Chapitre 19
Déterminant

Table des matières

Vidal AGNIEL

1 Définition du déterminant

1.1 Formes n-linéaires, antisymétriques, sur les matrices carrées

Dans ce chapitre, nous allons définir une fonction sur l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour cela, on regardera souvent une matrice M avec ses colonnes $C_1, \ldots, C_n$ ($M = (C_1 \mid C_2 \mid \ldots \mid C_n)$).
Et, si besoin, on regardera M avec ses lignes $L_1, \ldots, L_n$.

Définition 1 (**Forme n-linéaire**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une fonction.
On dit que la fonction f est une **forme n-linéaire** si elle est linéaire en chaque colonne de sa variable.
C'est-à-dire, si on fixe $n-1$ colonnes d'une matrice M (toutes ses colonnes sauf C_i), et que l'on fait varier la colonne qui reste, on a une application linéaire.
C'est-à-dire, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, que la i-ème fonction f_i : $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ C & \mapsto & f((C_1 \mid C_2 \mid \ldots \mid C_{i-1} \mid C \mid C_{i+1} \mid \ldots \mid C_n) \end{array}$ est une application linéaire.

Exemple 2 — *La fonction* $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ *est une forme 2-linéaire.*
En effet, si on fixe $C_2 = \binom{b}{d}$, *la fonction* $f_1 : \binom{a}{c} \mapsto ad - bc$ *est une application linéaire.*
Et, si on fixe $C_1 = \binom{a}{c}$, *la fonction* $f_2 : \binom{b}{d} \mapsto ad - bc$ *est aussi une application linéaire.*

Exemple 3 — *La fonction* $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto 0$ *est une forme n-linéaire.*
Comme c'est la fonction nulle, il n'y a pas grand intérêt à l'étudier.

Autrement dit, une forme n-linéaire est une fonction $f : (C_1 \mid \ldots \mid C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui est *linéaire par rapport à chaque colonne* $C_1, \ldots, C_n$ (linéaire en C_1, linéaire en C_2, ..., linéaire en C_n).

Définition 4 (**formes n-linéaires antisymétriques**)
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. Soit $f : E^p \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E.
On dit que f est une forme n-linéaire **antisymétrique** si permuter deux colonnes C_i et C_j d'une matrice M multiplie la valeur de $f(M)$ par -1.
Autrement dit, si pour tout $M = (C_1 \mid \ldots |_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $i < j$, on a :

$$f(C_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ième}}}{C_i}, \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ième}}}{C_j}, \ldots, C_p) = -f(C_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ième}}}{C_j}, \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ième}}}{C_i}, \ldots, C_p).$$

Exemple 5 — *La fonction* $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ *est une forme 2-linéaire antisymétrique.*
En effet, $f(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}) = bc - ad = -(ad - bc)$.

1.2 Déterminant d'une matrice carrée

Théorème 6 (**Existence du déterminant**)
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n.
Alors, il existe une unique fonction $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que :

1. f est une forme n-linéaire ;
2. f est antisymétrique
3. $f(I_n) = 1$.

Cette fonction est appelée **déterminant** en dimension n. On la note det.
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le nombre $\det(M)$ est appelé **déterminant de la matrice** M.

Démonstration — Admis.

Remarque 7 — *Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, le déterminant de A se note aussi :*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n}. \end{vmatrix}.$$

Proposition 8 (**Déterminant en dimension** 2)
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.
Alors, on a $\det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$.

On peut écrire $\det(A)$ comme un polynôme en les coefficients $a_{i,j}$ pour toute taille de matrices, mais après $n = 2$ l'expression est trop grosse pour être utile.

1.3 Déterminant en géométrie

On verra que l'on peut aussi définir le déterminant d'une famille de n vecteurs en dimension n. En supposant cette construction faite, on a les liens suivants avec la géométrie :

Proposition 9 (**Déterminant et géométrie du plan**)
Soit $n = 2$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormée du plan $\mathbb{R}^2$. Alors, $|\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v})|$ est égal à la surface du parallélogramme de côtés $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ non nuls.

Proposition 10 (**Déterminant et géométrie de l'espace**)
Soit $n = 3$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) \qquad \text{et} \qquad V = |\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

est le volume du parallélépipède de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

2 Propriétés du déterminant

Proposition 11
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. Soit $M = (C_1 \mid \dots \mid C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.
Si $C_i = C_j$ pour $i \neq j$, alors on a $\det(M) = 0$.

Démonstration — Sur feuille.

Proposition 12
Soit $n \geq 1$. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors on a : $\det(\lambda\, A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration — On utilise la linéarité par rapport à chaque colonne.

2.1 Déterminant et opérations élémentaires sur les colonnes

Proposition 13 (**Déterminant et opérations élémentaires**)
Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit B la matrice obtenue en effectuant $C_i \leftarrow \lambda.C_i$, avec $\lambda \neq 0$.
  Alors, on a $\det(B) = \lambda \det(A)$.

- Soit B la matrice obtenue en effectuant $C_i \leftrightarrow C_j$, avec $i \neq j$.
  Alors, on a $\det(B) = -\det(A)$.
- Soit B la matrice obtenue en effectuant $C_i \leftarrow C_i + \lambda.C_j$, avev $i \neq j$.
  Alors, on a $\det(B) = \det(A)$.

Démonstration — Admis.

Ainsi, on peut calculer le déterminant d'une matrice A avec la méthode du Pivot. Nous verrons d'autres propriétés du déterminant qui permettent de s'aider dans le calcul de $\det(A)$.

Corollaire 14 (**Déterminant d'une matrice triangulaire**)
Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. Soient $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ les coefficients diagonaux de A.
Alors, on a $\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Pour A une matrice triangulaire, on a donc $\det(A) = 0$ si et seulement si l'un des coefficients diagonaux de A est nul.

2.2 Déterminant et produit, inverse, transposée

Proposition 15 (**Déterminant et inversibilité**)
Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors, on a $\det(A) \neq 0$ si et seulement si A est inversible.
On a $Gl_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A) \neq 0\}$.

Le déterminant est une fonction dont un des intérêts est de déterminer rapidement si une matrice carrée A est inversible ou non.
Aussi, si la matrice A n'est pas inversible, on sait alors que $\det(A) = 0$.

Remarque 16 — *Pour $n = 2$, on retrouve le fait que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.*

Proposition 17 (**Déterminant et produit de matrices**)
Soit $n \geq 1$. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Quand une matrice M s'écrit comme un produit de matrices $M = AB$, on peut calculer plus rapidement le déterminant de M si on connaît celui de A et celui de B.

Proposition 18 (**Déterminant et inverse**)
Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.
Alors, on a $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Démonstration — On utilise les propriétés du déterminant d'un produit, et $A.A^{-1} = I_n$.

Proposition 19 (**Déterminant et transposée**)
Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors, on a $\det({}^tA) = \det(A)$.

2.3 Déterminant et opérations élémentaires sur les lignes

Proposition 20 (**Déterminant et opérations élémentaires**)
Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit B la matrice obtenue en effectuant $L_i \leftarrow \lambda.L_i$, avec $\lambda \neq 0$.
  Alors, on a $\det(B) = \lambda \det(A)$.
- Soit B la matrice obtenue en effectuant $L_i \leftrightarrow L_j$, avec $i \neq j$.
  Alors, on a $\det(B) = -\det(A)$.
- Soit B la matrice obtenue en effectuant $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$, avev $i \neq j$.
  Alors, on a $\det(B) = \det(A)$.

Preuve — Pour B la matrice obtenue en faisant une opération élémentaire sur les lignes de A, ${}^tB$ est la matrice obtenue en faisant la même opération élémentaire sur les colonnes de ${}^tA$.
Comme on a $\det(B) = \det({}^tB)$ et $\det(A) = \det({}^tA)$, on obtient le résultat. □

On peut ainsi calculer le déterminant d'une matrice A en lui appliquant des opérations élémentaires sur ses lignes, ou bien en appliquant des opérations sur les lignes et des opérations sur les colonnes.

MÉTHODE 21 — *Pour calculer le déterminant d'une matrice A, on peut utiliser la méthode du Pivot.*
On utilise des opérations élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes) pour transformer A en une matrice triangulaire B.
On obtient la valeur de $\det(B)$ en faisant le produit de ses coefficients diagonaux.
Chaque opération élémentaire sur A multiplie $\det(A)$ par 1, -1, ou $\frac{1}{\lambda}$.
On obtient alors la valeur de $\det(A)$ à partir de celle de $\det(B)$.

EXEMPLE 22 — *Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$. On veut calculer le déterminant :*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

On a successivement :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} && \textit{mise en facteur dans } L_2 \textit{ et } L_3 \\
&= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
&= (b-a)(c-a)(c-b) && \textit{d'après le corollaire } \textbf{??}.
\end{aligned}$$

2.4 Déterminant d'une matrice par blocs

PROPOSITION 23
Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possédant un bloc rectangulaire de zéros en bas à gauche. On l'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

où C est une matrice $p \times p$, D une matrice $p \times (n-p)$, 0 la matrice nulle $(n-p) \times p$, et E une matrice $(n-p) \times (n-p)$. Alors on a :

$$\det A = (\det C) \cdot (\det E).$$

Un cas particulier très fréquent pour les matrices par blocs est le suivant :

PROPOSITION 24
Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \dots & * & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Alors, on a $\det A = a_{n,n} \det A'$.

Par itération de ce théorème, on peut calculer facilement les déterminants de matrices "triangulaires par blocs".

Exemples 25

1. $\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 7 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$

2. Comme le déterminant est invariant par transposition, on peut aussi calculer des déterminants "triangulaires inférieurs par blocs" :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice "diagonale par blocs" est facile à calculer : c'est le produit des déterminants de tous les blocs.

Corollaire 26
Soit $n \geq 2$. Soit $1 \leq k \geq n$ et $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1 + \ldots + n_k = n$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A une matrice diagonale par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}, \text{ avec } A_i \in \mathscr{M}_{n_i}(\mathbb{K}),$$

alors on a $\det A = \prod_{i=1}^{k} \det A_i$.

2.5 Développement d'un déterminant selon une colonne ou une ligne

Définition 27
Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$.
On note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.
Ce déterminant est appelé **mineur** de A.
Le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ est appelé **cofacteur** de A.

Théorème 28 (**Développement du déterminant selon une colonne**)
Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \, (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}, \; \forall j \in [\![1, n]\!].$$ [1] (développement selon la j-ème colonne de A)

Démonstration — Admis.

En appliquant ce résultat à la transposée de A, on obtient :

Théorème 29 (**Développement du déterminant selon une ligne**)
Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}, \; \forall i \in [\![1, n]\!].$$ (développement selon la i-ème ligne de A)

Exemple 30 — *Pour un déterminant* 3×3*, on a donc : (développement selon la* 1*-ère ligne)*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}.$$

1.

Mais aussi : (développement selon la 2-ème colonne)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = -a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{3,2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}.$$

3 Bilan des opérations sur le déterminant

Le déterminant d'une matrice A étant une forme n-linéaire aantisymétrique sur colonnes (ou sur les lignes) de A, les propriétés que nous avons vues permettent d'énoncer les règles suivantes.

Proposition 31 (**Déterminant et opérations sur les lignes/colonnes**)
Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A a deux colonnes (ou deux lignes) identiques, alors $\det(A) = 0$.
- L'échange $C_i \leftrightarrow C_j$ de deux colonnes de A (ou deux lignes) multiplie son déterminant par -1.
- Si une colonne (ou une ligne) de A est combinaison linaire des **autres** colonnes (ou des **autres** lignes), alors $\det(A) = 0$.
- Si une colonne (ou une ligne) de A est formée de 0, alors $\det(A) = 0$.
- La valeur de $\det(A)$ est inchangée si l'on ajoute à une colonne (ou à une ligne) de A une combinaison linaire des **autres** colonnes (ou des **autres** lignes), $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.
- Si l'on multiplie une colonne de A (ou une ligne) par λ, $C_i \leftarrow \lambda C_i$, alors son déterminant est multiplié par λ.
  Donc, si l'on multiplie la matrice A par λ, son déterminant est multiplié par λ^n.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire B est facile à calculer. Il vaut $\det(B) = \pi_{i=1}^{n} b_{i,i}$.
  On peut appliquer des opérations élémentaires sur les lignes de A ou sur les colonnes de A pour se ramener à une matrice triangulaire, et ainsi calculer rapidement $\det(A)$.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs/diagonale par blocs D est facile à calculer. Il vaut $\det(D) = \Pi_{i=1}^{r} \det(D_i)$, où D_i sont les blocs sur la diagonale.
- On peut faire un développement selon une ligne ou une colonne afin d'exprimer $\det(A)$ comme une combinaison linéaire de déterminants de matrice de taille plus petite (exprimer un det d'ordre n en fonction de plusieurs det d'ordre $n-1$).
  En faisait apparaître beaucoup de 0 sur une seule ligne/colonne, un développement selon cette ligne/colonne permet de se ramener à calculer le déterminant sur une matrice plus simple.
- **Important** : Le développement selon une ligne/colonne est une technique totalement indépendante de la méthode du Pivot.
  On peut ainsi combiner les deux méthodes dans ses calculs pour calculer plus vite et plus facilement.

Remarque 32 — *Ces règles de transformation du déterminant d'une matrice A permettent :*

- *Soit de prouver que* $\det(A) = 0$. *(beaucoup plus rapide que le cas où* $\det(A) \neq 0$*)*
- *Soit de transformer A en une matrice triangulaire/triangulaire par blocs pour obtenir son déterminant.*
- *Soit de développer* $\det(A)$ *en une somme de déterminants de matrices plus petites.*

Remarque 33 (Théorème de Mathieu) — *Un déterminant est soit nul soit non-nul. Ainsi, la moitié du temps, il faut montrer que* $\det(A) = 0$.

Un exemple : Le déterminant de Vandermonde

Il existe des familles de matrices que l'on rencontre souvent en physique ou en mathématiques, et dont on veut savoir rapidement si elles sont inversibles ou non.
Pour cela, on calcule le déterminant de ces matrices, qui se factorise en une expression "sympathique".
Voici l'exemple du déterminant de Vandermonde.

Exemple 34 — ***(Déterminant de Vandermonde)*** *Soient $n \geq 0$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. On définit le **déterminant de Vandermonde** de $(x_0, \ldots, x_n)$, noté $V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, par :*

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

On a alors :

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

Cela montre que :

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \iff \exists i, j \in [\![0, n]\!] \text{ tels que } i \neq j \text{ et } x_i = x_j.$$

Démontrons cela par récurrence sur $n \geq 1$. On définit la propriété H_n :
"Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. On a :

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)."$$

- ***Initialisation*** *: H_1 est vraie, car pour $x_0, x_1 \in \mathbb{K}$, on a :*

$$V(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0.$$

- ***Hérédité*** *: Soit $n \geq 2$. Supposons que H_{n-1} est vraie. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$.*
  - *Si les scalaires $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas distincts deux à deux, le déterminant $V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a deux colonnes identiques et est donc nul. Dans ce cas $V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) = 0$.*
  - *Si les scalaires $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont distincts deux à deux, on développe ce déterminant par rapport à la dernière colonne. Cela montre que la fonction $f : x \mapsto V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$ est une fonction polynomiale en x, de degré inférieur ou égal à n, et dont le terme de degré n est :*

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})\, x^n.$$

  D'après H_{n-1}, on a :

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1} (x_i - x_j)$$

  Cette quantité est donc non nulle car $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont deux à deux distincts. Ainsi, f est une fonction polynomiale de degré n.
  Or, f admet comme racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ car pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la quantité $f(x_i)$ est un déterminant admettant deux colonnes identiques. On connaît donc toutes les racines de f. Cela donne :

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x) = V(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j), \ \forall x \in \mathbb{K}.$$

  Ceci implique :

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1} (x_i - x_j) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j),$$

  ce qui montre que H_n est vraie, ce qui termine la récurrence.

4 Déterminant et algèbre linéaire

4.1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 35 (**Déterminant d'une famille de vecteurs**)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. Soit A la matrice des coefficients de $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.
On définit le **déterminant dans la base $\mathcal{B}$ de** $(u_1, \ldots, u_n)$, par $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det(A)$.
Le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ est égal au déterminant de la matrice de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 36 (**Déterminant et bases**)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.
Alors, on a $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$ si et seulement si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.
La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$.

4.2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition-Définition 37
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $f : E \to E$ un endomorphisme. Soit B une base de E.
Soit $Mat_B(f)$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base B.
On définit le déterminant de l'endomorphisme f par : $\det(f) = \det(Mat_B(f))$.
Ce nombre ne dépend pas de la base B choisie.

Preuve — Soient B, B' deux bases de E. Soit P la matrice de passage de B vers B'.
Alors, on a $Mat_{B'}(f) = P^{-1} Mat_B(f) P$.
En prenant le déterminant, cela donne : $\det(Mat_{B'}(f) = \det(P^{-1} Mat_B(f) P) = \det(P^{-1}) \det(Mat_B(f)) \det(P)$.
Comme $\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$, on obtient $\det(Mat_{B'}(f) = \det(Mat_B(f))$.
Cette quantité ne dépend donc pas de la base choisie. □

Exemples 38

1. *Pour $\mathcal{B}$ une base de E, on a* $\det \mathrm{Id}_E = \det_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.
2. *Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Soien $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $(e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ des bases de F et de F. Alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E , et on a :*

$$\begin{aligned}\det s &= \det_{\mathcal{B}} \big(s(e_1), \ldots, s(e_n)\big) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_p, -e_{p+1}, \ldots, -e_n)\\ &= (-1)^{n-p} = (-1)^{\dim G}.\end{aligned}$$

Proposition 39
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $f, g : E \to E$ deux endomorphismes. Alors :

1. On a $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
2. On a $\deg(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
3. On a $\det(f) = 0$ si et seulement si f n'est pas bijective (pas un isomorphisme).
4. Si f est un isomorphisme, on a $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Démonstration — Cela découle des propriétés du déterminant sur les matrices.

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

- Définition du déterminant comme forme n-linéaire alternée. Savoir utiliser la linéarité pour faire des calculs de déterminant. Une matrice est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- Déterminant et opérations élémentaires sur les colonnes/lignes. Utiliser la méthode du Pivot pour calculer un déterminant.
- Déterminant d'un produit de matrices, déterminant de A^{-1}.
  Déterminant de matrices $2x2$ $ad - bc$.
- Déterminant de matrices triangulaires/diagonales par blocs.
- Développement d'un déterminant selon une colonne ou selon une ligne.
- Savoir calculer le déterminant d'une matrice en utilisant toutes ses propriétés. Savoir faire attention aux erreurs dans les calculs de coefficients.
- Exemple : Déterminant de Vandermonde.
- Définition du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Son déterminant est nul ssi la famille est liée.