Chapitre 10
Dérivation

Table des matières

Vidal AGNIEL

Introduction

Après le chapitre sur la continuité, continuons en analyse avec la dérivabilité. Ce chapitre terminera le premier semestre. Les chapitres Continuité et Déribabilité ont beaucoup de similarités dans les difinitions et les résultats. Nous retrouverons tous les théorèmes et résultats liés à la dérivation que vous connaissez, et en ajouterons quelques nouveaux.

1 Dérivabilité, fonction dérivée

Définition 1 (**Taux d'accroissement**)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
*On définit le **taux d'accroissement de f en** a comme la fonction définie sur un voisinage de 0 (sauf 0) par $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.*

Remarque 2 — *Le taux d'accroissement n'est pas défini en 0. Pour $h \neq 0$, $\tau_a(h)$ représente la pente de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$.*

Définition 3 (**Dérivabilité**)
Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
*On dit que fonction f est **dérivable en** a si son taux d'accroissement en a admet une limite finie quand h tend vers 0.*
*Cette limite est appelée **nombre dérivé de f en** a, et se note $f'(a)$.*
On a $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarque 4 — *Le nombre dérivé de f en a, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en a.*

Remarque 5 — *Si f est dérivable en x, on a aussi : $f'(x) = \lim\limits_{y\to x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.*
Cette limite est bien égale à la précédénte (poser $h = y - x$). Cette écriture est parfois utile.

Exemple 6 —

— *Pour $f(x) = x^2$, nous avons calculé dans le chapitre Fonctions que le taux d'accroissement de la fonction carré en a vaut $\tau_a(h) = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ha+h^2-1}{h} = 2a + h$. Ainsi, f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = 2a$.*

— *Pour $g(x) = \sqrt{x}$, le taux d'accroissement de g en a vaut $\tau_a(h) = \dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \dfrac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \dfrac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.*
Si $a \neq 0$, ce taux d'accroissement a pour limite $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Donc la fonction est dérivable en a.
Par contre, la fonction n'est pas dérivable en 0, car la limite du taux de variations est $+\infty$.

Définition 7 (**Dérivabilité à gauche/droite**)
Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
*On dit que fonction f est **dérivable à gauche en** a si son taux d'accroissement en a admet une limite finie quand h tend vers 0^-.*
*Cette limite est appelée **nombre dérivé à gauche de f en** a, et se note $f'_d(a)$.*

On a $f'_d(a) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
On dit que fonction f est ***dérivable à droite en*** *a si son taux d'accroissement en a admet une limite finie quand h tend vers 0^+.*
Cette limite est appelée ***nombre dérivé à droite de f en*** *a, et se note $f'_g(a)$.*
On a $f'_g(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque 8 — *La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle y est dérivable à gauche et à droite en a, et que $f'_d(a) = f'_g(a)$.*

Définition 9
Dans le cas où $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ (ou si une seule des deux limites existe) on dit que la courbe de f admet une (ou deux) ***demi-tangente à droite ou à gauche****.*

Exemple 10 — *Prenons $f(x) = |x|$ et $a = 0$. On a donc $\tau_0(h) = \dfrac{|h|}{h}$.*
Si $h > 0$ on a $\tau_0(h) = \dfrac{h}{h} = 1$, donc $f'd(0) = 1$. Et si $h < 0$ on a $\tau_0(h) = \dfrac{-h}{h} = -1$, donc $f'g(h) = -1$.
La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0, mais elle admet à gauche une demi-tangente d'équation $y = -x$, et à droite une demi-tangente d'équation $y = x$.

Définition 11 (**Dérivabilité sur un ensemble**)
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est ***dérivable sur*** *I si elle est dérivable en tout point de I.*
On appelle ***dérivée*** *de f, notée f', la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.*

Proposition 12 (**Dérivée et tangente à la courbe**)
Soient I un intervalle, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a.
Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. (droite qui passe par $f(a)$ en $x = a$ et de pente $f'(a)$)

Proposition 13 (**Dérivabilité et continuité**)
Soient I un intervalle, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Remarque 14 — *La réciproque est fausse ! Par exemple la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas dérivable en 0.*

Démonstration — Supposons f dérivable en a. On a alors $f(a+h) - f(a) = h\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Quand $h \to 0$, on a $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a)$. Ainsi, $f(a+h) - f(a) \to_{h \to 0} 0.f'(a) = 0$.
Autrement dit, on a $f(a+h) \to_{h \to 0} f(a)$, ce qui prouve que f est continue en a. □

1.1 Opérations sur les dérivées

Proposition 15 (**Dérivabilité et opérations**)
Soient I un intervalle, $a \in I$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en a.

1. *Alors $f + g$ est dérivable en a, et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
2. *Alors $f.g$ est dérivable en a et $(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
3. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $(\frac{1}{g})'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$.*

4. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.*
5. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f$ est dérivable en a et $(\lambda.f)'(a) = \lambda.f'(a)$.*

Démonstration — Dans chaque cas, on écrit le taux d'accroissement de la nouvelle fonction (somme, produit, quotient, multiple par un réel) en fonction du taux d'accroissement de f et de g.
De plus, comme f, g sont dérivables en a, elles sont continues en a, donc $f(a+h), g(a+h)$ tendent vers $f(a), g(a)$.

1. $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + \dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$.
2. $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = \dfrac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = g(a+h)\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} + f(a)\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$
3. $\tau_a(h) = \dfrac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \dfrac{1}{g(a+h)g(a)}\dfrac{g(a)-g(a+h)}{h}$
4. On a $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$. On utilise ainsi les deua résultats précédents pour calculer la dérivée de $\frac{f}{g}$.

$\square$

Proposition 16 (**Dérivabilité et composée**)
Soient I, J deux intervalles, $a \in I$, $f : I \to J$ dérivable en a, et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$.
Alors, la composée $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a).(g'(f(a))$.

Démonstration —Admis. (On verra une preuve plus simple avec les développements limités.)

Proposition 17 (**Dérivée et bijection réciproque**)
Soient I, J des intervalles, et $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable sur I.
Alors, $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en tout point $y \in J$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, avec :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration —Admis.

Remarque 18 — *Pour tout x tel que $f'(x) = 0$, la courbe de f admet une tangente horizontale en $(x, f(x))$.*
Or, la courbe de f^{-1} est symétrique à celle de f par rapport à la droite $y = x$.
Ainsi, au point $(f(x), f^{-1}(f(x))) = (f(x), x)$, la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale (une pente de $+\infty$), donc elle n'est pas dérivable en $f(x)$.

1.2 Dérivées des fonctions usuelles

Il faut maîtriser toutes les propriétés de la dérivée que nous avons vues, et connaître par coeur les dérivées des fonctions usuelles, afin de pouvoir calculer proprement une dérivée de fonction.
Ces peuvent être invoquées sans justification dans les exercices.

PROPOSITION 19 (**Fonctions usuelles et dérivées**)

1. *Pour $n \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.*
2. *Pour $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$.*
3. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ qui n'est pas entier, la fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$.*
4. *La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.*
5. *La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\exp$.*
6. *La fonction $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $-\sin$.*
7. *La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\cos$.*
8. *La fonction $\tan$ est dérivable sur $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, de dérivée $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.*
9. *La fonction $ch : x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée sh.*
10. *La fonction $sh : x \mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée ch.*
11. *La fonction $\arccos$ est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.*
12. *La fonction $\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*
13. *La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.*

REMARQUE 20 — ***Attention !*** *La plupart des fonction usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf :*
- *La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ en 0.*
- *La fonction $x \mapsto x^a$ en 0, pour $a \notin \mathbb{N}$. (ex : racine carrée, racine cubique,...)*
- *Les fonctions $\arccos$ et $\arcsin$ en -1 et en 1.*

2 Dérivées successives

DÉFINITION 21 (**Dérivées successives**)
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
*Si f' est elle-même dérivable sur I, on appelle**dérivée seconde**, notée f'' ou $f^{(2)}$, la dérivée de f'.*
*Si f'' est elle-même dérivable sur I, on appelle**dérivée troisième**, notée f''' ou $f^{(3)}$, la dérivée de f''.*
*Soit $n \geqslant 1$. Si f est n fois dérivable, on appelle **dérivée n-ième** de f, notée $f^{(n)}$, la fonction obtenue en dérivant n fois la fonction f.*
Par convention, on note $f^{(0)} = f$. La dérivée 0-ième de f est f (on a dérivé 0 fois).

DÉFINITION 22 (**Fonctions de classes D^k,C^k**)
Soient I un intervalle, $k \geqslant 0$, et $f : I \to \mathbb{R}$.
*On dit que f est **de classe $\mathcal{D}^k$** sur I si elle est k fois dérivable sur I.*
On note $D^k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I.
*On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^k$** sur I si elle est k fois dérivable sur I et si sa dérivée k-ème $f^{(k)}$ est continue sur I.*
On note $C^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I.

Remarque 23 —

1. *L'ensemble $C^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.*
2. *L'ensemble $D^1(I)$ est l'ensemble des fonctions dérivables sur I.*
3. *On a $C^k(I) \subset D^k(I)$.*
4. *Comme une fonction dérivable est continue, pour tout $k \geqslant 1$ on a alors $D^k(I) \subset C^{k-1}(I)$ ($f^{(1)}, \dots, f^{(k-1)}$ sont continues car dérivables).*
   On obtient les implications suivantes : $\mathcal{C}^k(I) \Rightarrow \mathcal{D}^k(I) \Rightarrow \mathcal{C}^{k-1}(I) \Rightarrow \mathcal{D}^{k-1}(I) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathcal{C}^1(I) \Rightarrow \mathcal{D}^1(I) \Rightarrow \mathcal{C}^0(I)$.

Définition 24 (**Fonctions de classe C^∞**)
Soient I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$.
*On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur I si elle est k fois dérivable sur I pour tout entier $k \geqslant 1$.*
On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.
Autrement dit, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est une fonction que l'on peut dériver autant de fois que l'on veut sur I.

Remarque 25 — *Si f est de classe C^∞, alors toutes ses dérivées $f^{(n)}$ sont continues (car on peut encore les dériver).*

Théorème 26 (**Fonctions usuelles et C^∞**)
Toutes les fonctions usuelles (mentionnées plus haut) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les intervalles où elles sont dérivables.

Théorème 27 (**Classe C^k et opérations**)
Soient I un intervalle, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^k. On a :

1. *$f + g$ est de classe C^k sur I.*
2. *$f.g$ est de classe C^k sur I.*
3. *Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ est de classe C^k sur I.*
4. *Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^k sur I.*
5. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda.f$ est de classe C^k sur I.*
6. *Pour $f : I \to J$, et $h : J \to \mathbb{R}$ de classe C^k sur J, alors $h \circ f$ est de classe C^k sur I.*

Démonstration — *Cela découle des propriétés sur la somme,produit,inverse,quotient,multiple,composée de fonctions dérivables, ainsi que sur ces mêmes propriétés pour les fonctions continues.* □

Dériver n fois une somme n'est pas très difficile. On a $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.
Pour un produit, ce n'est à priori pas si simple : chaque dérivée fait apparaître de nouveaux termes.
Il existe cependant une formule qui permet d'écrire la dérivée n-ième de fg.

Proposition 28 (**Formule de Leibniz**)
Soient I un intervalle, $n \geqslant 1$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ qui sont n fois dérivables sur I.
Alors, on a $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Démonstration — Ce résultat est la formule du binôme pour la dérivation (au lieu de regarder $(a+b)^n$ on regarde $(f.g)^{(n)}$.
La preuve suit la même idée, c'est-à-dire par récurrence sur n, et en utilisant les propriétés des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$. □

Exemple 29 — *Appliquée pour $n = 4$, la formule de Leibniz donne $(fg)^{(4)} = f^{(4)} + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + g^{(4)}$.*

3 Théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis

Pour une fonction f qui est continue sur un intervalle $I = [a, b]$, nous avons revu le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I., tout d entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteint par la fonction f).
Pour une fonction f dérivable, nous avons d'autres résultats de la même famille. Notamment, le théorème des accroissements finis (T.A.F.)
Rappel : Pour $f : I \to \mathbb{R}$ et $x \in I$, on dit que f atteint un maximum local (ou minimum local) en x s'il existe un petit intervalle $J \subset I$ contenant x tel que $f(x) = \max_J(f)$ (ou $f(x) = \min_J(f)$).

Proposition 30
Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a; b]$ et $x \in]a; b[$.
Si f atteint un maximum/minimum local en x, alors on a $f'(x) = 0$.

Démonstration — Supposons que f a un maximul local en x (l'autre cas est très similaire).
Le taux d'accroissement de f en x est $\tau_x(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
Comme $f(x)$ est un maximum local, pour h assez petit on a donc $f(x+h) \leqslant f(x)$.
Ainsi, si $h < 0$ et est assez petit, on a $\tau_x(h) \geqslant 0$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} \tau_x(h) \geqslant 0$.
Et, si $h > 0$ et est assez petit, on a $\tau_x(h) \leqslant 0$. Donc $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} \tau_x(h) \leqslant 0$.
Ainsi, on a obtient $f'(x) = 0$. □

Remarque 31 — *Pour trouver tous les maximum/minimum locaux d'une fonction f dérivable sur I, il suffit de chercher parmi les $x \in I$ tels que $f'(x) = 0$.*
Cela aide beaucoup à les trouver. (Même s'il faut ensuite vérifier si chaque point est un maximum/minimum ou non)

Théorème 32 (**Théorème de Rolle**)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ telle que $f(a) = f(b)$.
Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration — Si f est constante, alors sa dérivée est la fonction nulle. Dans ce cas on obtient bien le résultat.
Supposons f non constante. La fonction f est dérivable, donc continue sur $[a, b]$. Donc, elle possède un maximum M et un minimum m, qui sont atteints (en un certain c).
Comme f n'est pas constante, on a alors soit $M \neq f(a)$, soit $m \neq f(a)$.
Supposons que $M \neq f(a)$. Alors on a $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Et, la proposition précédente nous dit que $f'(c) = 0$. □

Un point important du théorème de Rolle est que le nombre c est strictement compris entre a et b.

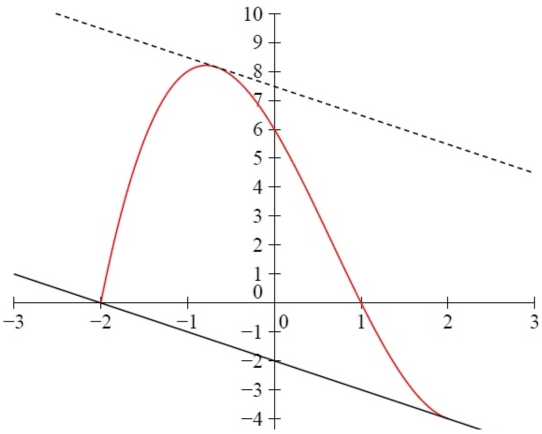
Théorème 33 (**Théorème des accroissements finis**)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$.
Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque 34 — *Autrement dit, il existe un point où la tangente à la courbe de f est parallèle à la droite passant par les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.*

Démonstration — On pose $gx \in [a, b] \mapsto \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(x)$.
Alors g est dérivable sur $[a, b]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[a, b]$, et on a :

$$g(b) - g(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a + f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(b) + f(a) = 0.$$

Vu que $g(b) = g(a)$, on peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g : $\exists c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$.
On a $0 = g'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(c)$, donc on obtient $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, ce qu'on cherchait à prouver. □



Une tangente à la courbe de f est de pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarque 35 — *C'est le théorème des accroissements finis qui permet de démontrer le lien entre signe de la dérivée et croissance/décroissance d'une fonction.*

Théorème 36
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Alors, f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.

Démonstration — Supposons f croissante sur I. Soit $a \in I$.
Le taux d'accroissement de f en a vaut $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
Comme f est croissante, si $h > 0$ le numérateur est positif ($f(a+h) \geqslant f(a)$) et le dénominateur aussi. Si $h < 0$ le numérateur est négatif ($f(a+h) \leqslant f(a)$) et le dénominateur aussi. Donc $\tau_a(h) \geqslant 0$ dans tous les cas. En passant à la limite, on obtient $f'(a) \geqslant 0$.
Réciproquement, supposons que $f' \geqslant 0$ sur I. Soient $x < y \in I$.
D'après le théorème des accroissements finis (TAF), il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Vu que $f'(c) \geqslant 0$, on en déduit que $f(y) - f(x) \geqslant 0$, et donc que f est croissante sur I.
La preuve dans le cas de la décroissance est similaire. (elle utilise les mêmes idées) □

Théorème 37 (**Stricte croissance/décroissance et dérivée**)
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.
Alors, f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est strictement positive sur I, sauf en un nombre fini de points (où elle s'annule).
f est strictement décroissante sur I si et seulement si f' est strictement négative sur I, sauf en un nombre fini de points (où elle s'annule).

Démonstration —Admis.

Remarque 38 — *Ces théorèmes sont utilisés sans être cités lors de l'étude des variations de fonctions, comme vous en avez déjà l'habitude. Mais vous avez désormais une preuve propre de ces résultats, et les outils pour bien les comprendre.*

Théorème 39 (**Théorème du prolongement de la dérivée**)
Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b]$.
Si la dérivée f' de f admet une limite finie l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration —Admis.

Exemple 40 — *Ce théorème est souvent appliqué dans le cas où on a une fonction f sur $]a, b[$ que l'on prolonge par continuité sur $[a, b]$, et où l'on veut savoir si le prolongement effectué est*

dérivable ou non.
Il évite de revenir au calcul du taux d'accroissement (qui est toutefois rarement plus complexe).
Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$. Cette fonction est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Elle se prolonge par continuité par 0 en 0 (d'après les croissances comparées, $x^2 \ln(x) \to_{x\to 0^+} 0$).
De plus on a $f'(x) = 2x\ln(x) + x$. On trouve aussi que $f'(x) \to_{x\to 0^+} 0$.
Le théorème de prolongement de la dérivée nous dit alors que le prolongement de f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.
Cette information est essentielle pour tracer la courbe de f au voisinage de 0.

Proposition 41 (**Inégalité des accroissements finis (IAF)**)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $|f'(x)| \leqslant M$, $\forall x \in [a;b]$, pour un $M \in \mathbb{R}$.
Alors on a $|f(z) - f(y)| \leqslant M|z-y|$, $\forall x, y \in [a,b]$.

Démonstration — Si $x \neq y$, d'après le théorème des accroissements finis on a c entre x et y tel que $\left|\frac{f(z)-f(y)}{z-y}\right| = |f'(c)|$. Vu que $|f'(c)| \leqslant M$, on obtient l'inégalité. □

Remarque 42 — *Ces inégalités ont une interprétation physique assez claire : Si on court 2 heures avec une vitesse de pointe de 12 kilomètres par heure, on n'aura pas parcouru plus de $2.12 = 24$ kilomètres.*
L'ensemble des fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui vérifient $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$ $\forall x, y \in [a,b]$ sont appelées les fonctions M-Lipschitziennes (en hommage au mathématicien Lipschitz).
Ces fonctions sont toutes continues (pas forcément dérivables), et peuvent facilement apparaître dans un problème de concours, en analyse.

Théorème 43 (**Théorème du point fixe de Picart**)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I fermé ($[a;b]$, $[a,+\infty[$, ou $]-\infty,b]$), telle que :

1. *$f(I) \subset I$*
2. *Il existe $K < 1$ tel que $|f'(x)| \leqslant K < 1$, $\forall x \in I$.*

Alors :

1. *La fonction f possède un point fixe l dans I.*
2. *Le point fixe l est unique.*
3. *Pour tout $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l.*
   On a $|u_n - l| \leqslant K^n |u_0 - l|$, $\forall n \geqslant 0$.

Démonstration —Admis.

Ce théorème permet d'étudier de nouvelles suites récurrentes pour en établir la convergence.
Dans le chapitre 8, il fallait que la fonction f soit croissante sur I pour établir la convergence/divergence de la suite $(u_n)_n$. Ici, c'est une condition de majoration de la dérivée que l'on utilise.

Par exemple, la fonction cos est dérivable sur $I = [0, \pi/4]$, sa dérivée $-\sin$ vérifie $|-\sin(x)| \leqslant \sin(\pi/4) < 1$ sur I, et I est un intervalle stable pour cos. Donc cette fonction possède un unique point fixe l dans I, et pour tout $u_0 \in [0, \pi/4]$ la suite définie par $u_{n+1} = \cos(u_n)$ converge vers l.

3.1 Application à l'étude de suites récurrentes.

Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue. Alors :

— Si la suite $(u_n)_n$ convergen, sa limite l de la suite vérifie $f(l) = l$.
C'est un **point fixe** de la fonction f.

— Pour majorer ou minorer une telle suite, on cherche un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ (intervalle **stable** par f).
Si un terme u_{n_0} de la suite appartient à cet intervalle stable I, alors tous les termes suivants y seront également.

— Pour étudier la croissance/décroissance de la suite, on étudie le signe de $x \mapsto f(x) - x$, en espérant qu'il soit constant sur notre intervalle stable.
Quand la fonction f est croissante, la suite sera toujours monotone (mais pas nécessairement croissante !).
Quand f est décroissante, cela se passe moins bien en général. Mais, les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) seront alors monotones.

— Si la suite n'est pas monotone, mais qu'elle est dans un intervalle stable I et que $|f'| < 1$ (important), alors alors peut montrer que $(u_n)_n$ est convergente en appliquant l'inégalité des accroissements finis.

— On toujours l'étude de la suite récurrente $(u_n)_n$ par l'étude des variations de la fonction f, et surtout du signe de $f(x) - x$ (qui donne auss les points fixes).
On fera même une représentation graphique de f, en traçant aussi la droite d'équation $y = x$, et on placera sur ce graphique les premiers termes de la suite.

EXEMPLE 44 — *Considérons la suite définie par* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. *On pose* $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$. *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$, *de dérivée* $-\dfrac{1}{x^2}$.
Elle est donc décroissante sur $]-\infty; 0[$ *et sur* $]0; +\infty[$.
Par ailleurs, on a $f(x) - x = 1 + \dfrac{1}{x} - x = \dfrac{x + 1 - x^2}{x}$. *Le numérateur a pour discriminant* $\Delta = 5$, *et s'annule en* $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, *et en* $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
En représentant les premiers termes de la suite, on constate que la suite semble converger vers x_1. *Il faut donc le prouver. Cherchons un intervalle stable intéressant. L'intervalle naturel semble être* $[1, 2]$ *(les deux premiers termes de la suite étant respectivement égaux à* 1 *et* 2*), mais l'intervalle* $I = \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ *est plus intéressant. Vérifions que* I *est stable par* f : $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{3} < 2$; $f(2) = \dfrac{3}{2}$ *et* f *est décroissante sur* I, *donc* $f\left(\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]\right) = \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}\right]$.
Comme $u_1 \in I$, *on a alors par récurrence sur* n *que* $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in I$.
De plus, sur notre intervalle I, *on a* $|f'(x)| = \dfrac{1}{x^2}$ *par* $\dfrac{4}{9}$.
On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis (IAF) à $x = u_n$ *et* $y = x_1$ *(entre le terme général de la suite et le point fixe contenu dans* I*).*
On obtient, ainsi : $|f(u_n) - f(x_1)| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - x_1|$, *soit* $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \dfrac{4}{9}|u_n - x_1|$.
On prouve alors par récurrence sur n *que* $|u_n - x_1| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
(On applique l'IAF de multiples fois pour obtenir le résultat). Comme on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{9}\right)^n = 0$, *et comme* $|u_n - x_1| \leqslant 2 - \frac{3}{2}$, *on obtient avec le théorème des gendarmes que* $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - x_1| = 0$.
C'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4 Dérivabilité et fonctions complexes.

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Pour $a \in I$ et $l \in \mathbb{C}$, on rappelle que $f(x) \to_{x\to a} l$ si $|f(x) - l| \to_{x\to a} 0$.
C'est-à-dire si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que pour tout x avec $|x - a| < \eta$, on a $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Proposition 45
La fonction f admet une limite l en a si et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ admettent des limites respectives l_1 et l_2 quand x tend vers a.
On a alors $l = l_1 + il_2$.

Définition 46
*La fonction f est **continue** en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Il n'existe pas d'équivalent chez les complexes au théorème des valeurs intermédiaires, la notion de valeur située entre $f(a)$ et $f(b)$ ne pouvant pas être adaptée.

Définition 47 (**Dérivabilité**)
Soient I un intervalle, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.
*On dit que f est **dérivable en** a si son **taux d'accroissement** $\tau_a(f) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie l lorsque x tend vers a.*
On définit le nombre dérivé de f en a, qui vaut $f'(a) = l$.
*On dit que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point de I.*

Proposition 48
La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont dérivables en a.
On a alors $f'(a) = \mathrm{Re}\,(f)'(a) + i\mathrm{Im}\,(f)'(a)$.

Exemple 49 — *Pour $f(t) = e^{it}$ (fonction définie sur $\mathbb{R}$), on a $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$.*
En dérivant séparément les parties réelle et imaginaire on obtient : $f'(t) = -\sin(t) + i\cos(t) = e^{i(t+\frac{\pi}{2})} = ie^{it}$.
On remarque que la dérivée de cette exponentielle complexe se calcule comme celle des exponentielles réelles.

Tout le formulaire de calcul de dérivées (y compris la formule de Leibniz) reste valable pour des fonctions complexes. Il est moins utile que pour les fonctions réelles car il existe beaucoup moins de fonction usuelles sur $\mathbb{C}$ (en PTSI).
Plus rien d'intéressant en PTSI pour le cas à valeurs complexes : pas d'IAF, ni même de théorème des accroissements finis. Le théorème de Rolle n'est également pas vérifié par les fonctions complexes. Pour $f(t) = e^{it}$, alors $f'(t) = ie^{it}$ ne s'annule jamais, bien que $f(0) = f(2\pi) = 1$.

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

— Connaître la définition d'une fonction f dérivable. Notion de dérivée n-ième. Ensembles $C^1(I)$,$C^k(I)$,$C^\infty(I)$,$D^k(I)$ de fonctions dérivables.
Dérivées des fonctions usuelles (x^n, x^a, exp, ln, cos, sin, tan, arccos, arcsin, arctan, ch, sh).

— Somme, produit, quotient, composée, bijection réciproque de fonctions dérivables, et valeur de leur dérivée.
Savoir montrer qu'une fonction f est dérivable (par la définition, ou par les opérations sur les fonctions usuelles), et savoir calculer f'.

— Formule de Leibniz pour $(f.g)^{(n)}$.

— Pour x un maximum/minimum local de f, on a $f'(x) = 0$. Théorème de Rolle (cas $f(a) = f(b)$). Théorème des accroissements finis (TAF).

— Inégalité des accroissements finis (IAF). Savoir utiliser l'IAF pour encadrer $|f(x)-f(y)|$, entre autres dans l'étude de suites récurrentes.

— Lien entre signe de f' et variations de la fonction f. Caractérisation des fonctions dérivables strictement croissantes/décroissantes. Savoir utiliser la dérivée f' pour étudier la fonction f.

— Théorème de prolongement de la dérivée, pour chercher à prolonger $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ en a ou en b.

— Généralisation de la dérivabilité aux fonctions à valeurs complexes $f : I \to \mathbb{C}$. Exemple de $t \mapsto e^{it}$.