Chapitre 3
Fonctions d'une variable réelle

Table des matières

Vidal AGNIEL

1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude des fonctions réelles d'une la variable réelle. Il s'agit de revoir les outils que vous avez développés au lycée, et d'en développer certains.
Vous utiliser depuis longtemps des ensembles de nombres classiques comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ qui sont connus depuis de nombreux siècles. L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, et qui contient tous les ensembles cités précedemment a une histoire plus récente puisque sa construction rigoureuse date du 19^{me}. Nous ne verrons pas de construction de cet ensemble, qui se fair par exemple avec l'idée intuitive d'Augustin Cauchy (1789-1857) en "comblant les trous" qui se trouvent dans $\mathbb{Q}$ à l'aide de suites.

2 Fonctions d'une variable réelle

DÉFINITION 1 (Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles)
Une fonction f d'une variable réelle à valeurs réelles associe à tout élément x d'un certain ensemble $D \subset \mathbb{R}$ un unique nombre réel que l'on note $f(x)$.

- *L'ensemble D des x pour lesquels $f(x)$ est défini se nomme **l'ensemble de définition de** f. On note alors :*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad ou \quad \begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad ou \quad f : x \in D \mapsto f(x) \in \mathbb{R}.$$

- *Soit $y \in \mathbb{R}$. S'il existe $x \in D$ tel que $y = f(x)$ on dit que y est **l'image** de f par x. Et x est un **antécédent** de y par f.*
- *Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On définit le **graphe** de f, ou encore la **courbe représentative** de la fonction f, noté $\mathcal{G}_f$, par l'ensemble*

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Vous connaissez un grand nombre de fonctions. En voici quelques exemples classiques :

EXEMPLE 2 —

- *La fonction inverse* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$.
- *La fonction racine carrée* $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.
- *La fonction cosinus* $\cos : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x) \in \mathbb{R}$. *(voir Chapitre Trigonométrie)*
- *Les fonctions polynomiales. Une fonction P est polynomiale s'il existe $n \geq 0$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \end{array}.$$

MÉTHODE 3
Quand on a une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ donnée et $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de $f(x) = \lambda$ (antécédents de λ par f) ou $f(x) \leq \lambda$ de la manière suivante :
On note $\mathcal{G}_f$ la courbe représentative de f. La droite d'équation $y = \lambda$ est notée $\mathcal{H}_\lambda$.

1. *Pour résoudre l'équation $f(x) = \lambda$ on détermine l'intersection $\mathcal{A} = \mathcal{G}_f \cap \mathcal{H}_\lambda$.*
   L'ensemble des abscisses des points de $\mathcal{A}$ est alors exactement l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$.
2. *Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq \lambda$ on peut considère l'ensemble des points de coordonnées $(x, 0)$ sur l'axe des abscisses tels que le point sur la courbe représentative de coordonnée $(x, f(x))$ se situe en dessous de la droite $\mathcal{H}_\lambda$.*

Exercice 1 — *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{x+\alpha}{1+\alpha x}$.

2.1 Domaine d'étude

Pour étudier une fonction f, il est souvent pratique de restreindre son domaine d'étude. En mathématiques il y a diverses situations où l'on étudie une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ sur un sous-ensemble $X \subset D$, et que cette étude donne le comportement de f sur tout son ensemble de définition D.

2.2 Symétries

Proposition 4
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- *La fonction $u_a : x \mapsto f(x) + a$ est définie sur D, et son graphe s'obtient à partir de $\mathcal{G}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$ (vecteur $(0, a)$).*
- *La fonction $v_a : x \mapsto f(x + a)$ est définie sur $D_a = \{x - a \mid x \in D\}$, et son graphe s'obtient à partir de $\mathcal{G}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$ (vecteur $(-a, 0)$) .*
- *La fonction $u_a : x \mapsto f(a - x)$ est définie sur $D_a = \{a - x \mid x \in D\}$, et son graphe s'obtient à partir de $\mathcal{G}_f$ avec la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.*
- *La fonction $u_a : x \mapsto a - f(x)$ est définie sur D, et son graphe se déduit de $\mathcal{G}_f$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{a}{2}$.*

Démonstration —*Admise.*

Exemple 5 —

- *Le graphe de la fonction $f : x \mapsto (4 - x)^2$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ avec la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 2$*
- *Le graphe de $g : x \mapsto x^2 + 4$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ avec la translation de vecteur $4\vec{j}$ (vecteur $(0, 4)$).*
- *Le graphe de $h : x \mapsto (x+4)^2$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ avec la translation de vecteur $-4\vec{i}$ (vecteur $(4, 0)$).*
- *Le graphe de $k : x \mapsto 4 - x^2$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ avec la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 2$.*

Dessin sur feuille.

Définition 6 (**Fonction paire/impaire**)
Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble symétrique par rapport à 0, et soit $f : D \mapsto \mathbb{R}$.

- *On dit que f est **paire** si l'on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D$.*
  Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe Ox (la droite d'équation $x = 0$).
- *On dit que f est **impaire** si l'on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D$.*
  Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine du repère (symétrie par rapport à $(0, 0)$).

Exemple 7 —

— *La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire.*
— *La fonction carrée est paire.*
— *La fonction $\cos$ est paire, la fonction $\sin$ est impaire. La fonction $\tan$ est impaire.*

Exercice 2 — *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ est paire.*

Définition 8 (**Fonction périodique**)
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $T \in]0, +\infty[$.
— *On dit que le réel T est une **période** de f si :*
  — *pour tout $x \in D$ on a $x + T \in D$ et $x - T \in D$.*
  — *pour tout $x \in D$ on a $f(x + T) = f(x)$.*
— *On dit que f est **périodique** s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que f soit une période de f. On dit alors que f est **T-périodique** (périodique, de période T).*

Remarque 9 — *Si T est une période d'une fonction f elle n'est pas unique.
En effet tout multiple entier de T ($k.T$, pour $k \in \mathbb{N}^*$) est une période de f.
Mais, si f est périodique, on regardera toujours sa plus petite période. C'est celle-là qui est intéressante.*

Exemple 10 — *Les fonction sinus et cosinus sont périodiques toutes deux de période $T = 2\pi$. Ces fonctions sont aussi périodiques de période 4π,6π,..., mais 2π est le plus petit réel pour lequel ces fonctions sont périodiques.*

Exercice 3 — *Traduire uniquement en écriture mathématique l'assertion "f est périodique".*

Méthode 11
Pour tracer le graphe d'une fonction f périodique de période T, on trace le graphe de f sur un segment I de longueur T ($[0, T[$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ par exemple), puis on translate le graphe $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ par un multiple entier du vecteur $T.\vec{i}$ ($kT\vec{i}$, pour $k \in \mathbb{Z}$, càd $(kT, 0)$).

Exercice 4 — *Tracer le graphe de la fonction f périodique de période $T = 2$ telle que pour tout $x \in [0; 2[$, on a $f(x) = x^2 + 1$.*

2.3 Opérations sur les fonctions

Les 4 opérations de base $+, -, \times,$ sur les nombres réels s'appliquent au fonctions à valeurs réelles.
On définira aussi une opération supplémentaire qui est propre aux fonctions : la composition de deux fonctions.

Définition 12 (**Opérations arithmétiques sur les fonctions**)
Soient $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ deux ensembles, et $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On définit alors les fonctions :

- *La **somme** $f + g$ est définie par* $\begin{array}{rccl} f+g: & D_1 \cap D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$
- *La **différence** $f - g$ est définie par* $\begin{array}{rccl} f-g: & D_1 \cap D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)-g(x) \end{array}$
- *Le **produit** $f \times g$ est défini par* $\begin{array}{rccl} f \times g: & D_1 \cap D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \times g(x) \end{array}$.
- *Le **quotient** $\frac{f}{g}$ est défini par* $\begin{array}{rccl} \dfrac{f}{g}: & (D_1 \cap D_2) \setminus \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$, *où $\mathcal{S} = \{x \in D_2$ t.q. $g(x) = 0\}$.*

Remarque 13 — *Pour ces 4 opérations, il est possible que la fonction obtenue puisse être*

définie sur un emsemble plus grand que $D_1 \cap D_2$, à cause de simplifications.
Par exemple $x \mapsto (x - \frac{1}{x}) + (\frac{1}{x})$ (pour $f+g$), $x \mapsto x^2 \times \frac{1}{x}$ (pour $f \times g$), $x \mapsto \frac{x}{x}$ (pour $\frac{f}{g}$).

EXEMPLE 14 — *Soient $f : x \mapsto 1 + x$ et $g : x \mapsto 1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.*
Les somme, différence, produit et quotient de f et g sont :

- $f + g : x \mapsto 2 + x - x^2$ *définie sur* $\mathbb{R}$
- $f - g : x \mapsto x^2 + x$ *définie sur* $\mathbb{R}$
- $f \times g : x \mapsto (1+x)^2(1-x)$ *définie sur* $\mathbb{R}$
- $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x^2}$ *définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ mais comme pour tout $x \in D$, $\dfrac{1+x}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x}$ on en déduit que la fonction quotient peut se prolonger sur $D' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et a pour expression $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.*

EXERCICE 5 — *Montrer que la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire. Qu'en est-il du produit et du quotient si ces deux fonctions sont bien définies ?*

Dans la première partie de ce chapitre nous avions défini la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$. Cette dernière s'étend à l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante.

DÉFINITION 15 (Relation d'ordre sur les fonctions à valeurs réelles)
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
*On dit que f **est inférieure à** g, noté $f \leq g$, si $f(x) \geq g(x)$, pour tout $x \in D$.*

EXEMPLE 16 — *Pour tout $x > 1$ on a $\dfrac{1}{x} < |x|$, donc la fonction inverse est strictement inférieure à la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur l'ensemble $D =]1; +\infty[$.*

DÉFINITION 17 (**Composition de fonctions**)
Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in D_1$ on a $g(x) \in D_2$.
*On définit alors la **fonction composée de** f **par** g, notée $f \circ g$, par :*

$$f \circ g : \begin{array}{ccc} D_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}.$$

EXEMPLE 18 — *Soient $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x^2$ définie sur R.*
La composée de f par g est la fonction $f \circ g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Risque d'erreur

Avant de se lancer dans le calcul de l'expression d'une composée il faut bien s'assurer que l'image de D_2 par g est incluse dans l'ensemble de définition de la fonction f.
Par exemple, la composée de $x \mapsto \sqrt{x}$ par la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ n'est pas définie car cette dernière prend des valeurs strictement négatives. Dans ce cas, on peut regarder la fonction sinus restreinte à un domaine de définition plus petit, comme $[0, \pi]$.

EXERCICE 6 — *En reprenant les notations de l'exemple précédent, déterminer l'ensemble de définition et l'expression de la composée $g \circ f$.*

2.4 Monotonie

DÉFINITION 19 (**Fonctions monotones**)
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- *f est **croissante** (respectivement strictement croissante) sur D si pour tout $x, y \in D$ tels que $x \leq y$ (respectivement $x < y$) on a $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$).*
- *f est **décroissante** (resp. strictement décroissante) sur D si pour tout $x, y \in D$ tels que $x \leq y$ (resp. $x < y$) on a $f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).*
- *f est **monotone** (resp. strictement monotone) si f est décroissante ou croissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

REMARQUE 20 — *La négation de la proposition "f n'est pas monotone" est :*
Il existe $x, y, z \in D$ tels que $x \leq y \leq z$, qui vérifient $(f(x) < f(y)$ et $f(y) > f(z))$ ou $(f(x) > f(y)$ et $f(y) < f(z))$.

EXERCICE 7 — *Soient f et g deux fonctions croissantes sur un ensemble D. Montrer que :*

1. *$f + g$ est croissante sur D.*
2. *$f \times g$ n'est pas nécessairement croissante. (Donner deux exemples)*

PROPOSITION 21
Soient $f : D_2 \to \mathbb{R}$ et $g : D_1 \to \mathbb{R}$ telle que la composée $f \circ g : D_1 \to \mathbb{R}$ soit bien définie.
Si f et g sont monotones (respectivement strictement monotones), alors la composée $f \circ g$ est monotone (respectivement strictement monotone).
Démonstration — *On prouve cela par disjonction de cas (selon si f et g sont croissantes ou décroissantes).*

EXEMPLE 22 — *Soient $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $g : x \mapsto x^3$ qui sont respectivement croissantes sur $[-1; +\infty[$ et $[0; +\infty[$.*
La composée $f \circ g$ est donc croissante sur $[0; +\infty[$, et s'écrit $f \circ g : x \mapsto \sqrt{1+x^3}$.

EXERCICE 8 — *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction monotone telle que $f(x) \neq 0$, pour tout $x \in D$.*

1. *Si $f > 0$ sur D montrer que $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur D.*
2. *Si $f < 0$ sur D montrer que $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur D est-ce que $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur D ?*
3. *Dans le cas général est-ce que $\dfrac{1}{f}$ est une fonction monotone ?*

On peut représenter simplement la croissance/décroissance d'une fonction f à l'aide d'un tableau de variations. Il s'agit d'un tableau représentant les intervalles où f est décroissante à l'aide d'une flèche descendante et les intervalles où f est croissante à l'aide d'une flèche ascendante. Comme dans l'exemple suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f(x) = (x-1)^2$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.5 Fonctions Majorées, minorées, bornées

Définition 23 (**Fonctions majorées, minorées, bornées**)
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :
— ***majorée*** *sur D s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$.*
— ***minorée*** *sur D s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $m \leq f(x)$.*
— ***bornée*** *sur D si elle est à la fois majorée et minorée sur D.*

Définition 24

— *Les fonctions de la forme $x \longmapsto ax + b$ où $a \neq 0$ ne sont pas majorées ou minorées sur $\mathbb{R}$.*
— *La fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$ est minorée par 0, mais non majorée.*
— *Les fonctions constantes $x \longmapsto k$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 9 — *Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 25 — *La fonction $f : D \to \mathbb{R}$ n'est pas majorée si et seulement si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x_M \in D$ tel que $f(x_M) > M$.*
On utilise beaucoup cette équivalence pour montrer qu'une fonction n'est pas majorée.

Exercice 10 — *Exprimer mathématiquement le fait que la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ n'est pas minorée.*
Montrer que la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^\star$.

Méthode 26
Pour reconnaître graphiquement une fonction majorée (resp. minorée) il faut et il suffit qu'il existe une droite horizontale $\mathcal{H}$ telle que la courbe représentative $\mathcal{G}_f$ se situe en-dessous (resp. au-dessus) de la droite $\mathcal{H}$.

Définition 27 (**Maximum/minimum d'une fonction**)
Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
- *f admet un **maximum** en $a \in D$ si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq f(a)$.*
- *f admet un **minimum** en $a \in D$ si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \geq f(a)$.*
- *f admet un **extremum** en $a \in D$ si le point a est un maximum ou un minimum.*

Risque d'erreur
Une fontion peut être majorée (respectivement minorée) sans admettre de maximum (respectivement minimum).
Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1-\frac{1}{x} \end{array}$ *est majorée mais n'admet pas de maximum.*

Pour déterminer si une fonction f est bornée, on utilise souvent la fonction $|f|$.

Proposition 28
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.
Démonstration — *On prouve cette équivalence avec une double-implication. Si $|f| \leq M$, alors $-M \leq f \leq M$. Si $m \leq f \leq M$, alors on a $|f| \leq \max(|m|, |M|)$.*

2.6 Bijections

A part les fonctions monotones, on utilise beaucoup en mathématiques des fonctions bijectives (ou bijections).

Définition 29 (**Bijection**)
Soient D, E des ensembles.
La fonction $f : D \to E$ est ***bijective*** *si pour tout $y \in E$ l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution dans D.*
Cela revient à dire que tout élément de E admet un antécédent par f dans D, et qu'il est unique.

Exemple 30 — *Soit*

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

Cette application est bijective. En effet :

1. *(existence d'un antécédent) soit $y \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.*
2. *(unicité de l'antécédent) Soient x et x' deux réels positifs tels que $f(x) = f(x')$, alors :*

$$x^2 = (x')^2 \Leftrightarrow x^2 - (x')^2 = 0 \Leftrightarrow (x - x') \times (x + x') = 0 \Rightarrow x = x'.$$

Proposition 31
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ une fonction, avec $J = f(I)$.
Si f est strictement monotone, alors f est bijective. **Démonstration** — *On vérifie la définition de fonction bijective.*

Exercice 11 — *Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 1 \in \mathbb{R}$ est bijective.*

Définition 32 (**Bijection réciproque**)
Soient D et E deux ensembles et $f : D \to E$ une fonction bijective.
Comme tout élément de E possède un antécédent par f, on peut définir une nouvelle fonction : la ***bijection réciproque*** de *f.*
On la note f^{-1}.
C'est la fonction $g : E \to D$, qui vérifie $g \circ f = Id_D$ ($\forall x \in D$, $g(f(x)) = x$) et $f \circ g = Id_E$ ($\forall y \in E$, $f(g(y)) = y$).

Exercice 12 — *Soit $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(x + 1) - 2 \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to]-1, +\infty[$ telle que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $(g \circ f)(x) = x$.*
2. *Est-ce que f est bijective ?*

On peut remarquer ici que le graphe de la fonction exponentielle est le symétrique du graphe de la fonction logarithme par rapport à la droite d'équation $y = x$.
C'est le cas en général pour le graphe d'une fonction bijective f et le graphe de f^{-1}.

Proposition 33
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une fonction bijective et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.
Alors le graphe $\mathcal{C}_f$ est le symétrique de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Démonstration —*Admise.*

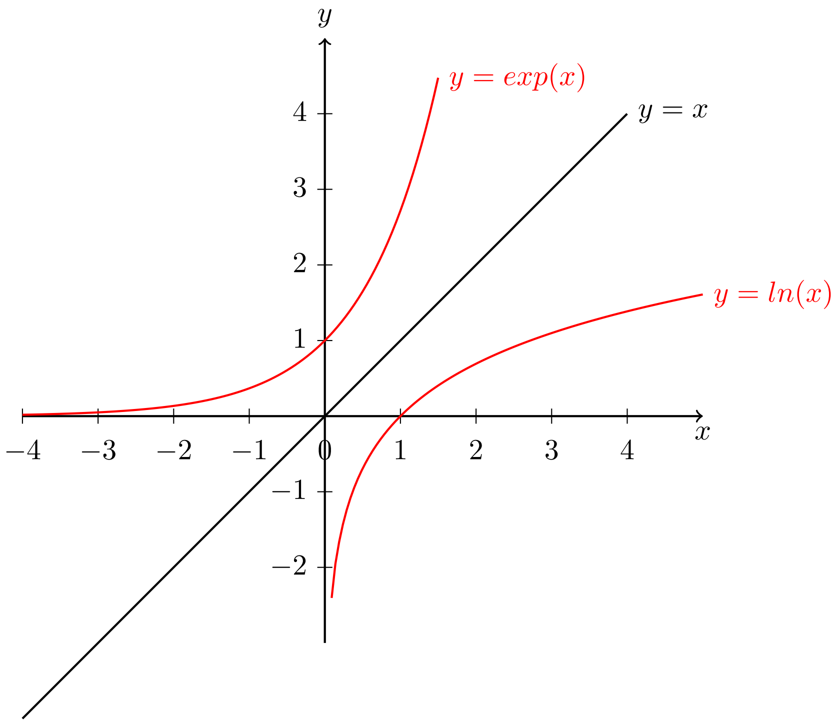


FIGURE 1 – Graphe de la fonction exponentielle et de sa réciproque, le logarithme

2.7 Dérivabilité

Une autre propriété utilisée extrêmement souvent dans l'étude de fonctions d'une variable réelle est la dérivabilité. Vous avez vu cela au lycée, nous le revoyons ici.
Avec la dérivabilité se trouvent la notion de continuité ainsi que celle de limite. Nous étudierons ces deux notions par la suite.
Dans cette section, I désignera un intervalle.

DÉFINITION 34 (**Taux d'accroissement**)
Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $a \in I$, $h \neq 0$ tels que $a + h \in I$.
On définit le ***taux d'accroissement de f en a d'amplitude h*** *comme le réel $\Delta_f(a, h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.*

EXEMPLE 35 — *Soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.*
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, son taux d'accroissement est

$$\Delta_f(a, h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{h^2 + 2ah}{h} = h + 2a$$

DÉFINITION 36 (**dérivabilité en un point**)
Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$.
On dit que f est ***dérivable en*** *a si le taux d'accroissement $h \mapsto \Delta_f(a, h)$ admet une limite en 0. C'est à dire si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.*
On note alors $f'(a)$ cette limite.
Le réel $f'(a)$ est appelé ***nombre dérivé*** *de f en a. C'est un nombre réel.*

EXEMPLE 37 — *La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ car $\lim\limits_{h \to 0} \Delta_f(a, h) =$*

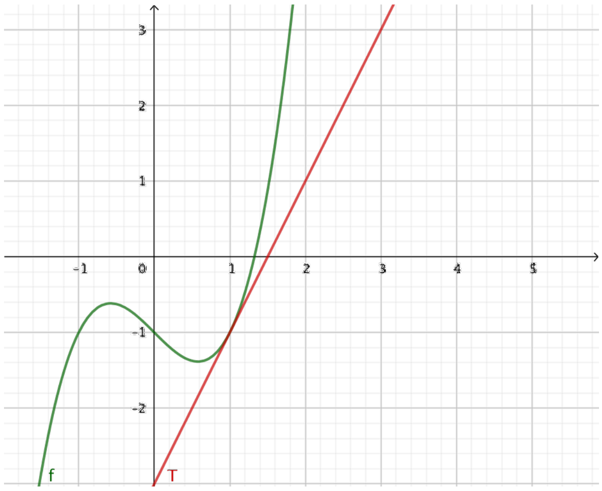


FIGURE 2 – courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente $T_1(f)$

$\lim\limits_{h \to 0} h + 2a = 2a$.
Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $f'(a) = 2a$.

MÉTHODE 38 (**Montrer qu'une application est dérivable en un point**)
Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en un point a, on suit en général les étapes suivantes :

1. *On écrit le taux d'accroissement $\Delta_f(a, h)$.*
2. *On simplifie au maximum son expression en essayant de simplifier la partie en "h" au dénominateur.*
3. *On fait tendre h vers 0, et on détermine la valeur de la limite.*
4. *Si la limite existe et est finie, alors f est dérivable en a.*
   La valeur obtenue est celle de $f'(a)$.

EXERCICE 13 — *Montrer que la fonction $g : x \mapsto x^3 - x - 1$ est dérivable en $a = 1$ et calculer $g'(1)$.*

DÉFINITION 39
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en un point $a \in I$, notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors, la **tangente à $\mathcal{C}_f$ en** $(a, f(a))$ est la droite d'équation cartésienne $y = f(a) + f'(a) \times (x - a)$.*

EXEMPLE 40 — *Soit $f : x \mapsto x^3 - x - 1$. On a $f(1) = -1$ et f dérivable en 1 de dérivée $f'(1) = 2$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en $(1, -1)$ d'équation $y = 2x - 3$.*

EXERCICE 14 — *Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$ de l'application $f : x \mapsto (x + 1)^2 + 1$.*
Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ainsi que $T_0(f)$.

DÉFINITION 41 (**Dérivabilité**)
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
*On dit que f est **dérivable sur I** si, pour tout $a \in I$ l'application f est dérivable en a.*
*La fonction qui à $x \in I$ associe le nombre $f'(x)$ est appelée **la dérivée de f** et est notée f'.*
Une dérivée est une fonction.

Remarque 42 — *Quand il n'y a pas d'ambigüité sur l'ensemble de définition de f' (sur l'ensemble des points où f est dérivable), on pourra dire que f est dérivable sans faire référence à son ensemble de départ.*

Exemple 43 — *La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable et, pour tout $a \in \mathbb{R}$, de dérivée $f'(a) = 2a$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons déjà vu que $\lim\limits_{h\to 0} \Delta(a, h) = 2a$.*

2.8 Opérations sur les dérivées usuelles

Certaines opérations sur des fonctions dérivables donnent des fonctions qui restent dérivables (même chose pour les fonctions continues, que l'on verra par la suite). On a le théorème suivant :

Théorème 44 (**Dérivabilité et opérations algébriques**)
Soient I un intervalle et f, g deux fonctions dérivables sur I.
Alors :

1. $f + g$ *est dérivable sur* I, *et* $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $f \times g$ *est dérivable sur* I, *et* $(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$
3. $\dfrac{f}{g}$ *est dérivable sur* I *(si* g *ne s'annule pas), et* $(\dfrac{f}{g})'(x) = \dfrac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{(g(x))^2}$.

Exercice 15 — *Soient $f : x \mapsto (x + 2)e^{x^2}$ et $g : x \mapsto |x - 2| + \ln(x)$.*

1. *Déterminer les ensembles de définition de* f *et* g.
2. *Calculer les dérivées de* f *et* g.
3. *En déduire l'expression des dérivées de* $f + g$, $f \times g$ *et* $\dfrac{f}{g}$ *sur les intervalles où ces fonctions sont dérivables.*

2.9 Dérivée d'une composée de fonctions

Théorème 45 (**Dérivabilité et composition**)
Soient I, J deux intervalles et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.
Alors la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable. Et, pour tout $x \in I$, on a

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Exemple 46 — *Soient $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto e^x + \ln(x)$ dérivables toutes deux sur $]0, +\infty[$.*

Remarquons que f est à valeurs strictement positives donc $g \circ f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On a pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 2x \times (e^{1+x^2} + \frac{1}{1 + x^2})$$

Soient f et g deux fonctions à valeurs strictement positives. Ave le théorème sur la dérivation de fonctions composées, et de la définition de la fonction puissance ($f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(x)}$), on peut montrer que la fonction f^g est dérivable.

Corollaire 47
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs strictement positives. Alors $x \mapsto f(x)^{g(x)}$ est dérivable sur I.

MÉTHODE 48
Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables. Pour calculer la dérivée de $g \circ f$ en $x \in I$:

1. *on calcule d'abord les dérivées f' et g'.*
2. *on calcule $g'(f(x))$.*
3. *on réalise le produit $f'(x) \times g'(f(x))$ qui est la dérivée $(g \circ f)'(x)$.*

EXERCICE 16 — *Calculer la dérivée de $x \mapsto 3^{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$.*

3 Dérivée de fonctions réciproques

THÉORÈME 49 (**Dérivabilité et bijection réciproque**)
Soient I, J deux intervalles, et $f : I \to J$ une application bijective dérivable telle que, pour tout $x \in I$, on ait $f'(x) \neq 0$.
Alors, la fonction $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur J. Pour tout $x \in J$, on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Démonstration — *On a $f \circ f^{-1}(x) = x$. En dérivant, cela donne $(f \circ f^{-1})' = 1$. On obtient alors le résultat.*

EXEMPLE 50 — *Soit $f : x \mapsto x^3 + 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est bijective et déterminons $(f^{-1})'(1)$*

1. *La fonction f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2+2 > 0$ donc f est strictement monotone. De plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.*
2. *Déterminons $f^{-1}(1)$. On a*
$$\begin{array}{rl} & f(x) = 1 \\ \Leftrightarrow & x^3 + 2x + 1 = 1 \\ \Leftrightarrow & x^3 + 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & x \times (x^2 + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \end{array} \quad \textit{ainsi } f^{-1}(1) = 0.$$
3. *Par application de la formule de dérivée d'une fonction réciproque, on en déduit que $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \dfrac{1}{3 \times 0^2 + 2} = \dfrac{1}{2}$.*

EXERCICE 17 — *Montrer à partir de la formule de dérivation des fonctions réciproques que que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est donnée pour tout $x > 0$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.*

3.1 Lien entre dérivée et monotonie

THÉORÈME 51
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.

1. *Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) = 0$, alors f est constante.*
2. *Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.*
3. *Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.*

Démonstration —*Admise. (Voir chapitre Dérivabilité)*

On peut donner une version plus fine du théorème précédent.

THÉORÈME 52
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) et telle que f' ne s'annule que sur un nombre fini de points.
Alors f est strictement croissante (décroissante) sur I.
Démonstration —*Admis.*

EXEMPLE 53 — *La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. Elle ne s'annule qu'en $x = 0$ donc d'après le théorème précédent on obtient que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

4 Asymptotes

Nous définissons ici les asymptotes à la courbe représentative d'une fonction en un point. Il s'agit d'une droite permettant de visualiser la limite d'une fonction en l'infini lorsqu'elle existe et que la fonction est suffisamment régulière.

4.1 Asymptotes verticales

DÉFINITION 54
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to a^+ (ou\ a^-)} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est une ***asymptote verticale*** *à la courbe de f.* ***Dessin (propre) sur feuille***

EXEMPLE 55 — *La fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.*

4.2 Asymptotes horizontales

DÉFINITION 56
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty (ou\ -\infty)} f(x) = a$, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une ***asymptote horizontale*** *à la courbe de f.*

EXEMPLE 57 — *La fonction inverse admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

Dessin sur feuille

4.3 Asymptotes obliques

DÉFINITION 58
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné. Soit (d) une droite d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. On dit que la droite (d) est une ***asymptote oblique*** *à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Dessin sur feuille

EXEMPLE 59 — *La courbe représentative associée à l'application* $\begin{array}{rccl} f: &]2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2-2x+2}{x-2} \end{array}$ *admet une asymptote oblique en* $+\infty$ *d'équation* $y = x - 2$.

EXERCICE 18 — *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. *Montrer que la droite d'équation* $y = x$ *est asymptote oblique à la courbe de* f *au voisinage de* $+\infty$ *(et de* $-\infty$ *aussi).*

5 Etude d'une fonction

On détaille dans cette section le plan d'étude d'une fonction f *de la variable réelle à valeurs réelles.*

On commence par tenter de restreindre le domaine de d'étude de la fonction f *en suivant ces étapes.*

MÉTHODE 60 (**Restriction du domaine d'étude**)

1. *Si l'ensemble de définition* D *de* f *n'est pas donné on commence par le déterminer une fois connue l'expression* $f(x)$.
2. *si* f *est périodique de période* T, *c'est-à-dire qu'il existe* $a \in D$ *et* $T \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(a) = f(a+T)$ *on peut restreindre l'étude de* f *à l'ensemble* $D \cap [a, a+T]$ *(pour* T *éventuellement le plus petit possible)*
3. *s'il existe* $a \in D$ *tel que pour tout* $x \in D$, $f(b-x) = f(x)$ *alors par symétrie il suffit d'étudier la fonction* f *sur* $D \cap [\dfrac{b}{2}, +\infty[$

On détermine ensuite les variations de f.

MÉTHODE 61 (**Tableau de variations de** f)

1. *si la fonction possede des variations évidentes (règles de monotonie des fonctions usuelles, propriété sur les fonctions monotones, etc..) on peut directement indiquer à l'aide de flèches les variations de* f
2. *la plupart du temps, il est recommandé de dériver la fonction* f *en justifiant soigneusement qu'elle est dérivable puis en déterminant son signe.*
3. *on complète le tableau de variations avec les valeurs prises par cette dernière aux endroits où un changement de variations à lieu ou bien les limites aux bornes du domaine de définition.*

MÉTHODE 62 (**Représentation graphique**)

- *On se sert du tableau de variations pour déterminer l'allure de la courbe ainsi que les extrema.*
- *Lorsqu'on se donne une fonction, on commencera toujours par déterminer ses limites aux bornes de l'intervalle de définition :*
  - *Si* f *est définie sur* $\mathbb{R}$, *on déterminera* $\lim\limits_{x \to +\infty} f$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} f$.
  - *Si* f *est définie sur* $]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$, *il faut déterminer* 4 *limites : en* $+\infty$, $-\infty$, a^+ *et* a^-.
- *On notera directement les asymptotes horizontales (limite finie en* $+\infty$ *ou* $-\infty$*) et les asymptotes verticales (limite infinie en* a^+ *ou* a^-*) sinon on détermine si* $\mathcal{G}_f$ *admet une asymptote oblique.*

6 Fonctions circulaires réciproques

Avec les fonctions bijectives, les fonctions réciproques sont très utilisées tant en analyse que dans d'autres domaines des sciences.
Nous définissons fonctions réciproques des fonctions trigonométriques classiques (sur certains intervalles). Vous retrouverez par exemple la fonction Arctan qui apparait dans le calcul d'intégrales.

6.1 Fonction Arc sinus

PROPOSITION 63
La fonction sinus restreinte à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est strictement croissante et a pour image $[-1, 1]$.
La fonction $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$ est donc une bijection.

D'après les résultats sur les bijections, on en déduit l'existence d'une bijection réciproque :

DÉFINITION 64 (**Fonction Arcsin**)
La bijection réciproque de la fonction $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$ est appelée ***fonction Arcsinus****.*
On la note Arcsin. Elle est définie comme suit :

$$\begin{array}{rccl} Arcsin: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & l'unique\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\ tel\ que\ \sin(y) = x \end{array}$$

EXEMPLE 65 — *Voici quelques valeurs importantes prises par la fonction Arcsin :*

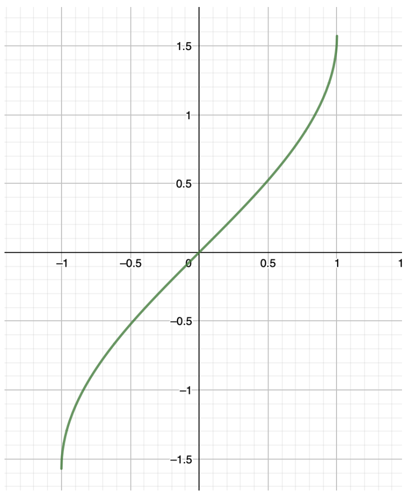
- $Arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$
- $Arcsin(0) = 0$
- $Arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$
- $Arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$

EXERCICE 19 — *Soit $x \in [-1; 1]$. Exprimer $\cos(Arcsin(x))$ seulement en fonction de x.*

PROPOSITION 66
La fonction Arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$. Sa dérivée est :

$$Arcsin' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Démonstration — *On utilise les propriétés des bijections réciproques.*



Graphe de la fonction Arcsinus

6.2 Fonction Arc cosinus

Proposition 67
La fonction cosinus restreinte à $[0, \pi]$ est strictement décroissante et a pour image $[-1, 1]$. Donc, la fonction $x \in [0, \pi] \mapsto \cos(x) \in [-1, 1]$ est une bijection.

Cela induit la définition suivante :

Définition 68 (**Fonction Arccos**)
*La bijection réciproque de $x \in [0, \pi] \mapsto \cos(x) \in [-1, 1]$ est appelée **fonction Arccosinus**. On la note Arccos. Elle est définie comme :*

$$\begin{array}{rccl} Arccos: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longmapsto & \textit{l'unique } y \in [0,\pi] \textit{ tel que } \cos(y) = x \end{array}$$

Exemple 69 — *Voici quelques valeurs remarquables prises par la fonction Arccos :*

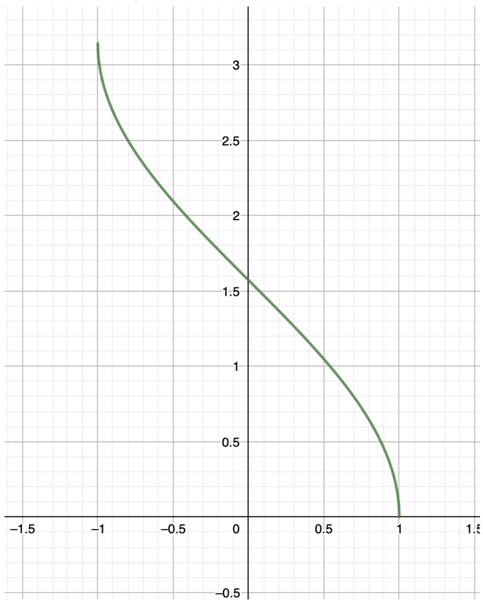
- $Arccos(1) = 0$
- $Arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$
- $Arccos(-1) = \pi$
- $Arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 20 — *Soit $x \in [-1; 1]$. Exprimer $\sin(Arccos(x))$ seulement en fonction de x.*

Proposition 70
La fonction Arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$ et est dérivable sur $]-1, 1[$. Sa dérivée est :

$$Arcos' : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration — *On utilise les propriétés des bijections réciproques et de $\cos, \sin$.*



Graphe de la fonction Arccosinus

6.3 Fonction Arctangente

Proposition 71
La restriction de fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est strictement croissante et a pour image $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$ est bijective.

Cela induit :

Définition 72 (Fonction Arctan)
La bijection réciproque de $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$ *est appelée* ***fonction Arctangente****.*
On la note Arctan. Elle est définie comme :

$$\begin{array}{rccl} Arctan: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \tan(y) = x \end{array}$$

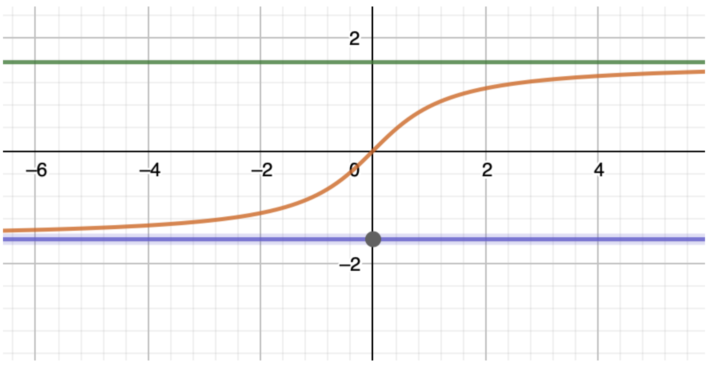
Exemple 73 — *Voici quelques limites et valeurs remarquables prises par la fonction Arctan :*

- $Arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$
- $Arctan(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} Arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} Arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

Proposition 74
La fonction Arctan est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$*, et dérivable.*
Sa dérivée est :

$$Arctan' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration — *On utilise les propriétés des bijections réciproques.*



Graphe de la fonction Arctangente

Remarque 75 — *En analyse, on a parfois besoin d'utiliser des primitives de* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et de* $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$*. Ces primitives s'expriment seulement avec* $\arcsin, \arccos, \arctan$*.*
Ainsi, les dérivées de ces 3 fonctions sont à connaître.

Exercice 21 — *Simplifier les nombres suivants :*

- $Arctan(tan(\frac{3\pi}{4}))$
- $Arctan(tan(\frac{5\pi}{4}))$
- $Arctan(tan(\frac{7\pi}{4}))$

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

— *Savoir déterminer le domaine de définition D d'une fonction f.*
— *Connaître les fonctions usuelles* $\cos, \sin, \exp, \ln, x \mapsto x^a, \tan$ *: domaine de définition, courbe, croissance/décroissance, limites aux bords du domaine, propriétés spécifiques.*
— *Savoir montrer qu'une fonction est paire, impaire, périodique, croissante, décroissante.*
— *Connaître les formules de dérivation : dérivées des fonctions usuelles, somme, produit, quotient, composée* $((u+v)', (uv)', (\frac{1}{v})', (\frac{u}{v})', (u \circ v)')$.
— *Fonctions bijectives, bijection réciproque* f^{-1}*. Définition avec* $f(x) = y$*. Savoir montrer que* $f : I \to J$ *est bijective. Une fonction strictement monotone est bijective. Dérivée de* f^{-1}.
— *Savoir faire une étude de fonctions :domaine de définition, propriétés, dérivée, signe de la dérivée, variations, limites, tracé de la courbe.*
— *Fonction* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$*, bijection réciproque* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
Valeurs particulières, allure de la courbe, dérivée $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
— *Fonction* $\sin : [\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}] \to [-1, 1]$*, bijection réciproque* $\arcsin : [-1, 1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Valeurs particulières, allure de la courbe, dérivée $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
— *Fonction* $\tan :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$*, bijection réciproque* $\arctan : \mathbb{R} \to]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Valeurs particulières, allure de la courbe, dérivée $\arccos'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.