Chapitre 8
Limites et continuité pour les fonctions

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Limite d'une fonction en un point **1**
2.1 Limites finies 1
2.2 Limites infinies 2
2.3 Limites à gauche et à droite 3
2.4 Opérations sur les limites 4
2.5 Limite d'une composée 5
2.6 Théorème de comparaison 6
2.7 Théorèmes d'encadrement 6
2.8 Fonctions monotones et limites à gauche/à droite 6
2.9 Croissances comparées 7

3 Continuité en un point **7**
3.1 Définitions 7
3.2 Continuité et opérations 8
3.3 Continuité et suites 8

4 Continuité sur un domaine **9**
4.1 Opérations sur les fonctions continues 9
4.2 Théorème des valeurs intermédiaires 10
4.3 Equations de la forme $f(x) = k$ 12
4.4 Théorème de la bijection 13

5 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ **15**
5.1 Généralités 15
5.2 Cas des fonctions continues croissantes 15

6 Continuité et fonctions à valeurs complexes **17**
6.1 Opérations sur les limites 18
6.2 Fonctions continues et fonctions bornées 18

Vidal AGNIEL

1 Introduction

On étudie dans ce chapitre la notion de limite de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ où dans la plupart du temps $f : I \to \mathbb{R}$ est définie sur un intervalle. Cette notion est plus délicate que celle de suites.. Elle a vu le jour sous sa forme moderne au $19^{\text{ème}}$ siècle grâce aux contributions de mathématiciens comme Karl Weierstrass ou Augustin Cauchy.

Nous allons aussi définir et développer la notion intuitive de fonction continue, en un point et sur des intervalles. Nous appliquerons cette notion au travers du théorème des valeurs intermédiaires qui permet de déterminer simplement si un point est dans l'image directe d'une fonction.
Puis nous traiterons du théorème de la bijection qui permet de donner un critère simple pour reconnaître une bijection continue pour les fonctions définies sur un intervalle : la stricte monotonie.
Une application de la notion de continuité est l'étude des suites récurrentes vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue et monotone.

Enfin, nous aborderons les limites de fonctions à valeurs complexes définies sur des parties de $\mathbb{R}$ dont certains résultats ne sont plus valables dans la cas réel.

2 Limite d'une fonction en un point

2.1 Limites finies

Définition 1 (**Extrémité/Intérieur**)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de la forme $[a, b],]a, b[,]a, b]$ ou $[a, b[$.
*On dit que x_0 est une **extrémité** si $x_0 = a$ ou b.*
*On dit que x_0 est **intérieur** à I si $x_0 \in]a, b[$ (si x_0 n'est pas une extrémité).*

Définition 2 (**Limite finie d'une fonction en un point**)
Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$ ou x_0 une extrémité de I.
*On dit que f **a une limite en** x_0, s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :*
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : pour tout $x \in I$ avec $|x - x_0| < \eta$, on a $|f(x) - l| < \epsilon$.
*Dans ce cas, l est appelé la **limite de** f **en** x_0.*
On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ (prononcé : "limite, quand x tend vers x_0, de $f(x)$").
On note aussi $f(x) \to_{x \to x_0} l$ (prononcé : "$f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0").

Avec des quantificateurs, cela donne : $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.

Exemple 3 — *(Un calcul de limite) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.*
On raisonne par analyse-synthèse :

- *Analyse : Soit $\epsilon > 0$, alors :*

$$\begin{aligned} & 2x + 1 \in]3 - \epsilon, 3 + \epsilon[\\ \Longleftrightarrow & 3 - \epsilon < 2x + 1 \leq 3 + \epsilon \\ \Longleftrightarrow & 2 - \epsilon < 2x \leq 2 + \epsilon \\ \Longleftrightarrow & 1 - \frac{\epsilon}{2} < x < 1 + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

- *Synthèse : D'après l'étape d'analyse, pour tout $\epsilon > 0$, en posant $a = \frac{\epsilon}{2}$ on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 1| < a$, on a $|f(x) - 3| < \epsilon$ (càd $f(x) \in [3 - \epsilon, 3 + \epsilon]$).*
- *Conclusion : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$*

Pour les fonction f définies sur un intervalle I infini, on définit également la notion de limite en $-\infty/+\infty$.

Définition 4 (**Limite en l'infini**)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $l \in \mathbb{R}$.
*On dit que f **a une limite en** $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) qui vaut l, si :*
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : pour tout $x \in I$ avec $x \geq a$, (resp. $x \leq -a$), on a $|f(x) - l| \leq \epsilon$.
*Dans ce cas, l est appelé la **limite de** f **en** $+\infty$ (ou $-\infty$).*
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (prononcé : "limite, quand x tend vers $+\infty$, de $f(x)$").
On note aussi $f(x) \to_{x\to+\infty} l$ (prononcé : "$f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$").
Dessin sur feuille.

Exemple 5 — *(Un calcul de limite) On considère la fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.*

Argument sur feuille.

Proposition 6 (**Unicité de la limite**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$ ou une extrémité de I.
Si f admet une limite en x_0, alors cette limite est unique.
Si f admet une limite en $+\infty$ ou $-\infty$, alors cette limite est unique.
Démonstration —*Admis.*

Remarque 7 — *D'après la proposition précédente, quand une limite existe elle est unique.*
*On peut donc bien parler de **la** limite de f en $x_0/+\infty/-\infty$.*

2.2 Limites infinies

Dans la précédente partie nous avons traité des limites finies. Mais il est possible que lorsque x tend vers un point x_0 (ou vers l'infini), la valeur $|f(x)|$ devienne aussi grande que l'on veut. On définit proprement tout cela.

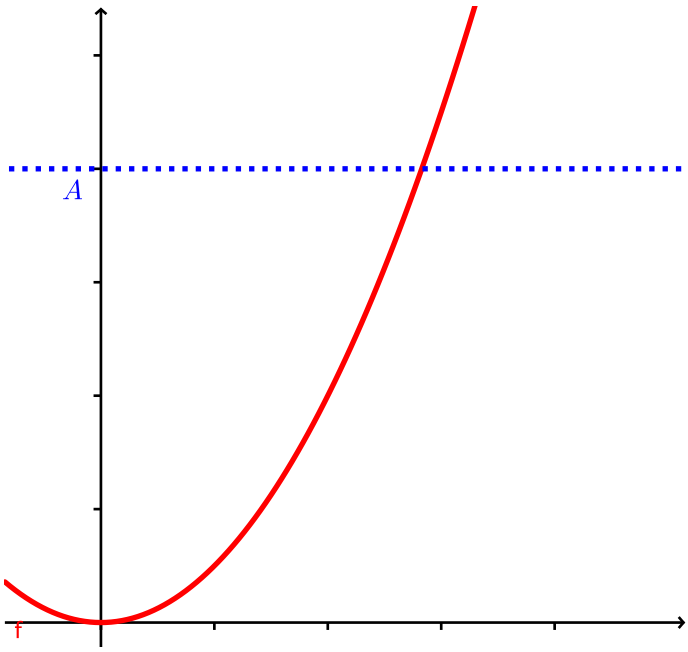
Définition 8 (**Limite $+\infty$ en un point**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$ ou x_0 une extrémité de I.
On dit que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 si : Pour tout $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \eta$, on a $f(x) > M$.
*Dans ce cas, $+\infty$ est appelé la **limite de** f **en** x_0.*
On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ (prononcé : "limite, quand x tend vers x_0, de $f(x)$").
On note aussi $f(x) \to_{x\to x_0} +\infty$ (prononcé : "$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0").

Définition 9 (**Limite $+\infty$ en l'infini**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ (ou $-\infty$) si : Pour tout $M > 0$, il existe a tel que : pour tout $x \in I$ tel que $x > a$ (ou $x < a$), on a $f(x) > M$.
*Dans ce cas, $+\infty$ est appelé la **limite de** f **en** $+\infty$ (ou $-\infty$).*
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (prononcé : "limite, quand x tend vers $+\infty$, de $f(x)$").
On note aussi $f(x) \to_{x\to+\infty} +\infty$ (prononcé : "$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$").

Définition 10 (**Limite $-\infty$ en un point ou en l'infini**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f admet $-\infty$ pour limite en x_0 si $-f(x) \to_{x\to x_0} +\infty$.

On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ si $-f(x) \to_{x\to+\infty} +\infty$.
On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ si $-f(x) \to_{x\to-\infty} +\infty$.
*Dans ce cas, $-\infty$ est appelé la **limite de f en** x_0 (ou $+\infty/-\infty$).*

Dessin :



Exemple 11 — *La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.*
Prenons $\epsilon > 0$. Pour $0 < x < \epsilon$, on a $\frac{1}{x} > \frac{1}{\epsilon} > 0$ (tend vers $+\infty$ à droite de 0). Alors que si $-\epsilon < x < 0$, on a $\frac{1}{x} < \frac{-1}{\epsilon} < 0$ (tend vers $-\infty$ à gauche de 0).

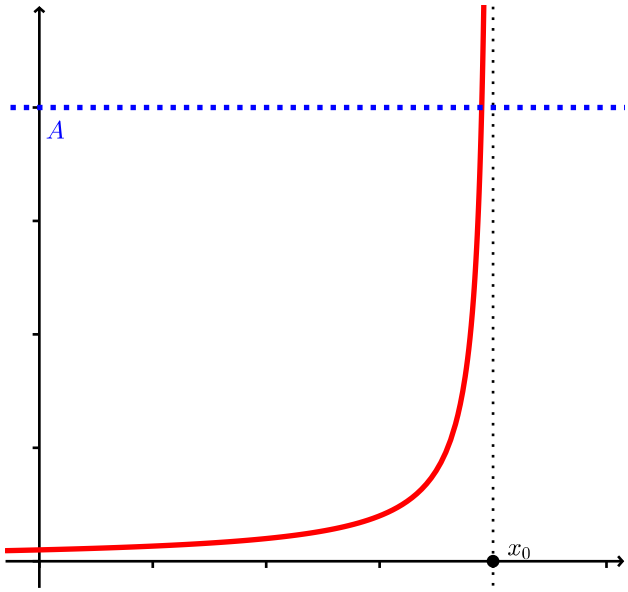
Exercice 1 — *Montrer que $x \mapsto -2x+1$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

2.3 Limites à gauche et à droite

Définition 12 (**Limite $+\infty$ à droite/à gauche**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$ ou x_0 une extrémité de I.
On dit que f admet $+\infty$ pour limite à droite de x_0 (ou à gauche de x_0) si : Pour tout $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : pour tout $x \in I$ tel que $x \in]x_0, x_0+\eta[$ (ou $x \in]x_0-\eta, x_0[$), on a $f(x) > M$.
*Dans ce cas, $+\infty$ est appelé la **limite de f à droite en** x_0 (ou à gauche).*
On note $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ (prononcé : "limite, quand x tend vers x_0 à droite, de $f(x)$").
On note aussi $f(x) \to_{x\to x_0^+} +\infty$ (prononcé : "$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 à droite"). On note $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ (prononcé : "limite, quand x tend vers x_0 à gauche, de $f(x)$").
On note aussi $f(x) \to_{x\to x_0^-} +\infty$ (prononcé : "$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 à gauche").

Définition 13 (**Limite $-\infty$ à droite et à gauche**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$ ou x_0 une extrémité de I.
On dit que f admet $-\infty$ pour limite à droite de x_0 si $-f(x) \to_{x\to x_0^+} +\infty$.
On dit que f admet $-\infty$ pour limite à gauche de x_0 si $-f(x) \to_{x\to x_0^-} +\infty$.

Dessin :



Définition 14 (**Limite finie à gauche/à droite**)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$ ou x_0 une extrémité de I.
*On dit que f **a une limite à droite en** x_0 (ou à gauche), s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :*
*Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que : pour tout $x \in I$ avec $x \in]x_0, x_0+\eta[$ (ou $x \in]x_0-\eta, x_0[$), on a $|f(x) - l| < \epsilon$. Dans ce cas, l est appelé la **limite à droite de f en** x_0.*
On note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$ (prononcé : "limite, quand x tend vers x_0 à droite, de $f(x)$").
On note aussi $f(x) \to_{x \to x_0^+} l$ (prononcé : "$f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 à droite").

Exemple 15 — *La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$ vérifie : $f(x) \to_{x \to 0^+} +\infty$ et $f(x) \to_{x \to 0^-} -\infty$.*

Exercice 2 — *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$

Avec toutes ces notions de limites (qui sont très similaires), nous avons un théorème pour en relier certaines.

Théorème 16
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une application et $x_0 \in I$.
Alors, f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$ (dans le cas où ces limites existent).
Démonstration —*Admis.*

2.4 Opérations sur les limites

Les définitions des limites se comportent bien avec les opérations sur les nombres réels.

Proposition 17 (**Opérations sur les limites finies**)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in I$. On suppose que f et g admettent des limites finies en x_0, que l'on note l et l'. Alors :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + l'$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \times g(x) = l \times l'$
3. *Si $l' \neq 0$,* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$

On suppose que f et g admettent des limites finies en ∞ (ou $-\infty$), que l'on note l et l'. Alors :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} (f(x)+g(x)) = l + l'$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} f(x)\times g(x) = l \times l'$
3. *Si* $l' \neq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$

Remarque 18 — *D'après la propriété précédente, pour f telle que $f(x) \to_{x\to x_0} l$, si on multiplie f par une constante $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\lambda \times f$ admet pour limite $\lambda \times l$ en x_0.*

Exemple 19 — *Soient $f : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto x^2 - 1$. On sait que $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$ et $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 1 = 3$. D'après la proposition précédente on en déduit que :*

1. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 + x^2 - 1 = 8 + 3 = 11$
2. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 \times (x^2 - 1) = 8 \times 3 = 24$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{8}{3}$

Quand les limites sont nulles ou infinies, on retrouve les cas de formes indéterminées (FI) vus avec les suites ("$+\infty - (+\infty)$),$0 \times +\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{+\infty}{+\infty}$,...). On prend la même convention que dans le chapitre sur les suites :

— Pour tout $a > 0$, on pose $a \times +\infty = +\infty$ et $a \times -\infty = -\infty$.
— Pour tout $a < 0$, on pose $a \times +\infty = -\infty$ et $a \times -\infty = +\infty$.

Exemple 20 — *On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+1 = -\infty$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+(x^2-1) = 1$. On ne peut donc pas sommer les limites infinies dans certains cas. Ces cas sont appelés des* ***formes indéterminées****.*

Proposition 21 (**Limites infinies**)
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in D$ ou x_0 extérieur à D.
On suppose que f admet une limite finie en x_0 que l'on note l. On a :

1. *Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = -\infty$.*

On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$ (ou $-\infty$) que l'on note l. On a :

1. *Si $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} (f(x)+g(x)) = +\infty$.*
2. *Si $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} (f(x)+g(x)) = -\infty$.*

2.5 Limite d'une composée

Proposition 22 (**Limites et composée**)
Soient $h : I \to D$,$g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soient $a \in I$, $b \in D$, $c \in \mathbb{R}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} (g \circ h)(x) = c.$$

Méthode 23
Pour déterminer la limite d'une fonction composée $g \circ h$ en x_0 :

- *On détermine la limite de h en x_0, b.*
- *On détermine la limite de g en b, c, et on conclut : la limite de $g \circ h$ en x_0 vaut c.*

Exercice 3 (Limites de composées) —

1. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}$.
2. *Montrer que* $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{3})^+} \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$.

2.6 Théorème de comparaison

Théorème 24
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que, pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq g(x)$.

1. *Soit $x_0 \in D$ tel que f et g admettent des limites (finies ou non) en ce point. Alors, on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.*
2. *Si $\lim\limits_{x\to x_0/+\infty/-\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0/+\infty/-\infty} g(x) = +\infty$.*
3. *Si $\lim\limits_{x\to x_0/+\infty/-\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0/+\infty/-\infty} f(x) = -\infty$.*

Démonstration —*Admis.*

2.7 Théorèmes d'encadrement

On présente ici la version pour les fonctions du théorème des gendarmes et du théorème de la limite monotone.

Théorème 25 (**Théorème des gendarmes**)
Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. Soient f, g, h trois fonctions définies sur I sauf éventuellement en x_0, telles que pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, alors la limite de g en x_0 existe, et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.
Démonstration —*Admis.*

Remarque 26 — *Le résultat du théorème reste vrai si on remplace x_0 par $+\infty$ ou $-\infty$.*

2.8 Fonctions monotones et limites à gauche/à droite

Les fonctions croissantes/décroissantes possèdent des propriétés intéressantes concernant les limites :

Théorème 27 (**Théorème de la limite monotone pour les fonctions**)
Soient $I =]a, b[$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante/décroissante.

- *Si f est croissante et majorée sur I, alors f admet une limite finie en b^-.*
- *Si f est croissante et minorée sur I, alors f admet une limite finie en a^+.*
- *Si f est décroissante et minorée sur I, alors f admet une limite finie en b^-.*
- *Si f est décroissante et majorée sur I, alors f admet une limite finie en a^+.*

Remarque 28 — *Attention ! Si f est croissante sur $I =]a; b[$ mais non majorée sur I, alors f admet une limite en b^- qui vaut $+\infty$.*
Cela est de même dans les 3 autres cas de figure (si non-majorée, limite de $+\infty$; si non-minorée, limite de $-\infty$).
De manière générale, une fonction monotone sur $]a; b[$ admet toujours des limites en a^+ et en b^- qui sont finies ou infinies.

2.9 Croissances comparées

Pour enlever un grand nombre de formes indéterminées de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, ou $\dfrac{0}{0}$, le grand résultat est d'utiliser les croissances comparées.

THÉORÈME 29 (**Croissances comparées**)
Soient $\alpha, b > 0$. Alors, on a :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln^b(x)} = +\infty$
3. $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$
4. $\lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$

Dit moins formellement, si l'on regarde un produit ou un quotient de fonctions usuelles, les fonctions de type exponentiel ($x \mapsto \exp(ax)$) l'emportent sur les fonctions de type puissance ($x \mapsto x^a$), qui l'emportent sur les fonctions de type logarithme ($x \mapsto \ln(x)^b$).
Auquel cas, pour déterminer la limite de ce produit/quotient, on se réfère à la limite du terme dominant.

EXEMPLE 30 — *Pour $f(x) = \frac{e^{2x}+x\ln(x)}{3-x^2}$ on a $f(x) = \frac{e^x}{x^2}\frac{1+\frac{x\ln(x)}{e^x}}{-1+\frac{3}{x^2}}$.*
On a $\frac{3}{x^2} \to_{x\to+\infty} 0$. Les croissances comparées nous donnent $\frac{x\ln(x)}{e^x} \to_{x\to+\infty} 0$, et $\frac{e^x}{x^2} \to_{x\to+\infty} +\infty$. Donc, par produit de limites, on a $f(x) \to_{x\to+\infty} -\infty$.

3 Continuité en un point

Maintenant que nous avons défini les limites pour les fonctions, on peut définir la continuité.

3.1 Définitions

DÉFINITION 31 (**Fonction continue à droite et à gauche en un point**)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ ou une extrémité de I.
On dit que f est continue à droite (ou à gauche) en a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$).

EXEMPLE 32 — *La fonction partie entière est un exemple typique de fonction continue à droite mais pas à gauche en $a = 1$.*
En effet, pour tout $x \in]0,1[$ on a $\lfloor x \rfloor = 0$, donc $\lim\limits_{x\to1^-} \lfloor x \rfloor = \lim\limits_{x\to1^-} 0 = 0 \neq \lfloor 1 \rfloor = 1$.
Elle est bien continue à droite car pour tout $x \in]1,2[$ on a $\lfloor x \rfloor = 1$, donc $\lim\limits_{x\to1^+} \lfloor x \rfloor = \lim\limits_{x\to1^-} 1 = 1 = \lfloor 1 \rfloor$.

DÉFINITION 33 (**Fonction continue en un point** a)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ ou une extrémité de I.
On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

EXEMPLE 34 —

1. *La fonction carrée $x \mapsto x^2$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.*
2. *La fonction racine carré $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.*
3. *La fonction partie entière n'est pas continue en 1.*

Proposition 35
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Alors la fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche ***et*** *à droite en a.*
Démonstration —*Admis.*

Exercice 4 — *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est continue en 0.

3.2 Continuité et opérations

Théorème 36 (**Continuité et opérations algébriques**)
Soient f et g des fonction continues en un point a. Alors :

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f$ est continue en a.*
2. *La fonction $f + g$ est continue en a.*
3. *La fonction$f \times g$ est continue en a.*
4. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.*

Exemple 37 —

1. *la fonction $x \mapsto \ln(x) + e^x$ est continue en 1.*
2. *la fonction $x \mapsto 3.x$ est continue en 0.*
3. *la fonction $x \mapsto \ln(x) \times x$ est continue en 2.*
4. *la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est continue en 0.*

Proposition 38 (**Continuité et composéé**)
Soient f, g des fonctions et $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en b, g est continue en a, et que $g(a) = b$.
Alors $f \circ g$ est une fonction continue en a.

Exemple 39 — *La fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ est continue en 1, donc $f \circ exp : x \mapsto 1 + e^{2x}$ est continue en 0.*

3.3 Continuité et suites

Proposition 40 (**Continuité et suites**)
Soient $l \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue en l, et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite qui converge vers l.
On suppose que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \in D$.
Alors, la suite $(f(u_n))_{n \geq n_0}$ est bien définie et converge vers $f(l)$. ($f(u_n) \to_n f(l)$)

Exemple 41 — *Soient $f : x_i n\mathbb{R} \mapsto x^2 - 1$, et $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. La suite $(u_n)_n$ est convergente, de limite 1, et f est continue en $x = 1$ (avec$f(1) = 0$).*
On en déduit d'après la proposition précédente que la suite de terme générale $((1 - \dfrac{1}{n})^2 - 1)_n$ est convergente, de limite nulle.

Exercice 5 (Limite de suites) — *Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.*

En réalité la proposition précédente est un cas particulier du théorème suivant, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f soit continue en un point.

THÉORÈME 42 (**Caractérisation de la continuité par les suites**)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.
Alors, f est continue au point a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_n$ à valeurs dans I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a).$$

Cette caractérisation est très utile pour montrer qu'une fonction f n'est pas continue en un point a. (pour trouver des contre-exemples)
Il suffit de trouver une suite $(u_n)_n$ qui converge vers a mais telle que $(f(u_n))_n$ ne converge pas vers $f(a)$ (ou n'est pas convergente).

EXEMPLE 43 — *La fonction partie entière est un exemple classique de fonction qui n'est pas continue (discontinue).*
Posons la suite $(u_n)_n$ de terme général, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lfloor 1 \rfloor = 1$ mais :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \lim_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor = 0 \neq 1$$

On en déduit que la fonction partie entière n'est pas continue en 1.

4 Continuité sur un domaine

DÉFINITION 44 (**Fonction continue sur D**)
Soient $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble (pas forcément un intervalle), et $f : D \to \mathbb{R}$.
*On dit que f est **continue** sur D si elle est continue en tout point de D.*
C'est-à-dire, f est continue sur D si pour tout $a \in D$ on a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

4.1 Opérations sur les fonctions continues

THÉORÈME 45
Soient D un ensemble et f, g des fonctions continues sur D. Alors :

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f$ est continue sur D.*
2. *La fonction $f + g$ est continue sur D.*
3. *La fonction $f \times g$ est continue sur D.*
4. *Si g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.*

EXEMPLE 46 —
- *La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ est continue sur $]0, 2[$, mais pas sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'est pas continue en 0 (ni même définie en 0).*
- *Les fonctions polynomiales ($x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$) sont continues sur $\mathbb{R}$.*
- *Soient P, Q deux fonctions polynomiales sur I telles que Q ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur I.*

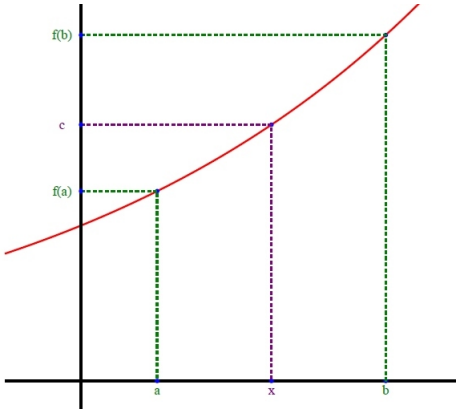
La composée de fonction fonctions continues, si elle est bien définie, est elle-même continue.

THÉORÈME 47 (**Continuité et composéé**)
Soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to J$ deux fonctions continues.
Alors la fonction $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ est continue.
Démonstration —*Admis.*

4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intérmediaires stipule que l'image d'une intervalle par une fonction continue sur cet intervalle est lui-même un intervalle.
Comme nous le verrons dans cette partie, on peut tirer beaucoup d'informations de ce résultat.

THÉORÈME 48 (**Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)**)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors, pour tout réel d entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = d$.
Démonstration —*Hors programme.*

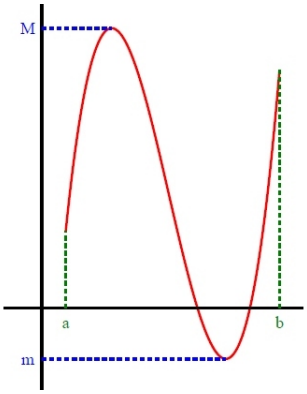


Exemple pour une fonction croissante

COROLLAIRE 49
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors on a c, d tels que $f([a, b]) = [c, d]$.
L'image par f d'un intervalle, $f([a, b])$, est un intervalle.
Démonstration —*Hors programme.*

COROLLAIRE 50 (**Théorème des bornes atteintes**)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors f possède un maximum et un minimum sur $[a, b]$.
Une fonction f continue sur un intervalle fermé borné est ***bornée et atteint ses bornes****.*

REMARQUE 51 — *Pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $[c, d] = f([a, b])$, on a alors $c = min_{t\in[a,b]} f(t)$ et $d = max_{t\in[a,b]} f(t)$.*



f a un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

MÉTHODE 52 (**Trouver le minimum et le maximum d'une fonction**)
Pour reconnaître le minimum et le maximum d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$, on peut faire le tableau de variations de la fonction entre a et b. Pour tous les points x_i où f change

de monotonie (passe de croissante à décroissante, ou vice-versa), on calcule $f(x_i)$.
Le minimum de f sur $[a,b]$ correspond à la plus petite valeur $f(x_i)$ et le maximum à la plus grande valeur $f(x_i)$.

Le principe de dichotomie

Pour démontrer le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) on démontre le théorème suivant qui lui est équivalent. On utilise pour cela la méthode de *dichotomie*.

THÉORÈME 53
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.
Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.
Démonstration — On détermine deux suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ qui sont adjacentes, avec $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$.
Cela revient à construire une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ de plus en plus petits, tels que f et positive et négative aux extrémités.
Comme les suites sont adjacentes, elles convergent vers un réel $c \in]a,b[$.
Comme f est continue et que les suites sont adjacentes, on obtient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$.
Puis, on montrera que $f(c) = 0$.

Première partie On définit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par récurrence. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.
- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$.

Démontrons par récurrence sur $n \geq 0$ que : "$a_n \leq b_n$, $(a_n)_n$ est croissante, $(b_n)_n$ est décroissante, et $|b_n - a_n| \leq \frac{|b_0-a_0|}{2^n}$".
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $a_0 \leq b_0$.
Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $a_n \leq b_n$ et que $|b_n - a_n| \leq \frac{|b_0-a_0|}{2^n}$.
Ainsi, on a soit ($a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$), soit ($b_{n+1} = b_n$ et $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$).
Comme on a $a_n \leq \frac{a_n+b_n}{2} \leq b_n$, cela montre que $a_n \leq a_{n+1}$, $a_{n+1} \leq b_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$.
De plus, on a :

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| = \begin{cases} |\frac{a_n+b_n}{2} - a_n| = \frac{|b_n-a_n|}{2} = \frac{|b_0-a_0|}{2^{n+1}}, \text{ si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq 0 \\ |b_n - \frac{a_n+b_n}{2}| = \frac{|b_n-a_n|}{2} = \frac{|b_0-a_0|}{2^{n+1}}, \text{ si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \end{cases}$$

Cela termine la récurrence.
Vu que $\lim\limits_{n\to\infty+\infty} \frac{|b_0-a_0|}{2^n} = 0$, on en conclut donc que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. Ainsi, elles sont convergentes et ont la même limite $c \in]a,b[$.
Deuxième partie

On montre maintenant que $f(c) = 0$.
On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(a_n) \leq 0$. Comme f est continue, on a $f(a_n) \to_n f(c)$, et $f(c) \leq 0$.
De même, pour tout $n \geq 0$ on a $f(b_n) \geq 0$. Donc, par continuité de f sur $[a,b]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$ et $f(c) \geq 0$.
Ainsi $f(c) \leq 0$ et $f(c) \geq 0$ donc $f(c) = 0$. □

Application à l'Informatique
On peut utiliser la même construction que dans la preuve (l'algorithme de dichotomie) pour déterminer une valeur approchée du réel c.
A chaque étape, la marge d'erreur est divisée par 2. En n étapes on a ainsi divisé l'erreur d'approximation par 2^n, ce qui est très satisfaisant. (Pour diviser l'erreur par 100.000, il faudra 17 étapes.)

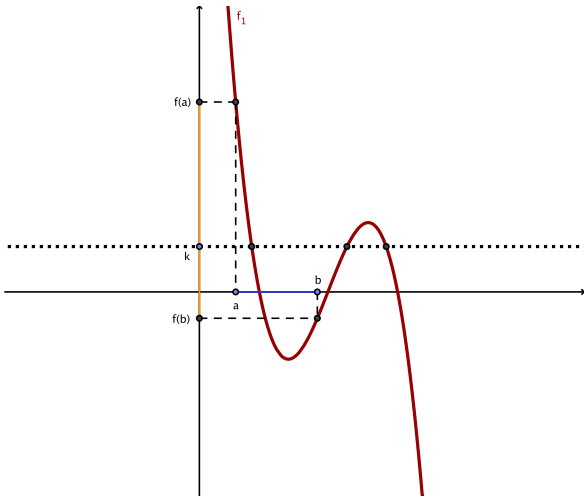
Le programme `dicho` *fournit une approximation d'une racine de f sur l'intervalle $[a_0, b_0]$ après n pas de l'algorithme de dichotomie.*

```
def dicho(f,a0,b0,n): %f fonction admettant une racine sur [a_0,b_0]
    a=a0
    b=b0
    m=(a+b)/2
    for k in range(1,n+1):              %on calcule n termes des suites (a_n) et (b_n)
        if f(a)*f(m)<=0 : %si f(a)<=0 et f(m)=>0
            a=a
            b=m
            m=(a+b)/2
        else %si f(m)<=0 et f(b)=>0
            a=m
            b=b
            m=(a+b)/2
    return m %la fonction renvoie le milieu de [a_n, b_n]
```

4.3 Equations de la forme $f(x) = k$

Corollaire 54
Soient $[a, b]$ un intervalle fermé et f une fonction continue sur $[a, b]$.
Alors, pour tout réel kr entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = r$ possède au moins une solution.

Remarque 55 — *En utilisant la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, on peut prouver qu'un fonction n'est pas continue en un point.*
Par exemple, le fonction partie entière n'est pas continue sur $[0, 2]$ car l'équation $\lfloor x \rfloor = \dfrac{1}{2}$ n'a pas de solutions.



Existence de solutions à l'équation $f(x) = k$

Méthode 56 (**Montrer que $f(x) = k$ possède une solution**)
Soient $f = [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $k \in \mathbb{R}$. Pour montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une solution on peut procéder en général de deux façons :

1. *On calcule $f(a)$ et $f(b)$. Si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on en déduit du TVI que $f(x) = k$ admet une solution dans $[a, b]$.*
2. *Si k n'est pas compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on dresse le tableau de variation de f sur $[a, b]$. On applique une méthode précédente pour obtenir le maximum et le minimum de f sur*

$[a,b]$. Si k est compris entre $\min(f)$ et $\max(f)$, alors d'après un corollaire du TVI on sait que $f(x)=k$ adme une solution dans $[a,b]$ (car $f([a,b])$ est un intervalle).

Remarque 57 — *On peut aussi appliquer la méthode précédente aux cas des intervalles ouverts $]a,b[$ ou semi-ouverts $]a,b]/[a,b[$, mais il faudra vérifier que le réel k est **strictement** inférieur ou supérieur à l'image des extrémités n'appartenant pas à l'intervalle.*

Exemple 58 — *Soit* $\begin{array}{rccl} f: & [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x-x^3 \end{array}$ *et $k=1,5$.*
Montrons que l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,2]$.
On a $f(0)=3\times 0-0^3=0$ et $f(2)=3\times 2-2^3=6-8=-2$ et $1,5$ n'est pas compris entre 0 et -2, on ne peut pas directement appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. On doit donc dresser le tableau de variations de f sur $[0,2]$. Puisque la dérivée de f sur $[0,2]$ est $f'(x)=3x-3x^2=3(1-x^2)=3(1-x)(1+x)$ on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		2
$3(1-x)(1+x)$		$+$	0	$-$	
$3x-x^3$	*0*	↗	*2*	↘	*-2*

On constate que $1,5$ est compris entre $f(0)=0$ et $f(1)=2$, on en déduit que l'équation $f(x)=1,5$ admet au moins une solution dans $[0,2]$.
Elle en admet exactement deux, exactement une dans $[0,1]$ et exactement une dans $[1,2]$.

Corollaire 59
Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (ou $-\infty$).
Alors, pour tout $c>f(a)$ (ou $c<f(a)$), l'équation $f(x)=c$ admet au moins une solution dans $[a,+\infty[$.

Remarque 60 — *Ce corollaire est aussi valable pour les intervalles de la forme $]-\infty,a]$.*

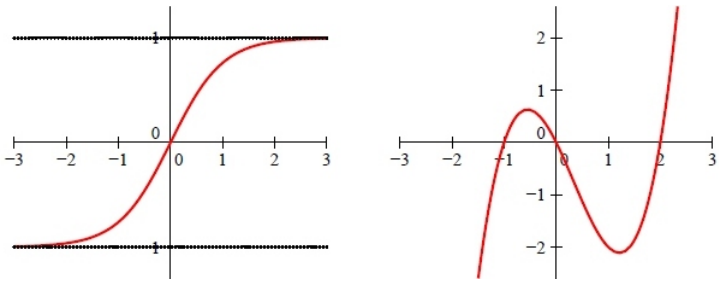
Exercice 6 —

1. *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $x+\ln x-n=0$ admet une solution unique x_n dans $\mathbb{R}_+^*$.*
   Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, on posera $f_n(x)=x+\ln x-n$ et on étudiera les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.*
   En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
3. *En faisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(u_n)_n$ diverge.*

4.4 Théorème de la bijection

Quand f est une fonction bijective et continue, sa bijection réciproque f^{-1} peut être continue. Le résultat principal à ce sujet est le théorème de la bijection, qui se déroule sur des intervalles.

Théorème 61 (**Théorème de la bijection**)
Soient I un intervalle et $f:I\to\mathbb{R}$ continue. Soit $J=f(I)$.
Si f est strictement croissante/décroissante sur I, alors $f:I\to J$ est bijective.
De plus, la bijection réciproque $f^{-1}:J\to I$ est continue sur l'intervalle J.
Démonstration —



Une fonction bijective croissante, et une fonction continue non bijective.

Le tableau suivant liste les différents cas possibles d'intervalle image J en fonction de la forme initiale de I et de la monotonie de f :

Intervalle I	monotonie de f sur I	f bijective de I sur J
$[a,b]$ où $a,b \in \mathbb{R}$	strictement croissante	$J = [f(a), f(b)]$
$[a,b]$ où $a,b \in \mathbb{R}$	strictement décroissante	$J = [f(b), f(a)]$
$]a,b]$ où $a,b \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$	strictement croissante	$J =]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)]$
$]a,b]$ où $a,b \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$	strictement décroissante	$J = [f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$
$[a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$	strictement croissante	$J = [f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$
$[a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$	strictement décroissante	$J =]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)]$
$]a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$	strictement croissante	$J =]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$
$]a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$	strictement décroissante	$J =]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$

Exemple 62 — *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 + x + 1 \end{array}$ *est bijective et continue. Montrons-le :*

- *La fonction f est polynomiale donc continue.*
- *Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$.*
- *On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to/\infty} x^5 = +\infty$*

Ainsi on a $f(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[$. On sait aussi, d'après le théorème de la bijection, qu'elle est bijective et que sa bijection réciproque f^{-1} est continue.
Il n'est pas possible de donner une expression algébrique simple de f^{-1}, mais on connaît quand même des propriétés sur cette fonction.

Méthode 63 (**Montrer qu'une fonction définie sur un intervalle est bijective**)

1. *On montre que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, en utilisant la définition ou les résultats de ce chapitre.*
2. *On montre qu'elle est strictement croissante/décroissante.*
   Le plus souvent, on montre que f est dérivable et on étudie le signe de sa dérivée f'.
3. *On utilise le tableau précédent pour écrire l'intervalle $J = f(I)$.*
4. *On en conclut d'après le théorème de la bijection que $f : I \to J$ est bijective, et que $f^{-1} : J \to I$ est continue.*

Exercice 7 — *On considère la fonction $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2e^x - 1$.*

1. *Dresser le tableau de variations de ϕ, en précisant la limite en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.*
2. *Établir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue x dans $]0, +\infty[$ admet une solution, et une seule, notée α.*

3. Montrer que α appartient à l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$. On rappelle que $2 < e < 3$.

5 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

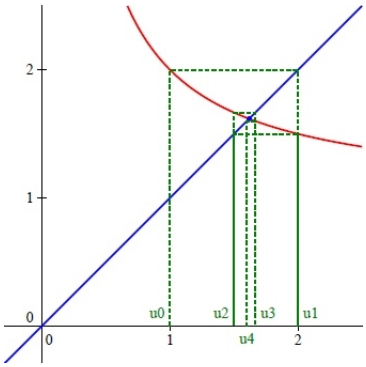
Dans cette section, on étudie les suites récurrentes $(u_n)_n$ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue.

5.1 Généralités

THÉORÈME 64
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue croissante. Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente avec $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite $(u_n)_n$ est convergente de limite $l \in I$, alors on a $f(l) = l$.
Démonstration — *On utilise le fait que $u_{n+1} = f(u_n)$ et les propriétés de la continuité.*

Pour étudier la convergence de certaines suites récurrentes, il faut donc étudier les points fixes de certaines fonctions continues (les l tels que $f(l) = l$).
Le théorème suivant aide beaucoup dans le cas où on a $f : I \to I$.

THÉORÈME 65 (**Théorème de point fixe**)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
*Si $f([a, b]) \subset [a, b]$, alors f admet un **point fixe** dans l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire : $\exists l \in [a, b]$ tel que $f(l) = l$.*
Démonstration —On définit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
Alors, g est continue sur $[a, b]$, et on a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$.
D'après le TVI, il existe donc $l \in [a, b]$ tel que $g(l) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(l) = l$.



Une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui CV vers un point fixe de f.

5.2 Cas des fonctions continues croissantes

Voici une méthode générale pour traiter le cas des suites récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue est croissante.
Cela permet d'étudier un grand nombre de suites récurrentes.

MÉTHODE 66

- ***Étude des variations et points fixes*** *: On détermine les variations de f, en traçant son tableau de variations si nécessaire. Puis, on résout l'équation $f(x) = x$ pour trouver les points fixes de f. Ils peuvent éventuellement correspondre à la limite de la suite.*
- ***Existence de la suite, intervalle de stabilité*** *: On montre qu'il existe un intervalle I contenant u_0 tel que $f(I) \subset I$.*

- ***Monotonie de la suite*** $(u_n)_n$ *: Lorsque la fonction est croissante, la suite* $(u_n)_n$ *est monotone.*
  Pour déterminer sa monotonie on étudie le signe de $u_1 - u_0$*. Si* $u_1 - u_0 \geq 0$ *alors* $(u_n)_n$ *est croissante, mais si* $u_1 - u_0 \leq 0$ *alors* $(u_n)_n$ *est décroissante.*
- ***Convergence*** *: Si la suite* u_n *est monotone et qu'il existe un intervalle de stabilité pour* f *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_n \in [a, b]$*, alors la suite* $(u_n)_n$ *est monotone et bornée. Donc, elle est convergente. D'après un théorème précédent, la limite de* $(u_n)_n$ *est un point fixe de* f *sur* $[a, b]$*.*
  Si les termes de $(u_n)_n$ *appartiennent à un intervalle* $[a, b]$ *qui est stable par* f*, mais sur lequel* f *n'a pas de points fixes, on peut en déduire que la suite* $(u_n)_n$ *est divergente.*

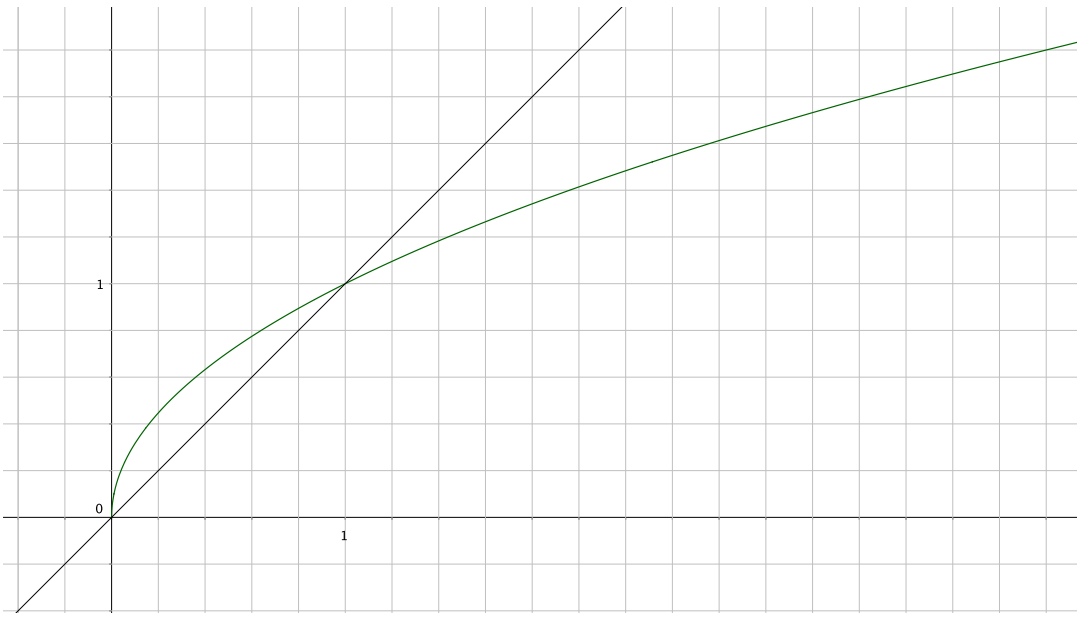
Exemple 67 — *(Étude d'une suite récurrente) Soit* $(u_n)_n$ *la suite récurrente définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ *et* $u_0 = \dfrac{1}{4}$*.*
Alors $(u_n)_n$ *est une suite récurrente de la forme* $u_{n+1} = f(u_n)$ *où* f *est la fonction racine carrée, qui est continue sur* $[0, +\infty[$ *et strictement croissante.*

Déterminons les solutions de $\sqrt{x} = x$ *sur* $\mathbb{R}_+$*. Soit* $x \geq 0$*,*

$$\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

On en déduit que la fonction racine n'admet que deux points fixes qui sont 0 *et* 1*.*

Nous avons précédemment mentionné que f *était croissante, ajouté au fait que* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$*, on en déduit que* $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ *(il y a même égalité ici). On pose donc* $I = [0, 1]$ *comme intervalle de stabilité, ce qui garantit l'existence de la suite* $(u_n)_n$ *puisque* $u_0 = \dfrac{1}{4} \in I$*.*
La suite $(u_n)_n$ *est monotone car* f *l'est, déterminons sa monotonie. On a* $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} > u_0$*. On en déduit que la suite* u_n *est croissante.*
Elle est croissante de premier terme $\dfrac{1}{4}$ *et majorée par* 1*, donc elle converge vers l'unique point fixe de* f *strictement plus grand que* 0 *qui est* 1*.*
Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$*.*



Points fixes de la fonction racine carrée

Exercice 8 — *Soit $f : x \in]0, +\infty[\mapsto 2\sqrt{x} - 1$. Soit $(u_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 4$.*

1. *Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 1$.*
3. *Étudier le sens de variation de $(u_n)_n$.*
4. *En déduire que $(u_n)_n$ converge et préciser sa limite.*

6 Continuité et fonctions à valeurs complexes

La continuité dans le cas complexe

Ici, D est une partie de $\mathbb{R}$. On regarde des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 68 (**Limite d'une fonction en un point**)
Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{C}$ en a, si $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - l| = 0$.
On le note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $f(x) \to_{x \to a} l$.

De manière analogue au cas réel, la continuité des fonctions à valeurs complexes prend la forme suivante :

Définition 69 (**Fonction continue à valeurs complexes**)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction.
*Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, on dit que **$f$ est continue en a**.*
Si f est continue en tout point de $\mathcal{D}$, on dit que f est continue sur $\mathcal{D}$.

Théorème 70 (**Continuité locale et parties réelle, imaginaire**)
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathcal{D}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *La fonction f est continue en a.*
2. *Les fonctions $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues en a.*

Démonstration —*Admis.*

Remarque 71 — *La démonstration de la proposition précédente repose sur le fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$|Re(z)| \leq |z| \quad et \quad |Im(z)| \leq |z|$$

Corollaire 72
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. On a l'équivalence entre :

1. *La fonction f est continue sur $\mathcal{D}$.*
2. *Les fonctions $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues sur $\mathcal{D}$.*

Exemple 73 — *La fonction $f : x \mapsto x^2 e^{ix}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
Démontrons-le. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$Re(f(x)) = x^2 \cos(x) \quad et \quad Im(f(x)) = x^2 \sin(x).$$

Les fonctions $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues, d'où la continuité de f.

Exercice 9 — *Montrer que la fontion $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - i}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

6.1 Opérations sur les limites

Les opérations algébriques classiques préservent la continuité.
Pour f, g deux fonctions à valeurs complexes, la composée $f \circ g$ n'est par contre en général pas définie (car g est à valeurs complexes, pas uniquement réelles). Ainsi, on ne considère pas cette opération.
La conjuguaison complexe ($z \mapsto \overline{z}$) est une opération qui est continue.

THÉORÈME 74
Soient D un ensemble et $f, g : D \to \mathbb{C}$ des fonctions ***à valeurs complexes*** *continues sur D. Alors :*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda.f$ est continue sur D.*
2. *La fonction $f + g$ est continue sur D.*
3. *La fonction $f \times g$ est continue sur D.*
4. *Si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.*

Démonstration — Il suffit d'exprimer les parties réelles et imaginaires de chacune des fonctions et utiliser la continuité des ces dernières d'après le théorème de la sous-section précédente.

EXERCICE 10 — *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$.*
Montrer que si f admet une limite en a, alors la fonction $exp \circ f$ admet elle aussi une limite en a.

PROPOSITION 75
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une application continue. Alors

$$\begin{array}{rccc} \bar{f} : & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \overline{f(x)} \end{array}$$

est une application continue.
Démonstration —*Admis.*

COROLLAIRE 76
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une application continue, alors la fonction "module de f", notée $|f|$, est continue.
Démonstration —*Admis.*

6.2 Fonctions continues et fonctions bornées

PROPOSITION 77
Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ borné, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.

- *Si f est continue en $c \in]a, b[$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(]c-\epsilon, c+\epsilon[)$ soit un ensemble borné dans $\mathbb{C}$.*
- *Si f est continue, alors $f(I)$ est un ensemble borné dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration —*Admis.*

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

- *Définition de limite d'une fonction f (limite finie, limite $+\infty$ ou $-\infty$) en un point a (ou en $+\infty$, $-\infty$, a^+, a^-).*
- *Unicité de la limite. Notation $\lim_{x\to a} f(x)$.*
- *Addition, multiplication, quotient de limites. Cas des formes indéterminées ($0.\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}, \ldots$).*
- *Limite d'une composée.*
- *Théorème de comparaison pour les limites de fonctions. Théorème des gendarmes pour les limites de fonctions. Théorème de limite monotone pour les fonctions.*
- *Croissances comparées entre $\ln(x)^a$, x^b ($b > 0$), e^x, en $+\infty$.*
  Utilisation pour des limites en 0 ou en $-\infty$.
- *Définition de fonction continue en un point a, fonction continue sur un ensemble E.*
  Savoir montrer qu'une fonction f est continue en a ou sur E via la définition.
- *Somme, produit, quotient, composée de fonctions continues.*
  Toutes les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.
- *Limite de la composéé d'une fonction continue f avec une suite $(u_n)_n$.*
- *Si f possède une limite à gauche en a et une limite à droite en a qui sont égales à $f(a)$, alors f est continue en a ($f(x) \to_{x\to a} f(a)$).*
- *Théorème des valeurs intermédiaires : pour une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.*
- *Principe de dichotomie pour chercher un élément particulier vérifiant le TVI. (cas $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(a) \geq 0$, $g(b) \leq 0$, on cherche une solution à $g(x) = 0$)*
- *Théorème des bornes atteintes : Une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes (elle possède un minorant, un majorant, un maximum, un minimum).*
  De plus, l'image d'un segment $[a, b]$ par f est un segment.
- *Pour f une fonction continue sur un intervalle I, $f(I)$ est un intervalle (pas forcément de la même forme).*
- *Pour f une fonction continue et monotone sur un intervalle I ouvert, f possède des limites aux extrémités de I (finies ou infinies). Et $f(I)$ est un intervalle ouvert, dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I.*
- *Savoir déterminer le nombre de solutions à $f(x) = y$ par une étude de fonctions, à l'aide des variations de f et du TVI.*
-
- *Théorème de la bijection : Pour $f : I \to J$ continue sur un intervalle, f est bijective ssi f est strictement monotone.*
  Si f est bijective, alors $f^{-1} : J \to I$ est continue.
- *Théorème du point fixe. $f : [a, b] \to [a, b]$ continue possède un point fixe.*
- *Suites récurrentes construites via "$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$".*
  Définition d'un ensemble F stable pour une fonction f. Si $u_0 \in F$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ existe. Si la limite l existe dans D_f, c'est un point fixe de f ($f(l) = l$). Si f est croissante sur F, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone (dépend du signe de $f(u_0) - u_0$).
- *Continuité de fonctions à valeurs complexes : $f : I \to \mathbb{C}$ est continue ssi $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues.*