Introduction à la CPGE
Mathématiques

Exercice 1.

Simplifier :

1. $(1-1+1)(2-2+2)$.
2. $(2+0+2+1)-(2\times 0\times 2\times 1)$.
3. $\frac{2}{-1}$.
4. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$.
5. $\frac{(1-2)^2-3}{4^4-1}$.
6. $\frac{\sqrt{24}}{6}$.
7. $\frac{(-3)^3}{4-2^2}$.
8. $(x+1)^2-(x^2-1)$.
9. $\frac{(1-(-1)^n)}{2}$.
10. $(1+i)^3$.

Factoriser :

1. $4x^2-9$.
2. x^4+2x^2+1.
3. $3x^5-x^2$.
4. $2\ln(3)-4\ln(2)$
5. $\ln(4)-\ln(\frac{1}{2})+\ln(\sqrt{2})$.
6. $(e^{2x})^3\times e^{-4x}$.
7. x^2-10.
8. x^3-1 (dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$).
9. x^4+1 (dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$).
10. $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}$.

Exercice 2. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux.
Si l'énoncé est vrai, le montrer. Si l'énoncé est faux, le montrer.

1. On a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a+b}$.
2. Si $2x=0$ alors $2=0$.
3. On a $a+b=5$ implique $a^2+b^2=25$.
4. On a $e^a+e^b=2 \Leftrightarrow a+b=\ln(2)$.
5. On a $\ln(a)+\ln(b)=1 \Leftrightarrow a+b=e^1$.
6. On a $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
7. On a $e^0=0$.
8. On a $1/0=0$.
9. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $(-1)^n=-1^n$.
10. Pour $n\in\mathbb{N}$ on a $(1-(-1)^n)=2$.
11. On a $a^2=2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$.
12. On a $(a+b)^3=a^3+b^3$, pour tous $a,b\in\mathbb{R}$.
13. Le nombre de façons d'ordonner n éléments est $(n-1)!=(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$.
14. On a $2xy\le(x+y)^2$.
15. On a $xy\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
16. On a $4xy\le(x^2+y^2)$.
17. Si une suite est convergente, alors elle est croissante et majorée.
18. Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
19. On a $e^x-e^{-x}=0$.
20. On a $\cos(0)=\cos(2\pi)=1$, $\cos(x)+\sin(x)=1$.

Exercice 3.

1. Factoriser la fonction polynômiale $f_1(x)=x^3-3x^2+5x-3$.
2. Factoriser la fonction polynômiale $f_2(x)=x^3+4x^2+2x-1$.
3. Montrer qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$, on a $\frac{x+1}{x-1}=a+\frac{b}{x-1}$.
4. Montrer qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ on a $\frac{2x-3}{x+4}=a+\frac{b}{x+4}$.
5. Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0=1$ et $x_{n+1}=x_n+x_{n-1}+\ldots+x_0$, pour tout $n\ge 0$.
   Calculer les premiers termes de la suite $(x_n)_n$.
   Montrer que pour $n\ge 1$ on a $x_n=2^n$.

Exercice 4.

1. Résoudre $3x+5=2x-7$.
2. Résoudre l'équation $x^4-3x^2+2=0$.
3. Résoudre l'équation $e^{2x}+e^x-1=0$. On pourra poser $Y=e^x$.
4. Résoudre $\frac{x-3}{x+1}=1$.
5. On pose $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$, pour $n>0$.
   Montrer que $x_n\ge 0$, puis que $x_n\to_{n\to+\infty}0$.
6. Déterminer la limite de $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+3}$ quand $n\to+\infty$.
7. Montrer que $e^{\frac{x}{2}}-e^{-x/2}=\frac{e^x-1}{e^{x/2}}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   Résoudre $e^{\frac{x}{2}}-e^{-x/2}=0$.
8. Résoudre l'inéquation $2x-7\le 8-5x$.
9. Résoudre l'inéquation $e^x\ge x+6$.
10. Résoudre l'inéquation $\frac{x(x+1)}{x^2+1}<0$.

Exercice 5. Soit $x\in\mathbb{R}$.

- En utilisant une identité remarquable, montrer que $\frac{x}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$.
- Puis, montrer que $\frac{x}{x^2+1}\ge\frac{-1}{2}$.

Exercice 6.

1. Quel est le plus grand de ces nombres : $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $0,30303$, trente-trois centièmes.
2. Pour $a \geq b \geq 0$, lequel de ces nombres est égal à $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{a-b}$, $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$, $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$.
3. Soit $f(x) = ax^2 - 4$ avec $a \neq 0$. Sachant que $f(f(1)) = -4$, que vaut $f(2)$: -4, 0, 1, 2, 12.
4. Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que $x^2 + ax + a = 1$ possède deux solutions distinctes ?
5. Que valent 70% de 30 moins 30% de 70 ?
6. Une quantité x augmente de 30%, puis diminue de 30%, puis diminue de 50%. Quelle est la quantité obtenue ?
7. Lefort effectue une montée de 2700 m de long en 31 min. Une partie à pied à 2km par heure, le reste en vélo à 12km par heure. Combien de temps, en minutes, marche-t-il : 17, 19, 21, 23, 25.
8. La somme des longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle vaut 18 tandis que la somme de leurs carrés vaut 128. Quelle est l'aire de ce triangle ?
9. Soient a, b, c trois entiers tels que $ab = 12$, $bc = 24$, $ca = 32$. Que vaut abc ?
10. Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $x + y + xy = 340$. Combien vaut $x + y$?

Exercice 7.
3 vaches et 5 chèvres produisent en 3 jours autant de lait que 4 vaches et 2 chèvres en 5 jours.
Qui produit le plus de lait chaque jour, une vache ou une chèvre ?

Exercice 8.

1. Donner l'écriture algébrique de $\frac{1}{2+i}$.
2. Donner l'écriture algébrique de $\frac{1}{i}$.
3. Donner l'écriture algébrique de $\frac{3+i}{5-2i}$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 9. Pour n un entier naturel non-nul, on note $n!$ le nombre $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.
Quel est le plus petit entier naturel n non-nul dont le produit avec $12!$ est un carré parfait ?

Exercice 10. Soit $\mathcal{C}$ un carré.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ un entier, on dit qu'on peut découper $\mathcal{C}$ en n carrés si on peut trouver une partition de $\mathcal{C}$ (un découpage de $\mathcal{C}$) en n carrés, carrés qui ne sont pas forcément de la même taille.

1. Montrer qu'on peut découper le carré $\mathcal{C}$ en 4 carrés, en 6 carrés, en 7 carrés et en 8 carrés.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que si on peut découper le carré $\mathcal{C}$ en n carrés, alors on peut découper $\mathcal{C}$ en $n+3$ carrés.
3. Montrer que pour tout $n \geq 6$, on peut découper $\mathcal{C}$ en n carrés.
4. On ne peut pas découper $\mathcal{C}$ en 2, 3 ou 5 carrés.
   Démontrer cela, en essayant d'être le plus rigoureux possible.
   Quel type de raisonnement utiliser ?

Exercice 11. (*) Le banquet des lycéens de Tahiti réunit 2023 élèves. Pour le dessert, on découpe et distribue un gros gâteau (par ordre d'âge décroissant) de la manière suivante :

- Le 1er a 1/2023 du gâteau ;
- Le 2eme a 2/2023 du reste ;
- Le 3eme a 3/2023 du reste du reste ;
- . . .
- Le 2022eme a 2022/2023 du reste restant ;
- Le 2023eme a tout ce qui reste à la fin.

• Déterminer la proportion de gâteau reçue par chaque élève, en fonction de sa position k parmi les 2023. On commencera par les premiers élèves.
• Déterminer l'élève qui a reçu la plus grosse part morceau de gâteau. On pourra comparer les parts de gâteau entre le $k$eme élève et le $(k+1$eme élève.