche un $t \in \mathbb{R}$ qui convient pour trouver un argument.*
   On s'appuie sur les valeurs remarquables de $\cos$ et $\sin$ pour cela. On peut retrouver ces valeurs à l'aide du cercle trigonométrique.
4. *Si la dernière étape n'est pas possible, on est en général guidé par l'exercice pour trouver un argument.*

EXERCICE 6 — *Déterminer le module et l'argument des complexes suivants :*

- $-i$
- $1 + i$
- $1 + i\sqrt{3}$
- $2 - i\sqrt{12}$

5.2 Opérations sur les arguments

PROPOSITION 50
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\star$. On a :

1. $Arg(z_1.z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2) \quad [2\pi]$
2. $Arg(\frac{z_1}{z_2}) = Arg(z_1) - Arg(z_2) \quad [2\pi]$
3. *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Arg(z_1^n) = nArg(z) \quad [2\pi]$*

Démonstration —*On utilise les propriétés de l'exponentielle complexe.*

La multiplication par un réel non nul k ne change pas l'argument si $k > 0$, mais ce n'est pas le cas si $k < 0$.

PROPOSITION 51
Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et $k \in \mathbb{R}^\star$. On a :

- $Arg(kz) = Arg(z) \quad [2\pi]$ *si* $k > 0$
- $Arg(kz) = Arg(z) + \pi \quad [2\pi]$ *si* $k < 0$

Démonstration — *On utilise l'écriture exponentielle.*

5.3 Une transformation utile

Application à la Physique

En physique ou en sciences de l'ingénieur on peut être amené à factoriser une fonction P : $t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$, qui décrit correctement les oscillation d'un oscillateur harmonique au cours du temps.
Factoriser cette fonction P sous la forme $P : t \mapsto A\cos(t - \varphi)$ permet d'obtenir deux informations physiques :

- *A est l'amplitude de l'oscillateur.*
- *φ est la phase à l'origine.*

Exemple 52 — *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) + \sin(t) = 2\cos(t - \frac{\pi}{4})$.*
En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$2\cos(t - \frac{\pi}{4}) = 2(\cos(t)\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(t)\sin(\frac{\pi}{4})) = 2\left(\frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}\right) = \cos(t) + \sin(t)$$

Méthode 53
***Transformation de** $a\cos(t) + b\sin(t)$ **en** $A\cos(t - \varphi)$*

- *On pose $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.*
- *On développe $\cos(t - \varphi) = \cos(\varphi)\cos(t) + \sin(\varphi)\sin(t)$.*
- *On a $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi)$ pour tout $t \in \mathbb{R} \iff \frac{a}{A} = \cos(\varphi)$ et $\frac{b}{A} = \sin(\varphi)$.*
  On cherche φ en s'appuyant sur les valeurs remarquables de $\cos$ et $\sin$. On peut retrouver ces valeurs à l'aide du cercle trigonométrique.
  En fait, A est le module de $a + ib$ et φ est un argument de $a + ib$.

Exercice 7 — *Factoriser la fonction $f : t \mapsto \sqrt{3}\cos(t) - 3\sin(t)$ avec une expression de la forme $t \mapsto A\cos(t - \varphi)$.*

6 Equations algébriques

6.1 Equations polynomiales

Une fonction polynomiale P à coefficients complexes est une fonction de la forme :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \end{array},$$

avec $n \geq 0$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

Résoudre une équation polynomiale dans $\mathbb{C}$ consiste à déterminer des nombres complexes z vérifiant l'équation $P(z) = 0$, pour P une certaine fonction polynômiale.
Une solution de $P(z) = 0$ est appelée une *racine* de P.
Il existe un rapport étroit entre racines et factorisation d'un polynôme, ce que donne le théorème suivant :

Théorème 54 (Descartes)
Soit P une fonction polynomiale et $a \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence entre :

1. *a est une racine de P*
2. *$z - a$ est un facteur de $P(z)$: il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $P(z) = (z - a) \times Q(z)$.*

6.2 Equations du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$

On sait déjà résoudre les équations polynômiales de degré 2 dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $ax^2+bx+c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.
Pour cela, l'élément important est le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta \geq 0$ alors le polynôme $ax^2 + bx + c$ possède au moins une racine et si $\Delta < 0$ il n'existe pas de racines dans $\mathbb{R}$.
Dans $\mathbb{C}$, on utilise encore le discriminant pour résoudre les équations polynômiales de degré 2, mais les résultats changent.

Théorème 55 (Racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels)
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.
On résout l'équation $(E) \quad ax^2 + bx + c = 0$ de la manière suivante :

1. *Si* $\Delta = b^2 - 4ac > 0$*, alors* (E) *admet deux racines réelles qui sont* $X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. *Si* $\Delta = 0$*, alors* (E) *admet une racine double* $X = \dfrac{-b}{2a}$.
3. *Si* $\Delta < 0$*, alors* (E) *admet deux racines complexes conjuguées qui sont* $X_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ *et* $X_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \overline{X_1}$.

Démonstration —*Admis.*

6.3 Racines carrées complexes

Dans $\mathbb{C}$*, toute équation de la forme* $z^2 = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ *possède au moins une solution.*

THÉORÈME 56 (Racine carrée d'un nombre complexe)
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.
Alors l'équation $z^2 = z_0$ *admet deux solutions dans* $\mathbb{C}$ *(ou une seule si* $z_0 = 0$*).*
Démonstration —

MÉTHODE 57 (**Calculer une racine carrée d'un nombre complexe, écriture algébrique**)
Pour calculer les racines carrées de $z_0 = a + ib \in \mathbb{C}^\star$ *:*

1. *On écrit* z_0 *sous forme algébrique :* $z_0 = a + ib$.
   On pose $z = x + iy$.
2. *On a*

$$z^2 = z_0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} |z^2| & = & |z_0| \\ Re(z^2) & = & Re(z_0) \\ Im(z^2) & = & Im(z_0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \end{array}\right.$$

On combine ensuite les deux premières lignes pour trouver les valeurs possibles de x*, puis la troisième ligne donne les valeurs de* y *en fonction de* x.

MÉTHODE 58 (**Calculer une racine carrée d'un nombre complexe, écriture exponentielle**)
Pour calculer les racines carrées de $z_0 \in \mathbb{C}^\star$ *:*

1. *On écrit* z_0 *sous forme exponentielle :* $z_0 = re^{it}$.
2. *Les deux racines carrées de* z_0 *sont* $z = \sqrt{r}e^{i\frac{t}{2}}$ *et* $z' = -\sqrt{r}e^{i\frac{t}{2}} = -z$.

EXERCICE 8 — *Calculer les racines carrées de* $2 + i$ *et* $-\sqrt{3} + i$.

6.4 Equations du second degré à coefficients complexes

Etudier les équations polynômiales du second degré à coefficients complexes (ex : $x^2 - ix + 2 = 0$) se fait exactement comme celles à coefficients réels : on utilise le discriminant.

PROPOSITION 59 (Racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes)
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ *avec* $a \neq 0$.
On résout l'équation (E) $\quad ax^2 + bx + c = 0$ *de la manière suivante :*

- *Si* $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$*, alors en notant* w *une racine carrée de* Δ*, l'équation* (E) *a deux racines qui sont* $Z_1 = \dfrac{-b-w}{2a}$ *et* $Z_2 = \dfrac{-b+w}{2a}$.
- *Si* $\Delta = 0$*, alors* (E) *possède une racine double* $Z = \dfrac{-b}{2a}$.

Démonstration — *Sur feuille.*

Exercice 9 — *Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré (E) :* $z^2+2z-i=0$.

6.5 Somme et produit de racines

Il y a un lien entre les coefficients d'une équation du second degré et ses solutions.

Proposition 60 (Relations coefficients/racines)
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et (E) $\quad az^2+bz+c=0$.
Alors $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (éventuellement égaux) sont solutions de (E) si et seulement si :

$$z_1+z_2=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1z_2=\frac{c}{a}.$$

Exemple 61 — *Si z_1 et z_2 désignent les racines du polynôme $P(z)=z^2-z+4$, alors d'après la proposition précédente on a $z_1+z_2=-1$et $z_1z_2=4$.*

Remarque 62 — *Soit $(E) : a^2+bz+c=0$.*
Si l'on connaît une solution z_1 de (E), on peut facilement déduire l'autre solution z_2 à l'aide de la relation $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$.

Exemple 63 — *Considérons l'équation $z^2+(-i-2)z+(1+i)=0$.*
On remarque que $z_1=1$ est une solution évidente de l'équation. On en déduit alors que l'autre solution de l'équation est : $z_2=-\dfrac{b}{a}-z_1=1+i$.

Méthode 64
Avec les relations coefficients/racines, on sait que résoudre un système de la forme :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{r} z_1+z_2=s \\ z_1z_2=p \end{array} \right. \qquad z\in\mathbb{C},$$

(avec $s, p \in \mathbb{C}$) est exactement équivalent à résoudre l'équation $z^2-sz+p=0$.

Exercice 10 — *Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système (S) :* $\left\{ \begin{array}{r} z_1+z_2=i \\ z_1z_2=2 \end{array} \right.$.

On sait maintenant résoudre davantage de systèmes d'équations.

7 Racines n-ièmes

La méthode utilisée pour résoudre l'équation $z^2=z_0$ dans $\mathbb{C}$ se généralise aux équations de la forme $z^n=z_0$ (avec $n \geq 1$).

Définition 65 (Racine n-ième d'un nombre complexe)
Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- *Une **racine n-ième de** z_0 est un nombre $Z \in \mathbb{C}$ tel que $Z^n=z_0$.*
- *Les racines n-ièmes de 1 sont appelées les **racine n-ièmes de l'unité**.*
  L'ensemble des racines n-ième de l'unité se note $\mathbb{U}_n$.

Exemple 66 — *On a :*

- $\mathbb{U}_1 = \{1\}$
- $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{U}_n$

7.1 Racines de l'unité

PROPOSITION 67
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On a :*
- $\mathbb{U}_n \neq \emptyset$.
- *Pour* $z, w \in \mathbb{U}_n$, *on a* $z.w \in \mathbb{U}_n$
- *Pour* $z \in \mathbb{U}_n$, *on a* $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$

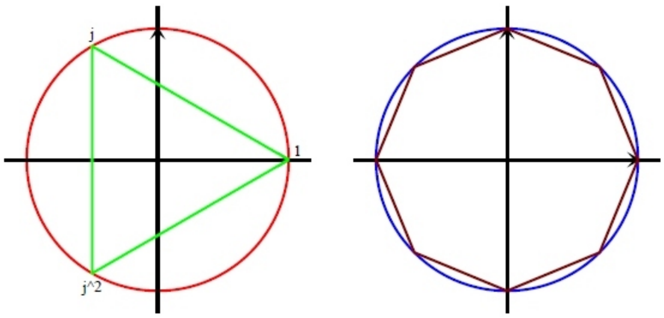
Démonstration —

On va décrire explicitement les éléments de $\mathbb{U}_n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

PROPOSITION 68
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. *Alors :*

$$\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}.$$

Il y a exactement n *racines* n*-ièmes de l'unité.*
En posant $\xi = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, *on a* $\mathbb{U}_n = \{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\}$.
Démonstration — *On utilise l'écriture exponentielle pour montrer qu'il y a au plus* n *solutions, et on donne la forme de* n *solutions.* □



Les racines 3*èmes et les racines* 8*èmes de l'unité, sur le cercle trigonométrique.*

PROPOSITION 69
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $w \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.
Alors, on a $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$.
La somme des racines n*-ièmes de l'unité vaut* 0.
Démonstration — *On utilise une somme géométrique.*

EXERCICE 11 — *1. Représenter géométriquement les éléments de* $\mathbb{U}_3$.

2. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. *Que vaut* $1 + j + j^2$ *?*
Que valent $j + j^2$, j^4 *?*

7.2 Racines n-ième quelconques

Déterminons maintenant les racines n*-ièmes d'un nombre complexe* $z_0 \in \mathbb{C}$.

PROPOSITION 70
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. *Pour* $z_0 = re^{it}$ *l'écriture exponentielle de* z_0, *on a :*

$z = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{t}{n}}$ est une racine n-ième de z_0. ($z^n = z_0$)
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = z_0$ est :

$$S = \{z.\xi,\, \xi \in \mathbb{U}_n\} = \{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{t}{n} + \frac{2ik\pi}{n}},\, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}.$$

Démonstration — *Sur feuille. On se ramène au cas $w^n = 1$ des racines n-èmes de l'unité.*

Si $z_0 \neq 0$, ce nombre possède exactement n racines n-ièmes de l'unité (si $z_0 = 0$ il en a une seule).
Ce phénomène est très différent de $\mathbb{R}$ (par exemple, $x^3 = 2$ a une seule solution sur $\mathbb{R}$).

Méthode 71
Pour déterminer les racines n-ièmes de z_0.

1. *On détermine une solution z de $Z^n = z_0$.*
   En général, on utilise $z = \sqrt[n]{|z_0|} e^{iArg(z_0)/n}$.
2. *Si $z_0 \neq 0$, on a $Z^n = z_0$ si et seulement si $\frac{Z^n}{z^n} = 1$.*
   Ainsi, on obtient toutes les racines n-ièmes de z_0 sont de la forme $z.\xi$, où ξ est une racine n-ième de l'unité.

Exercice 12 — *Déterminer les racines 3-ièmes de $1+i$.*

8 Exponentielle complexe

Vous avez vu au lycée l'exponentielle d'un nombre réel, e^x. Nous avons défini l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur, e^{it}.
Nous pouvons maintenant combiner ces deux fonctions.

Définition 72 (**Exponentielle complexe**)
Soit $z \in \mathbb{C}$.
*On appelle **exponentielle complexe** de z, noté e^z (ou $\exp(z)$), le nombre complexe $e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)} \times e^{i\mathfrak{Im}(z)}$.*

Exemple 73 — *On a*

- $e^{1+i\pi} = e \times e^{i\pi} = -e$
- $e^{-2+i} = \dfrac{e^i}{e^2}$

Proposition 74 (**Exponentielle d'une somme**)
Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Alors, on a :

$$\exp(z_1 + z_2 + \dots + z_n) = \exp(z_1) \times \exp(z_2) \times \dots \times \exp(z_n).$$

Démonstration — *On utilise la définition de l'exponentielle complexe et ses propriétés, avec l'écriture algébrique des z_i.*

Autrement dit, $\exp(\sum_k z_k) = \Pi_k \exp(z_k)$.

Proposition 75
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes. Alors,

$$e^z = e^{z'} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } z = z' + 2ik\pi.$$

Démonstration — *On résout l'équation $e^{z-z'} = 1$.*

9 Nombres complexes et géométrie plane

L'identifixation entre points du plan, vecteurs du plan, et nombres complexes est extrêmement riche d'applications géométriques. En effet, les opérations et outils sur les nombres complexes que nous avons font qu'il est plus facile de démontrer certaines propriétés géométriques que dans le cadre classique.

Dans toute cette section on se place dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On rappelle que chaque point du plan est associé à un nombre complexe (son affixe).

Théorème 76 (Interprétation géométrique)
Soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ trois points du plan, avec $b \neq a$. Alors :
- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{||\vec{AC}||}{||\vec{AB}||}$
- $Arg(\dfrac{c-a}{b-a}) = (\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}\ \ [2\pi]$

9.1 Alignement et orthogonalité

Proposition 77
Soient A, B, C trois points du plan distincts deux à deux, d'affixes z_A, z_B et z_C. Alors :
- *Les points A, B et C sont alignés si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_C - z_A = \lambda \times (z_B - z_A)$. (Vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ colinéaires)*
- *les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(z_C - z_A) = i\lambda(z_B - z_A)$. (Vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ orthogonaux)*

Démonstration — *Sur feuille. On utilise les propriétés de la géométrie euclidienne.*

9.2 Transformations du plan

Une transformation du plan est une fonction bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
On en décrit ici plusieurs transformations apparaissant souvent en physique ou en sciences de l'ingénieur.

Définition 78 (**Rotation**)
Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
*La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est une transformation du plan, notée $R_{\Omega,\theta}$. Elle vérifie les 3 conditions suivantes :*
1. *$R_{\Omega,\theta}(M) = M \iff M = \Omega$. (Le centre est invariant)*
2. *Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on a $||\overrightarrow{\Omega R_{\Omega,\theta}(M)}|| = ||\overrightarrow{\Omega M}||$. (Conserve les longueurs)*
3. *Pour tout $M \in \mathcal{P}$, on a $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega R_{\Omega,\theta}(M)}}\right) = \theta \quad [2\pi]$ (Tourne d'un angle θ)*

Dessin sur feuille.

Proposition 79
La rotation $R_{\Omega,\theta}$ est représentée par la fonction :

$$R_{\Omega,\theta} : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array}.$$

Démonstration —

Définition 80 (**Translations**)
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
La ***translation*** *du plan de vecteur $\vec{u}$ est l'unique transformation du plan qui à tout point $M \in \mathcal{P}$ associe le point $M' \in \mathcal{P}$ vérifiant : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.* ***Dessin sur feuille.***

Proposition 81
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe b.
La translation de vecteur $\vec{u}$ est associée à la fonction :

$$T_b : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+b \end{array}$$

Démonstration —

Définition 82 (**Homothéties**)
*L'****homothétie*** *de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est la transformation du plan qui à tout point du plan M associe le point M' vérifiant :*

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}.$$

Dessin sur feuille.

Proposition 83
Soient Ω d'affixe ω et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors l'homothétie de centre Ω et de rapport λ est asociée à la fonction :

$$H_{\Omega,\lambda} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & k(z-\omega)+\omega \end{array}.$$

Démonstration —

Proposition 84
La conjuguaison complexe $S : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array}$ *est une fonction représentant la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.*
Démonstration —

Exercice 13 — *Soit A un point d'affixe a, avec $a \neq 0$. Donner l'expression de la fonction f associée à la symétrie par rapport à la droite (OA).*
Indication : On pourra s'aider de la conjugaison complexe et de rotations.

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

- *Ensemble* $\mathbb{C}$. *Forme algébrique* $z = x + iy$. *Partie réelle* $Re(z)$, *partie imaginaire* $Im(z)$. *Somme, produit, quotient de nombres complexes.*
- *Nombre complexe conjugué* $\bar{z} = x - iy$.
  Calculs : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$, $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$.
- *Formule du binôme* $(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$ *et somme géométrique* $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ *(si* $z \neq 1$*). Utilisation pour développer* $(x+iy)^n$.
- *Module* $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. *Module d'un produit* $|zw|$, *d'un quotient* $|\frac{z}{w}|$.
  Relation $|z|^2 = z\bar{z}$. *Inégalité triangulaire* $|z+w| \leq |z| + |w|$ *(démo à connaître).*
- *Liens entre les précédents objets et la géométrie (Abscisse et ordonnée, symétrie selon l'axe des abscisses, longueur d'un segment)*
- *Nombres complexes de module* 1. *Ensemble* $\mathbb{U}$. *Ecriture sous la forme* $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$. *Nombres associés aux angles particuliers* $(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi)$. *Propriétés de* e^{it} *:* *Produit* $e^{it}e^{it'}$, *quotient* $\frac{e^{it}}{it'}$, *puissance* $(e^{it})^k$.
- *Factorisation par l'arc-moitié de* $e^{it}+e^{it'}$. *Formules d'Euler pour* $\cos(t)$ *et* $\sin(t)$. *Formule de Moivre pour* $\cos(kx)$.
  Utiliser le passage aux complexes pour linéariser un produit de cos/sin, pour factoriser une somme de cos/sin. Ex : Calcul de $\sum_k \cos(kx)$ *(calcul à savoir refaire).*
- *Ecriture exponentielle d'un nombre complexe* $z = re^{it}$. *Module* $z = |z|$, *argument* t.
  Liens entre écriture algébrique $x + iy$ *et écriture exponentielle* re^{it}.
- *Calcul des solutions de* $z^2 = z_0$ *: Méthode avec l'écriture exponentielle* $z_0 = re^{it}$. *Méthode avec l'écriture algébrique* $z_0 = a + ib$.
- *Résolution de* $az^2 + bz + c = 0$ *à l'aide du discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$ *et du calcul de racines carrées complexes.*
- *Racines n-ièmes de l'unité* $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, *ensemble* $\mathbb{U}_n$. *Calcul de* $\sum_{k=0}^{n} \zeta^k$. *Résolution de* $z^n = z_0$, *avec l'écriture exponentielle* $z_0 = re^{it}$.
- *Fonction exponentielle complexe :* $z \mapsto e^z = e^x e^{iy}$. *Exponentielle complexe d'un produit, d'une somme. Solutions de* $e^z = 1$.