Chapitre 10
Dérivation

Table des matières

1 Dérivabilité, fonction dérivée **1**
1.1 Opérations sur les dérivées 3
1.2 Dérivées des fonctions usuelles 3

2 Dérivées successives **4**

3 Théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis **6**
3.1 Extrema local, théorème de Rolle 6
3.2 Théorème des accroissements finis 7
3.3 Monotonie et dérivée, théorème de prolongement de la dérivée 8
3.4 Application à l'étude de suites récurrentes. 9

4 Dérivabilité et fonctions complexes. **10**

Vidal AGNIEL

Introduction

Après la continuité vient la dérivabilité. Ce chapitre terminera le premier semestre. Les chapitres Continuité et Déribabilité ont beaucoup de similarités dans leurs difinitions et leurs résultats. Nous retrouverons tous les théorèmes et résultats liés à la dérivation que vous connaissez, et en ajouterons quelques nouveaux.

1 Dérivabilité, fonction dérivée

Définition 1 (**Taux d'accroissement**)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
*On définit le **taux d'accroissement de f en** a comme la fonction définie sur un voisinage de 0 (sauf 0) par $\tau_a : h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.*

Remarque 2 — *Le taux d'accroissement n'est pas défini en 0. Pour $h \neq 0$, $\tau_a(h)$ représente la pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$.*

Définition 3 (**Dérivabilité**)
Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
*On dit que fonction f est **dérivable en** a si son taux d'accroissement en a admet une limite finie quand h tend vers 0.*
*Cette limite est appelée **nombre dérivé de f en** a, et se note $f'(a)$.*
On a $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarque 4 — *Le nombre dérivé de f en a, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en a.*

Remarque 5 — *Si f est dérivable en x, on a aussi : $f'(x) = \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.*
Cette limite est bien égale à la précédénte (poser $h = y - x$). Cette écriture est parfois utile.

Exemple 6 —
- *Pour $f(x) = x^2$, nous avons calculé dans le chapitre Fonctions que le taux d'accroissement de la fonction carré en a vaut $\tau_a(h) = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2 + 2ha + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$. Ainsi, f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = 2a$.*
- *Pour $g(x) = \sqrt{x}$, le taux d'accroissement de g en a vaut $\tau_a(h) = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$.*
  Si $a \neq 0$, ce taux d'accroissement a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Donc la fonction est dérivable en a.
  Mais, la fonction n'est pas dérivable en 0 car la limite du taux de variations est $+\infty$.

Définition 7 (**Dérivabilité à gauche/droite**)
Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
*On dit que la fonction f est **dérivable à gauche en** a si son taux d'accroissement en a admet une limite finie quand h tend vers 0^-.*
*Cette limite est appelée **nombre dérivé à gauche de f en** a, et se note $f'_d(a)$.*

On a $f'_d(a) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
On dit que fonction f *est* ***dérivable à droite en*** a *si son taux d'accroissement en* a *admet une limite finie quand* h *tend vers* 0^+.
Cette limite est appelée ***nombre dérivé à droite de*** f ***en*** a, *et se note* $f'_g(a)$.
On a $f'_g(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque 8 — *La fonction* f *est dérivable en* a *si et seulement si elle y est dérivable à gauche et à droite en* a, *et que* $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Définition 9
Dans le cas où $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ *(ou si une seule des deux limites existe) on dit que la courbe de* f *admet une (ou deux)* ***demi-tangente à droite ou à gauche****.*

Exemple 10 — *Prenons* $f(x) = |x|$ *et* $a = 0$. *On a donc* $\tau_0(h) = \dfrac{|h|}{h}$.
Si $h > 0$ *on a* $\tau_0(h) = \dfrac{h}{h} = 1$, *donc* $f'_d(0) = 1$. *Et si* $h < 0$ *on a* $\tau_0(h) = \dfrac{-h}{h} = -1$, *donc* $f'_g(0) = -1$.
La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0, *mais elle admet à gauche une demi-tangente d'équation* $y = -x$, *et à droite une demi-tangente d'équation* $y = x$.

Remarque 11 — *En Physique on croise parfois la notation* $\frac{df}{dx}$. *En général,* $\frac{df}{dx}$ *représente la dérivée de* f, *c'est-à-dire* f', *et la variable* x *est muette. Si l'on veut la dérivée de* f *au point* a, *ce sera le nombre* $f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$.
Il y a parfois un abus de notation en utilisant à la fois la lettre x *comme variable muette de dérivation et comme valeur d'évaluation, et en écrivant* $\frac{df}{dx}$ *comme une abréviation de* $\frac{df}{dx}(x)$ *(la dérivée de* f *en* x*), ce qui peut mener à des contresens.*

Définition 12 (**Dérivabilité sur un ensemble**)
Soient I *un intervalle et* $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f *est* ***dérivable sur*** I *si elle est dérivable en tout point de* I.
On appelle ***dérivée*** *de* f, *notée* f', *la fonction* $f' : x \mapsto f'(x)$.

Proposition 13 (**Dérivée et tangente à la courbe**)
Soient I *un intervalle,* $a \in I$, *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *dérivable en* a.
Alors l'équation de la tangente à la courbe de f *en* a *est :* $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. *(droite qui passe par* $f(a)$ *en* $x = a$ *et de pente* $f'(a)$*)*

Proposition 14 (**Dérivabilité et continuité**)
Soient I *un intervalle,* $a \in I$, *et* $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f *est dérivable en* a, *alors* f *est continue en* a.
Si f *est dérivable sur* I, *alors* f *est continue sur* I.

Remarque 15 — *La réciproque est fausse ! Par exemple la fonction valeur absolue est continue sur* $\mathbb{R}$, *mais n'est pas dérivable en* 0.

Démonstration — Supposons f dérivable en a. On a alors $f(a+h) - f(a) = h\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Quand $h \to 0$, on a $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a)$. Ainsi, $f(a+h) - f(a) \to_{h\to 0} 0.f'(a) = 0$.
Autrement dit, on a $f(a+h) \to_{h\to 0} f(a)$, ce qui prouve que f est continue en a. □

1.1 Opérations sur les dérivées

Proposition 16 (**Dérivabilité et opérations**)
Soient I un intervalle, $a \in I$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en a.

1. *Alors $f+g$ est dérivable en a, et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
2. *Alors $f.g$ est dérivable en a et $(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
3. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $(\frac{1}{g})'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$.*
4. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.*
5. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f$ est dérivable en a et $(\lambda.f)'(a) = \lambda.f'(a)$.*

Démonstration — Dans chaque cas, on écrit le taux d'accroissement de la nouvelle fonction (somme, produit, quotient, multiple par un réel) en fonction du taux d'accroissement de f et de g.
De plus, comme f, g sont dérivables en a, elles sont continues en a, donc $f(a+h), g(a+h)$ tendent vers $f(a), g(a)$.

1. $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + \dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$.
2. $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = \dfrac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = g(a+h)\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + f(a)\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$
3. $\tau_a(h) = \dfrac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \dfrac{1}{g(a+h)g(a)}\dfrac{g(a)-g(a+h)}{h}$
4. On a $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$. On utilise ainsi les deux résultats précédents pour calculer la dérivée de $\frac{f}{g}$.

□

Proposition 17 (**Dérivabilité et composée**)
Soient I, J deux intervalles, $a \in I$, $f : I \to J$ dérivable en a, et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$.
Alors, la composée $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a).(g'(f(a))$.

Démonstration —Admis. (On verra une preuve plus simple avec les développements limités.)

Proposition 18 (**Dérivée et bijection réciproque**)
Soient I, J des intervalles, et $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable sur I.
Alors, $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en tout point $y \in J$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, avec :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration — Dérivabilité admise. Pour la dérivée, on a $f \circ f^{-1} = x \mapsto x$ donc $(f^{-1})'.(f' \circ f^{-1}) = 1$, d'où $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. □

Remarque 19 — *Pour tout x tel que $f'(x) = 0$, la courbe de f admet une tangente horizontale en $(x, f(x))$.*
Or, la courbe de f^{-1} est symétrique à celle de f par rapport à la droite $y = x$.
Ainsi, au point $(f(x), f^{-1}(f(x))) = (f(x), x)$, la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale (une pente de $+\infty$), donc elle n'est pas dérivable en $f(x)$.

1.2 Dérivées des fonctions usuelles

Le calcul d'une dérivée nécessite de connaître toutes les propriétés précédentes ainsi que les dérivées des fonctions usuelles. Ces résultats peuvent être utilisés sans justification dans les exercices.

Proposition 20 (**Fonctions usuelles et dérivées**)

1. *Pour* $n \geqslant 0$*, la fonction* $x \mapsto x^n$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* $x \mapsto nx^{n-1}$.
2. *Pour* $n \geqslant 1$*, la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$*, de dérivée* $x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$.
3. *Pour* $a \in]0,1[$*, la fonction* $x \mapsto x^a$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$*, de dérivée* $x \mapsto ax^{a-1}$.
4. *Pour* $a \in [1,+\infty[\backslash\mathbb{N}$*, la fonction* $x \mapsto x^a$ *est dérivable sur* $[0,+\infty[$*, de dérivée* $x \mapsto ax^{a-1}$.
5. *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$*, de dérivée* $x \mapsto \frac{1}{x}$.
6. *La fonction* $\exp$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* $\exp$.
7. *La fonction* $\cos$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* $-\sin$.
8. *La fonction* $\sin$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* $\cos$.
9. *La fonction* $\tan$ *est dérivable sur* $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$*, de dérivée* $1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.
10. *La fonction* $ch : x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* sh.
11. *La fonction* $sh : x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* ch.
12. *La fonction* $\arccos$ *est dérivable sur* $]-1,1[$*, de dérivée* $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. *La fonction* $\arcsin$ *est dérivable sur* $]-1,1[$*, de dérivée* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. *La fonction* $\arctan$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Remarque 21 — ***Attention !*** *La plupart des fonction usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf :*
- *La fonction valeur absolue* $x \mapsto |x|$ *en* 0.
- *La fonction* $x \mapsto x^a$ *en* 0*, pour* $a \in]0,1[$. *(ex : racine carrée, racine cubique)*
- *Les fonctions* $\arccos$ *et* $\arcsin$ *en* -1 *et en* 1.

2 Dérivées successives

Définition 22 (**Dérivées successives**)
Soient I *un intervalle et* $f : I \to \mathbb{R}$ *dérivable sur* I.
Si f' *est dérivable sur* I*, on appelle* ***dérivée seconde****, notée* f'' *ou* $f^{(2)}$*, la dérivée de* f'.
Si f'' *est dérivable sur* I*, on appelle* ***dérivée troisième****, notée* f''' *ou* $f^{(3)}$*, la dérivée de* f''.
Soit $n \geqslant 1$. *Si* f *est* n *fois dérivable, on appelle* ***dérivée*** n***-ième*** *de* f*, notée* $f^{(n)}$*, la fonction obtenue en dérivant* n *fois la fonction* f.
Par convention, on note $f^{(0)} = f$. *La dérivée* 0*-ième de* f *est* f *(on a dérivé* 0 *fois).*

Définition 23 (**Fonctions de classes** D^k**,**C^k)
Soient I *un intervalle,* $k \geqslant 0$*, et* $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f *est* ***de classe*** $\mathcal{D}^k$ *sur* I *si elle est* k *fois dérivable sur* I.
On note $D^k(I)$ *l'ensemble des fonctions* k *fois dérivables sur* I.
On dit que f *est* ***de classe*** $\mathcal{C}^k$ *sur* I *si elle est* k *fois dérivable sur* I *et si sa dérivée* k*-ème* $f^{(k)}$ *est continue sur* I.
On note $C^k(I)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^k *sur* I.

Remarque 24 —
1. *L'ensemble* $C^0(I)$ *est l'ensemble des fonctions continues sur* I.
2. *L'ensemble* $D^1(I)$ *est l'ensemble des fonctions dérivables sur* I.
3. *L'ensemble* $C^1(I)$ *est l'ensemble des fonctions dérivables sur* I *dont la dérivée est continue.*

4. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $C^k(I) \subset D^k(I)$.*
5. *Comme une fonction dérivable est continue, pour tout $k \geqslant 1$ on a alors $D^k(I) \subset C^{k-1}(I)$ ($f^{(1)}, \dots, f^{(k-1)}$ sont continues car dérivables).*
   On obtient les inlusions suivantes : $\mathcal{C}^k(I) \subset \mathcal{D}^k(I) \subset \mathcal{C}^{k-1}(I) \subset \mathcal{D}^{k-1}(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)$.

Définition 25 (**Fonctions de classe C^∞**)
Soient I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$.
*On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur I si elle est k fois dérivable sur I pour tout entier $k \geqslant 1$.*
On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.
Autrement dit, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est une fonction que l'on peut dériver autant de fois que l'on veut sur I.

Remarque 26 — *Si f est de classe C^∞, alors toutes ses dérivées $f^{(n)}$ sont continues (car on peut encore les dériver).*

Théorème 27 (**Fonctions usuelles et C^∞**)
Toutes les fonctions usuelles (mentionnées plus haut) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles où elles sont dérivables.

Théorème 28 (**Classe C^k et opérations**)
Soient I un intervalle, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k sur I. On a :

1. *$f + g$ et $f.g$ sont de classe C^k sur I.*
2. *Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe C^k sur I.*
3. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda.f$ est de classe C^k sur I.*
4. *Pour $f : I \to J$, et $h : J \to \mathbb{R}$ de classe C^k sur J, alors $h \circ f$ est de classe C^k sur I.*

Démonstration — *Cela découle des propriétés sur la somme,produit,inverse,quotient,multiple,composée de fonctions dérivables, ainsi que sur ces mêmes propriétés pour les fonctions continues.* □

Remarque 29 — *Une fonction f qui s'exprime comme somme/produit/quotient/composée de fonctions usuelles est continue sur son domaine de définition D_f (cf. Ch 8).*
Elle est aussi de classe C^∞ sur D_f, à l'exception de certains points :

- *Un terme de la forme g^a, $a \in]0, 1[$, ou $|g|$ n'est (à priori) pas dérivable en tout x tel que $g(x) = 0$.*
- *Un terme de la forme $\arcsin(g)$ ou $\arccos(g)$ n'est (à priori) pas dérivable en tout x tel que $g(x) = 1$ ou $g(x) = -1$.*

Exemple 30 — *Posons $f : x \mapsto \frac{e^x \sqrt{x^2-2x+1} \ln(x+5)}{x^5}$. f est définie sur $D_f =]-5, 0[\cup]0, +\infty[$. f est un produit de composées de fonctions usuelles, donc f est continue sur D_f. On a $x^2 - 2x + 1 = 0$ ssi $x = 1$, donc d'après le théorème précédent f est de classe C^∞ sur $]-5, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Pour aller plus loin, il faut regarder si f se prolonge par continuité en -5 et en 0, et si f est dérivable en 1. Pour $\tau : h \mapsto \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ on vérifie que $\tau(h) \to_{h\to 0^+} e\ln(6)$ et $\tau(h) \to_{h\to 0^-} -e\ln(6)$, donc f n'est pas dérivable en 1. On montre que $f(x) \to_{x\to 0^+} +\infty$ et $f(x) \to_{x\to -5^+} +\infty$, donc f ne se prolonge ni en 0 ni en -5.*

Exemple 31 — *Posons $g : x \mapsto \arcsin(x^2+x-1)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x)$ existe ssi $x^2+x-1 \in [-1, 1]$. On obtient que $D_g = [-1, 1]$. g est une composée de fonctions usuelles, donc g est continue sur D_g. On a $x^2 + x - 1 = 1$ ssi $x = \pm 1$ et $x^2 + x - 1 = -1$ ssi $x = 0$, donc d'après le théorème précédent g est de classe C^∞ sur $]-1, 0[\cup]0, 1[$. Pour $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ on a $g'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{1-(x^2+x-1)^2}}$.*

On vérifie que $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to -1} g(x) = +\infty$. *D'après le théorème 44, cela implique que* g *n'est pas dérivable en* $0, 1, -1$.

Dériver n fois une somme n'est pas très difficile. On a $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.
Pour un produit, ce n'est à priori pas si simple : chaque dérivée fait apparaître de nouveaux termes. Il existe cependant une formule qui permet d'écrire la dérivée n-ième de fg.

Proposition 32 (**Formule de Leibniz**)
Soient I *un intervalle,* $n \geqslant 1$, *et* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *qui sont* n *fois dérivables sur* I.
Alors, on a $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Démonstration — Ce résultat est la formule du binôme pour la dérivation (au lieu de regarder $(a+b)^n$ on regarde $(f.g)^{(n)}$. La preuve suit la même idée, c'est-à-dire par récurrence sur n, en utilisant la relation de récurrence $(f.g)^{(n+1)} = ((f.g)^{(n)})'$ et les propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$. □

Exemple 33 — *Appliquée pour* $n = 4$, *la formule de Leibniz donne* $(fg)^{(4)} = f^{(4)} + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + g^{(4)}$.

Remarque 34 — *Tous les ensembles de la forme* $D^k(I), C^k(I), D^{k+1}(I)$ *sont différents les uns des autres.*

1. $x \mapsto |x|$ *est dans* $C^0(\mathbb{R})$ *mais pas dans* $D^1(\mathbb{R})$ *(pas dérivable en* 0*).*
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(0) = 0$ *et* $g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ *si* $x \neq 0$ *est dans* $C^0(\mathbb{R})$, *dans* $D^1(\mathbb{R})$, *mais pas dans* $C^1(\mathbb{R})$ *(sa dérivée* g' *n'est pas continue en* 0*).*
3. *Pour* F *une primitive de* $x \mapsto |x|$ *(la fonction* $x \mapsto \frac{1}{2}x|x|$ *convient), alors* F *est dans* $C^1(\mathbb{R})$ *mais pas dans* $D^2(\mathbb{R})$. *(pas deux fois dérivable en* 0*)*

3 Théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis

Pour une fonction f qui est continue sur un intervalle $I = [a, b]$, nous avons le théorème des valeurs intermédiaires ainsi que le théorème des bornes. Ce sont des théorèmes d'existence (garantissent l'existence d'un élément avec certaines propriétés).
Pour une fonction f dérivable, nous avons des théorèmes d'existence supplémentaires : le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis (T.A.F.).
Rappel : Pour $f : I \to \mathbb{R}$ et $x \in I$, on dit que f atteint un maximum local (ou minimum local) en x s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(x) = \max_{]x-\epsilon, x+\epsilon[}(f)$ (ou $f(x) = \min_{]x-\epsilon, x+\epsilon[}(f)$).

3.1 Extrema local, théorème de Rolle

Proposition 35 (**Extrema local et dérivée nulle**)
Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* $]a, b[$.
Si f *a un maximum/minimum local en un nombre* $x \in]a, b[$, *alors on a* $f'(x) = 0$.

Démonstration — Supposons que f a un maximul local en x (l'autre cas est similaire).
On a $\epsilon > 0$ tel que $f(x) = \max_{y \in]x-\epsilon, x+\epsilon[}(f(y))$.Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $(x+h)$ existe. Pour $h \in]-\epsilon, \epsilon[$ on a alors $f(x+h) \leqslant f(x)$. Ainsi, pour $-\epsilon < h < 0$ on a $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$, donc par théorème de comparaison on a $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} \tau_x(h) \geqslant 0$.
De même, pour $0 < h < \epsilon$ on a on a $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0$. Donc $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} \tau_x(h) \leqslant 0$. Ainsi, on a obtient $f'(x) = 0$. □

Remarque 36 — *Pour trouver tous les maximum/minimum locaux (ou globaux) d'une fonction* f *dérivable sur* I, *il suffit de chercher parmi les nombres* $x \in I$ *tels que* $f'(x) = 0$.
Cela aide beaucoup à les trouver, même s'il faut ensuite vérifier si chaque point est un maximum/minimum ou non.

Cette proposition n'est vraie que pour un maximum/minimum local à l'intérieur de l'intervalle I (ex : dans $]a,b[$). Elle est fausse pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui a un max/min local en a ou en b. Contre-exemple : $f : x \mapsto x$, sur $[0,1]$, a un minimum en 0 mais $f'(0) = 1$.

THÉORÈME 37 (**Théorème de Rolle**)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration — Si f est constante, alors sa dérivée est la fonction nulle. Dans ce cas on obtient bien le résultat.
Supposons f non constante. f est continue sur $[a,b]$ donc d'après le théorème des bornes, elle possède un maximum M et un minimum m, qui sont atteints (en des certains c_1, c_2).
Comme f n'est pas constante, on a alors soit $M \neq f(a)$, soit $m \neq f(a)$.
Supposons que $M \neq f(a)$. Alors il existe $c_1 \in]a,b[$ tel que $f(c_1) = M$. Et, la proposition précédente nous dit que $f'(c_1) = 0$. □

Un point important du théorème de Rolle est que le nombre c est strictement compris entre a et b. Il n'y a de même pas besoin que f soit dérivable en a et en b, ce qui est utile dans les exercices (condition plus facile à vérifier que f dérivable sur $[a,b]$).

3.2 Théorème des accroissements finis

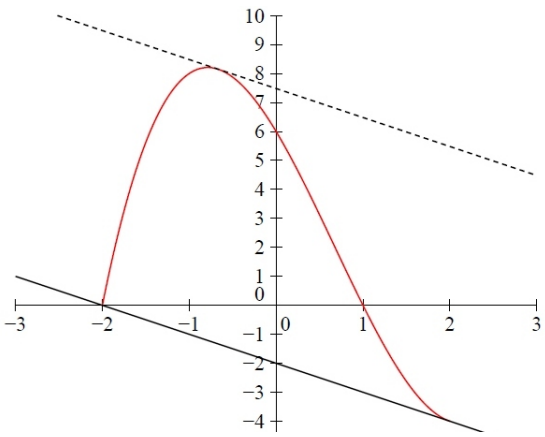
THÉORÈME 38 (**Théorème des accroissements finis**)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$.
Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

REMARQUE 39 — *Autrement dit, il existe un point où la tangente à la courbe de f est parallèle à la droite passant par les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.*

Démonstration — On pose $gx \in [a,b] \mapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x - f(x)$.
Alors g est dérivable sur $]a,b[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]a,b[$, et on a :

$$g(b) - g(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}b - f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a + f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(b) + f(a) = 0.$$

Vu que $g(b) = g(a)$, on peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g : $\exists c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.
On a $0 = g'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c)$, donc on obtient $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qu'on cherchait à prouver. □



Une tangente à la courbe de f est de pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

REMARQUE 40 — *C'est le théorème des accroissements finis qui permet de démontrer le lien entre signe de la dérivée et croissance/décroissance d'une fonction.*
Ce théorème est une conséquence du théorème de Rolle. Ses hypothèses sont ainsi identiques.

3.3 Monotonie et dérivée, théorème de prolongement de la dérivée

THÉORÈME 41
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Alors, f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.

Démonstration — Supposons f croissante sur I. Soit $a \in I$.
Le taux d'accroissement de f en a vaut $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
Comme f est croissante, si $h > 0$ le numérateur est positif ($f(a+h) \geqslant f(a)$) et le dénominateur aussi. Si $h < 0$ le numérateur est négatif ($f(a+h) \leqslant f(a)$) et le dénominateur aussi. Donc $\tau_a(h) \geqslant 0$ dans tous les cas. En passant à la limite, on obtient $f'(a) \geqslant 0$.
Réciproquement, supposons que $f' \geqslant 0$ sur I. Soient $x < y \in I$.
D'après le théorème des accroissements finis (TAF), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Vu que $f'(c) \geqslant 0$, on en déduit que $f(y) - f(x) \geqslant 0$, et donc que f est croissante sur I.
La preuve dans le cas de la décroissance est similaire. (elle utilise les mêmes idées) □

THÉORÈME 42 (**Stricte croissance/décroissance et dérivée**)
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Si f' est strictement positive sur I, sauf en un nombre fini de points (où elle s'annule), alors f est strictement croissante.
Si f' est strictement négative sur I, sauf en un nombre fini de points (où elle s'annule), alors f est strictement décroissante.

Démonstration —On suppose que $f' \geqslant 0$. Soient $c_1, \ldots, c_n$ les points où f' s'annule. Pour $a, b \in I$ avec $a < b$, on a $b' \in]a, b[$ tel que f' ne s'annule pas sur $]a, b'[$. On utilise le TAF à f sur $[a, b']$ et $[b', b]$, pour montrer que $f(a) - f(b') > 0$ et que $f(b) - f(b') \geqslant 0$, donc que $f(a) < f(b') \leqslant f(b)$. □

REMARQUE 43 — *Ces théorèmes sont utilisés sans être cités lors de l'étude des variations de fonctions, comme vous en avez déjà l'habitude. Vous en avez désormais une preuve propre. Une deuxième preuve sera faite avec le théorème de Newton-Leibniz.*
Les implications dans le second théorème ne sont pas des équivalences. Il existe des fonctions strictement croissantes dont la dérivée s'annule une infinité de fois. (ex : $g : x \mapsto x|\sin(\frac{1}{x})|$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$. Pour $f : x \mapsto \int_0^x g(t)dt$ on a $f' = g$, et $g(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = \frac{1}{k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.)

THÉORÈME 44 (**Théorème du prolongement de la dérivée**)
Soient I un intervalle et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si f' possède une limite l, quand $x \to a$, alors $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$.
Ainsi, f est dérivable en a, avec $f'(a) = l$.

Démonstration —Pour $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(a+h)$ existe, on peut appliquer le TAF à f sur $[a, a+h]$: il existe $c_h \in]a, a+h[$ tel que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(c_h)$. Comme c_h est compris entre a et $a+h$, on a $c_h \to_{h \to 0} a$, donc $f'(c_h) \to_{h \to 0} l$, donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to_{h \to 0} l$. □

EXEMPLE 45 — *Ce théorème permet de montrer qu'une fonction f continue sur $[a, b]$ est de classe C^1 en a (dérivable en a + f' continue en a) grâce à un seul calcul de limite. Il évite de revenir au calcul du taux d'accroissement (qui est rarement plus complexe).*
Posons $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'après les croissances comparées, on a $x^2 \ln(x) \to_{x \to 0^+} 0$, donc f se prolonge continûment par 0 en 0.
De plus on a $f'(x) = 2x \ln(x) + x$. On trouve ainsi que $f'(x) \to_{x \to 0^+} 0$.
Le théorème de prolongement de la dérivée nous dit alors que le prolongement de f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. Et donc, f' est continue en 0, donc le prolongement de f est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Proposition 46 (**Inégalité des accroissements finis (IAF)**)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]a,b[$ on ait $|f'(x)| \leqslant M$.
Alors, $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, on a $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$.

Démonstration — Si $x \neq y$, d'après le théorème des accroissements finis on a c entre x et y tel que $\left|\dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}\right| = |f'(c)|$. Vu que $|f'(c)| \leqslant M$, on obtient l'inégalité. □

Remarque 47 — *Ces inégalités ont une interprétation physique assez claire : Si on court 2 heures avec une vitesse de pointe de 12 kilomètres par heure, on n'aura pas parcouru plus de $2.12 = 24$ kilomètres.*
L'ensemble des fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui vérifient, $\forall x,y \in [a,b]$, $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$ sont appelées les fonctions M-Lipschitziennes (en hommage au mathématicien Lipschitz).
Ces fonctions sont toutes continues (pas forcément dérivables), et peuvent facilement apparaître dans un problème de concours, en analyse.

3.4 Application à l'étude de suites récurrentes.

Théorème 48 (**Théorème du point fixe de Picard (HP)**)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I fermé ($[a;b]$, $[a,+\infty[$, ou $]-\infty,b]$) et telle que :

1. *$f(I) \subset I$;*
2. *Il existe $K < 1$ tel que, $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant K < 1$.*

Alors :

1. *La fonction f possède un point fixe l dans I.*
2. *Le point fixe l est unique.*
3. *Pour tout $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.*
   On a, $\forall n \geqslant 0$, $|u_n - l| \leqslant K^n |u_0 - l|$.

Démonstration —Sur feuille.

Ce théorème permet d'établir la convergence de certaines suites récurrentes grâce à une étude de fonction.
Dans le chapitre 8, il fallait que la fonction f soit croissante sur I pour établir la convergence/divergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Ici, c'est une condition de majoration de la dérivée que l'on utilise.

Par exemple, la fonction cos est dérivable sur $I = [0, \pi/4]$, sa dérivée $-\sin$ vérifie $|-\sin(x)| \leqslant \sin(\pi/4) < 1$ sur I, et I est un intervalle stable pour cos. Donc cette fonction possède un unique point fixe l dans I, et pour tout $u_0 \in [0, \pi/4]$ la suite définie par $u_{n+1} = \cos(u_n)$ converge vers l. On a de plus que $|u_n - l| \leqslant \sin(1)^n.l$.

L'énoncé de ce théorème de point fixe est hors programme, mais sa preuve est une application classique des résultats au programme.
Faisons un bilan plus général sur les suites récurrentes. Soient $I = [a,b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in I$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :

- Si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge, sa limite l est un point fixe de f ($f(l) = l$).
- Pour majorer ou minorer $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on cherche un intervalle J tel que $f(J) \subset J$ (intervalle **stable** par f).
  Si un terme u_{n_0} appartient à cet intervalle stable J, alors pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ on aura $u_n \in J$.
- Pour étudier la croissance/décroissance de la suite, on étudie le signe de $x \mapsto f(x) - x$, en espérant qu'il soit constant sur J.
  Quand la fonction f est croissante, la suite sera toujours monotone (mais pas nécessairement croissante !).
  Quand f est décroissante, cela se passe moins bien. Les sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ seront alors monotones.

— Si la suite $(u_n)_n$ n'est pas monotone, mais qu'elle est dans un intervalle stable J et que $|f'| \leqslant K < 1$, on peut alors montrer que $(u_n)_n$ est convergente en appliquant l'inégalité des accroissements finis. (Cela donne le théorème du point fixe de Picard)
— L'étude de $(u_n)_n$ passe par l'étude des variations de la fonction f et du signe de $x \mapsto f(x) - x$ (donne auss les points fixes).

Exemple 49 — *Considérons la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. On pose $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$. f est donc décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus, si $x > 0$ on a $f(x) > 0$, donc $]0, +\infty[$ est stable par f. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc bien définie et à valeurs dans $]0, +\infty[$.*
Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on a $f(x) - x = 1 + \dfrac{1}{x} - x = \dfrac{x + 1 - x^2}{x}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 5$, et s'annule en $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, et en $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
En représentant les premiers termes de la suite, on constate que la suite semble converger vers x_1. Il faut donc le prouver. Cherchons un seconde intervalle stable plus petit. L'intervalle $[1, 2]$ (car $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$) conviendrait, mais l'intervalle $I = \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ est plus intéressant. On a $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{3} < 2$; $f(2) = \dfrac{3}{2}$ et f est décroissante sur I, donc $f\left(\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]\right) = \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}\right]$.
Comme $u_1 \in I$, on sait alors que pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \in I$.
De plus, pour $x \in I$, on a $|f'(x)| = \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{4}{9}$.
On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis (IAF) à $x = u_n$ et $y = x_1$ (entre le terme général de la suite et le point fixe contenu dans I).
On obtient, ainsi : $|f(u_n) - f(x_1)| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - x_1|$, soit $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - x_1|$.
On prouve alors par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - x_1| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1} |u_1 - x_1| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}.1$.
Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{9}\right)^n = 0$, et comme $|u_n - x_1| \leqslant 2 - \frac{3}{2}$, on obtient avec le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - x_1| = 0$. C'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4 Dérivabilité et fonctions complexes.

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Pour $a \in I$ et $l \in \mathbb{C}$, on rappelle que $f(x) \to_{x\to a} l$ si $|f(x) - l| \to_{x\to a} 0$.
C'est-à-dire si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que pour tout x avec $|x - a| < \eta$, on a $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Proposition 50
La fonction f admet une limite l en a si et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ *et* $\mathrm{Im}\,(f)$ *admettent des limites respectives l_1 et l_2 quand x tend vers a. On a alors $l = l_1 + il_2$.*

Définition 51
La fonction f est ***continue*** *en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Il n'existe pas d'équivalent chez les complexes au théorème des valeurs intermédiaires, la notion de valeur située entre $f(a)$ et $f(b)$ ne pouvant pas être adaptée.

Définition 52 (**Dérivabilité**)
Soient I un intervalle, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

On dit que f est ***dérivable en*** *a si son* ***taux d'accroissement*** $\tau_a(f) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *admet une limite finie l lorsque x tend vers a.*
On définit le nombre dérivé de f en a, qui vaut $f'(a) = l$.
On dit que f est ***dérivable sur*** *I si f est dérivable en tout point de I.*

Proposition 53
La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}\ (f)$ *et* $\mathrm{Im}\ (f)$ *sont dérivables en a.*
On a alors $f'(a) = \mathrm{Re}\ (f)'(a) + i\mathrm{Im}\ (f)'(a)$.

Exemple 54 — *Pour $f(t) = e^{it}$ (fonction définie sur $\mathbb{R}$), on a $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$.*
En dérivant séparément les parties réelle et imaginaire on obtient : $f'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) = e^{i(t+\frac{\pi}{2})} = ie^{it}$.
On remarque que la dérivée de cette exponentielle complexe se calcule comme celle des exponentielles réelles.

Tout le formulaire de calcul de dérivées (y compris la formule de Leibniz) reste valable pour des fonctions complexes. Il est moins utile que pour les fonctions réelles car il existe beaucoup moins de fonction usuelles sur $\mathbb{C}$ (en PTSI).
Plus rien d'intéressant en PTSI pour le cas à valeurs complexes : pas d'IAF, ni même de théorème des accroissements finis. Le théorème de Rolle n'est également pas vérifié par les fonctions complexes. Pour $f(t) = e^{it}$, alors $f'(t) = ie^{it}$ ne s'annule jamais, bien que $f(0) = f(2\pi) = 1$.

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

- Taux de variation d'une fonction f en un point a. Fonction f dérivable en un point a, sur un ensemble E. Fonction dérivée f'. Ensemble $D^1(I)$ de fonctions dérivables. Ensemble $C^1(I)$ de fonctions dérivables, de dérivée continue. Dérivée n-ème d'une fonction. Ensembles $D^k(I)$,$C^k(I)$,$C^\infty(I)$.
  Dérivées des fonctions usuelles ($x \mapsto x^n, x \mapsto x^a, \exp, \ln, \cos, \sin, \tan, \arccos, \arcsin, \arctan, ch, sh$).
- Dérivabilité d'une somme, produit, quotient, composée, bijection réciproque de fonctions dérivables. Valeur de la dérivée.
  Dérivée de composées particulières ($\exp(u), \ln(|u|), u^a$).
- Savoir montrer qu'une fonction f est dérivable (par la définition, ou par les opérations sur les fonctions usuelles), et savoir calculer sa dérivée f'.
- Formule de Leibniz pour la dérivée $(f.g)^{(n)}$.
- Maximum/minimum local d'une fonction sur un intervalle ouvert : Pour x un maximum/minimum local de f, on a $f'(x) = 0$.
- Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis (TAF). (pour f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$)
- Inégalité des accroissements finis (IAF).
  Utiliser l'IAF pour encadrer $|f(x) - f(y)|$, entre autres pour l'étude de suites récurrentes.
- Lien entre signe de f' et variations de la fonction f, sur un intervalle.
  Caractérisation des fonctions dérivables strictement croissantes/décroissantes.
  Utiliser la dérivée f' pour étudier la fonction f (tableau de signes et tableau de variations).
- Etude de $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ et de sa dérivée f' pour $x \to a$ afin de montrer que f se prolonge de façon continue/dérivable. Théorème de prolongement de la dérivée.
- Généralisation de la dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes $f : I \to \mathbb{C}$. Exemple de $t \mapsto e^{it}$.