Chapitre 3
Fonctions d'une variable réelle

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Fonctions d'une variable réelle **1**
2.1 Domaine d'étude 2
2.2 Symétries 2
2.3 Opérations sur les fonctions 3
2.4 Monotonie 5
2.5 Fonctions majorées, minorées, bornées 6
2.6 Injections, surjections, bijections 7
2.7 Image réciproque 8
2.8 Simplification d'égalités et d'inégalités 9
2.9 Dérivabilité 9
2.10 Opérations sur les dérivées usuelles 11
2.11 Dérivée d'une composée de fonctions 11

3 Dérivée de fonctions réciproques **12**
3.1 Lien entre dérivée et monotonie 13

4 Fonctions usuelles **13**
4.1 Fonctions polynomiales, fonctions puissances 13
4.2 Fonction logarithme 15
4.3 Fonction exponentielle 15
4.4 Fonctions trigonométriques 15

5 Asymptotes **16**
5.1 Asymptotes verticales 16
5.2 Asymptotes horizontales 17
5.3 Asymptotes obliques 17

6 Etude d'une fonction **17**

7 Fonctions trigonométriques réciproques **18**
7.1 Fonction Arc sinus 18
7.2 Fonction Arc cosinus 19
7.3 Fonction Arctangente 20

8 Fonctions additionnelles **21**
8.1 Fonctions hyperboliques 21
8.2 Fonction partie entière 22

Vidal AGNIEL

1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude des fonctions réelles d'une la variable réelle. Il s'agit de revoir les outils que vous avez développés au lycée, et d'en développer certains.
Vous utiliser depuis longtemps des ensembles de nombres classiques comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ qui sont connus depuis de nombreux siècles. L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, et qui contient tous les ensembles cités précedemment a une histoire plus récente puisque sa construction rigoureuse date du 19ème siècle. Nous ne verrons pas de construction de cet ensemble, qui se fair par exemple avec l'idée intuitive d'Augustin Cauchy (1789-1857) en "comblant les trous" qui se trouvent dans $\mathbb{Q}$ à l'aide de suites.

2 Fonctions d'une variable réelle

Définition 1 (**Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles**)
Une fonction f d'une variable réelle à valeurs réelles associe à tout élément x d'un certain ensemble $D \subset \mathbb{R}$ un unique nombre réel que l'on note $f(x)$.

- *L'ensemble D des x pour lesquels $f(x)$ est défini se nomme **l'ensemble de définition de** f. On note alors :*

$$f : D \to \mathbb{R} \quad ou \quad \begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad ou \quad f : x \in D \mapsto f(x) \in \mathbb{R}.$$

- *Soit $y \in \mathbb{R}$. S'il existe $x \in D$ tel que $y = f(x)$ on dit que y est **l'image** de f par x.*
  *Et x est un **antécédent** de y par f.*
  *On appelle **l'ensemble image** de f sur D par $Im(f) = f(D) = \{y \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \exists x \in D \text{ t.q. } y = f(x)\}$.*
- *Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On définit le **graphe** de f, ou encore la **courbe représentative** de la fonction f, noté $\mathcal{G}_f$, par l'ensemble*

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Vous connaissez un grand nombre de fonctions. En voici quelques exemples classiques :

Exemple 2 —

- *La fonction inverse* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$.
- *La fonction racine carrée* $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.
- *La fonction cosinus* $\cos : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x) \in \mathbb{R}$. *(voir Chapitre Trigonométrie)*
- *Les fonctions polynomiales. Une fonction P est polynomiale s'il existe $n \geq 0$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \end{array}.$$

Méthode 3
Quand on a une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ donnée et $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de $f(x) = \lambda$ (antécédents de λ par f) ou $f(x) \leq \lambda$ de la manière suivante :
On note $\mathcal{G}_f$ la courbe représentative de f. La droite d'équation $y = \lambda$ est notée $\mathcal{H}_\lambda$.

1. *Pour résoudre l'équation $f(x) = \lambda$ on détermine l'intersection $\mathcal{A} = \mathcal{G}_f \cap \mathcal{H}_\lambda$.*
   L'ensemble des abscisses des points de $\mathcal{A}$ est alors exactement l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$.
2. *Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq \lambda$ on peut considère l'ensemble des points de coordonnées $(x, 0)$ sur l'axe des abscisses tels que le point sur la courbe représentative de coordonnée $(x, f(x))$ se situe en dessous de la droite $\mathcal{H}_\lambda$.*

Exercice 1 — *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{x+\alpha}{1+\alpha x}$.

Remarque 4 — *L'ensemble image de f, $f(D)$ est défini avec un quantificateur $\exists$. Pour déterminer cet ensemble, il faut ainsi prouver* ***une existence*** *(déterminer tous les $y \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $x \in D$ tels que $y = f(x)$). Cela donne lieu à un raisonnement par analyse-synthèse (déterminer les potentiels éléments de $f(D)$, puis vérifier que les éléments trouvés ont bien un antécédent par f). Des résultats comme le TVI et l'étude de fonctions fournissent facilement la forme de $f(D)$ et l'existence d'un antécédent pour un y choisi.*

Définition 5 (**Ensembles de fonctions**)
Pour E et F des ensembles, on note $\mathcal{F}(E,F)$ (ou F^E) l'ensemble de toutes les fontions f définies sur E et à valeurs dans F.
Pour $D \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ est un ensemble de fonctions réelles d'une variable réelle.

2.1 Domaine d'étude

Pour étudier une fonction f, il est souvent pratique de restreindre son domaine d'étude. En mathématiques il y a diverses situations où l'on étudie une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ sur un sous-ensemble $X \subset D$, et que cette étude donne le comportement de f sur tout son ensemble de définition D.

2.2 Symétries

Proposition 6
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- *La fonction $u_a : x \mapsto f(x) + a$ est définie sur D, et son graphe s'obtient à partir de $\mathcal{G}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$ (vecteur $(0,a)$).*
- *La fonction $v_a : x \mapsto f(x+a)$ est définie sur $D_a = \{x - a \mid x \in D\}$, et son graphe s'obtient à partir de $\mathcal{G}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$ (vecteur $(-a,0)$) .*
- *La fonction $u_a : x \mapsto f(a-x)$ est définie sur $D_a = \{a - x \mid x \in D\}$, et son graphe s'obtient à partir de $\mathcal{G}_f$ avec la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.*
- *La fonction $u_a : x \mapsto a - f(x)$ est définie sur D, et son graphe se déduit de $\mathcal{G}_f$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{a}{2}$.*

Démonstration —*Admise.*

Exemple 7 —

- *Le graphe de la fonction $f : x \mapsto (4-x)^2$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ avec la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 2$*
- *Le graphe de $g : x \mapsto x^2 + 4$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ avec la translation de vecteur $4\vec{j}$ (vecteur $(0,4)$).*
- *Le graphe de $h : x \mapsto (x+4)^2$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ avec la translation de vecteur $-4\vec{i}$ (vecteur $(4,0)$).*
- *Le graphe de $k : x \mapsto 4 - x^2$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ avec la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 2$.*

Dessin sur feuille.

Définition 8 (**Fonction paire/impaire**)
Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble symétrique par rapport à 0, et soit $f : D \mapsto \mathbb{R}$.

- *On dit que f est* ***paire*** *si l'on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D$.*
  Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe Ox (la droite d'équation $x = 0$).

- *On dit que f est **impaire** si l'on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D$.*
  Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine du repère (symétrie par rapport à $(0,0)$).

Exemple 9 —
- *La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est impaire.*
- *La fonction carrée est paire.*
- *La fonction* cos *est paire, la fonction* sin *est impaire. La fonction* tan *est impaire.*

Exercice 2 — *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est paire.*

Définition 10 (**Fonction périodique**)
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $T \in]0, +\infty[$.
- *On dit que le réel T est une **période** de f si :*
  - *pour tout $x \in D$ on a $x + T \in D$ et $x - T \in D$.*
  - *pour tout $x \in D$ on a $f(x+T) = f(x)$.*
- *On dit que f est **périodique** s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que f soit une période de f.*
  *On dit alors que f est **T-périodique** (périodique, de période T).*

Remarque 11 — *Si T est une période d'une fonction f elle n'est pas unique.*
En effet tout multiple entier de T ($k.T$, pour $k \in \mathbb{N}^*$) est une période de f.
Mais, si f est périodique, on regardera toujours sa plus petite période. C'est celle-là qui est intéressante.

Exemple 12 — *Les fonction sinus et cosinus sont périodiques toutes deux de période $T = 2\pi$.*
Ces fonctions sont aussi périodiques de période 4π,6π,..., mais 2π est le plus petit réel pour lequel ces fonctions sont périodiques.

Exercice 3 — *Traduire uniquement en écriture mathématique l'assertion "f est périodique".*

Méthode 13
Pour tracer le graphe d'une fonction f périodique de période T, on trace le graphe de f sur un segment I de longueur T ($[0, T[$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ par exemple), puis on translate le graphe $\{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ par un multiple entier du vecteur $T.\vec{i}$ ($kT\vec{i}$, pour $k \in \mathbb{Z}$, càd $(kT, 0)$).

Exercice 4 — *Tracer le graphe de la fonction f périodique de période $T = 2$ telle que pour tout $x \in [0; 2[$, on a $f(x) = x^2 + 1$.*

2.3 Opérations sur les fonctions

Les 4 opérations de base $+, -, \times,$ sur les nombres réels s'appliquent au fonctions à valeurs réelles.
On définira aussi une opération supplémentaire qui est propre aux fonctions : la composition de deux fonctions.

Définition 14 (**Opérations arithmétiques sur les fonctions**)
Soient $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ deux ensembles, et $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On définit alors les fonctions :
- *La **somme** $f + g$ est définie par* $\begin{array}{rccc} f+g: & D_1 \cap D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array}$
- *La **différence** $f - g$ est définie par* $\begin{array}{rccc} f-g: & D_1 \cap D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) - g(x) \end{array}$

- *Le **produit** $f \times g$ est défini par* $\begin{array}{rccl} f \times g : & D_1 \cap D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \times g(x) \end{array}$.

- *Le **quotient** $\frac{f}{g}$ est défini par* $\begin{array}{rccl} \dfrac{f}{g} : & (D_1 \cap D_2) \setminus \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$, *où* $\mathcal{S} = \{x \in D_2 \text{ t.q. } g(x) = 0\}$.

Remarque 15 — *Pour ces 4 opérations, il est possible que la fonction obtenue puisse être définie sur un emsemble plus grand que $D_1 \cap D_2$, à cause de simplifications.*
Par exemple $x \mapsto (x - \frac{1}{x}) + (\frac{1}{x})$ (pour $f + g$), $x \mapsto x^2 \times \frac{1}{x}$ (pour $f \times g$), $x \mapsto \frac{x}{x}$ (pour $\frac{f}{g}$).

Exemple 16 — *Soient $f : x \mapsto 1 + x$ et $g : x \mapsto 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.*
Les somme, différence, produit et quotient de f et g sont :
- $f + g : x \mapsto 2 + x - x^2$ *définie sur* $\mathbb{R}$
- $f - g : x \mapsto x^2 + x$ *définie sur* $\mathbb{R}$
- $f \times g : x \mapsto (1 + x)^2(1 - x)$ *définie sur* $\mathbb{R}$
- $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x^2}$ *définie sur* $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ *mais comme pour tout* $x \in D$, $\dfrac{1+x}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x}$ *on en déduit que la fonction quotient peut se prolonger sur* $D' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *et a pour expression* $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Exercice 5 — *Montrer que la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire. Qu'en est-il du produit et du quotient si ces deux fonctions sont bien définies ?*

Dans la première partie de ce chapitre nous avions défini la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$. Cette dernière s'étend à l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante.

Définition 17 (Relation d'ordre sur les fonctions à valeurs réelles)
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
*On dit que f **est inférieure à** g, noté $f \leq g$, si $f(x) \geq g(x)$, pour tout $x \in D$.*

Exemple 18 — *Pour tout $x > 1$ on a $\dfrac{1}{x} < |x|$, donc la fonction inverse est strictement inférieure à la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur l'ensemble $D =]1; +\infty[$.*

Définition 19 (**Composition de fonctions**)
Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in D_1$ on a $g(x) \in D_2$.
*On définit alors la **fonction composée de** f **par** g, notée $f \circ g$, par :*

$$\begin{array}{rccl} f \circ g : & D_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}.$$

Exemple 20 — *Soient $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x^2$ définie sur R.*
La composée de f par g est la fonction $f \circ g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Risque d'erreur

Avant de se lancer dans le calcul de l'expression d'une composée il faut bien s'assurer que l'image de D_2 par g est incluse dans l'ensemble de définition de la fonction f.
Par exemple, la composée de $x \mapsto \sqrt{x}$ par la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ n'est pas définie car cette dernière prend des valeurs strictement négatives. Dans ce cas, on peut regarder la fonction sinus restreinte à un domaine de définition plus petit, comme $[0, \pi]$.

Exercice 6 — *En reprenant les notations de l'exemple précédent, déterminer l'ensemble de définition et l'expression de la composée $g \circ f$.*

2.4 Monotonie

Définition 21 (**Fonctions monotones**)
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- *f est **croissante** (respectivement strictement croissante) sur D si pour tout $x, y \in D$ tels que $x \leq y$ (respectivement $x < y$) on a $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$).*
- *f est **décroissante** (resp. strictement décroissante) sur D si pour tout $x, y \in D$ tels que $x \leq y$ (resp. $x < y$) on a $f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).*
- *f est **monotone** (resp. strictement monotone) si f est décroissante ou croissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

Remarque 22 — *La négation de la proposition "f n'est pas monotone" est :*
Il existe $x, y, z \in D$ tels que $x \leq y \leq z$, qui vérifient ($f(x) < f(y)$ et $f(y) > f(z)$) ou ($f(x) > f(y)$ et $f(y) < f(z)$).

Exercice 7 — *Soient f et g deux fonctions croissantes sur un ensemble D. Montrer que :*

1. *$f + g$ est croissante sur D.*
2. *$f \times g$ n'est pas nécessairement croissante. (Donner deux exemples)*

Proposition 23
Soient $f : D_2 \to \mathbb{R}$ et $g : D_1 \to \mathbb{R}$ telle que la composée $f \circ g : D_1 \to \mathbb{R}$ soit bien définie.
Si f et g sont monotones (respectivement strictement monotones), alors la composée $f \circ g$ est monotone (respectivement strictement monotone).
Démonstration — *On prouve cela par disjonction de cas (selon si f et g sont croissantes ou décroissantes).*

Exemple 24 — *Soient $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $g : x \mapsto x^3$ qui sont respectivement croissantes sur $[-1; +\infty[$ et $[0; +\infty[$.*
La composée $f \circ g$ est donc croissante sur $[0; +\infty[$, et s'écrit $f \circ g : x \mapsto \sqrt{1+x^3}$.

Exercice 8 — *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction monotone telle que $f(x) \neq 0$, pour tout $x \in D$.*

1. *Si $f > 0$ sur D montrer que $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur D.*
2. *Si $f < 0$ sur D montrer que $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur D est-ce que $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur D ?*
3. *Dans le cas général est-ce que $\dfrac{1}{f}$ est une fonction monotone ?*

On peut représenter simplement la croissance/décroissance d'une fonction f à l'aide d'un tableau de variations. Il s'agit d'un tableau représentant les intervalles où f est décroissante à l'aide

d'une flèche descendante et les intervalles où f est croissante à l'aide d'une flèche ascendante. Comme dans l'exemple suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f(x) = (x-1)^2$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.5 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 25 (**Fonctions majorées, minorées, bornées**)
Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :
- ***majorée*** *sur D s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$.*
- ***minorée*** *sur D s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $m \leq f(x)$.*
- ***bornée*** *sur D si elle est à la fois majorée et minorée sur D.*

Définition 26

- *Les fonctions de la forme $x \longmapsto ax + b$ où $a \neq 0$ ne sont pas majorées ou minorées sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$ est minorée par 0, mais non majorée.*
- *Les fonctions constantes $x \longmapsto k$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 9 — *Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 27 — *La fonction $f : D \to \mathbb{R}$ n'est pas majorée si et seulement si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x_M \in D$ tel que $f(x_M) > M$.*
On utilise beaucoup cette équivalence pour montrer qu'une fonction n'est pas majorée.

Exercice 10 — *Exprimer mathématiquement le fait que la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ n'est pas minorée.*
Montrer que la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^\star$.

Méthode 28
Pour reconnaître graphiquement une fonction majorée (resp. minorée) il faut et il suffit qu'il existe une droite horizontale $\mathcal{H}$ telle que la courbe représentative $\mathcal{G}_f$ se situe en-dessous (resp. au-dessus) de la droite $\mathcal{H}$.

Définition 29 (**Maximum/minimum d'une fonction**)
Soit $f : D \to \mathbb{R}$.
- *f admet un* ***maximum*** *en $a \in D$ si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \leq f(a)$.*
- *f admet un* ***minimum*** *en $a \in D$ si pour tout $x \in D$ on a $f(x) \geq f(a)$.*
- *f admet un* ***extremum*** *en $a \in D$ si le point a est un maximum ou un minimum.*

Risque d'erreur
Une fontion peut être majorée (respectivement minorée) sans admettre de maximum (respectivement minimum).
Par exemple, $\begin{array}{rccl} f : & [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1 - \frac{1}{x} \end{array}$ *est majorée mais n'admet pas de maximum.*

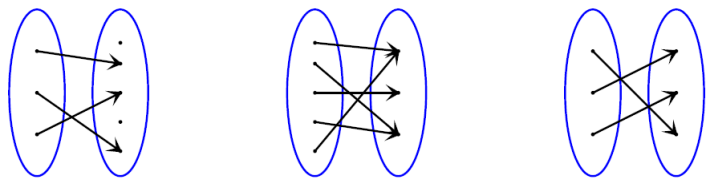
Pour déterminer si une fonction f est bornée, on utilise souvent la fonction $|f|$.

Proposition 30
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.
Démonstration — *On prouve cette équivalence avec une double-implication. Si $|f| \leq M$, alors $-M \leq f \leq M$. Si $m \leq f \leq M$, alors on a $|f| \leq \max(|m|, |M|)$.*

2.6 Injections, surjections, bijections

A part les fonctions monotones, on utilise beaucoup en mathématiques des fonctions injectives, surjectives, et bijectives (ou injections, surjections, bijections).

Définition 31 (**Injection, surjection, bijection**)
Soient E, F deux ensembles, et $f : E \to F$ une fonction.
• *On dit que f est **injective** si $\forall x, x' \in E$ on a $f(x) = f(x')$.*
Une fonction est injective ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution.
Autrement dit, une fonction injective ne repasse jamais par la même valeur.
• *On dit que f est **surjective** si $\forall y \in F$, $\exists x \in E$ tel que $f(x) = y$.*
Une fonction est surjective ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution, ssi $Im(f) = F$.
Autrement dit, une fonction surjective est une fonction qui passe par toutes les valeurs de F.
• *On dit que f est **bijective** de E vers F si elle est injective et surjective.*
Une fonction est bijective ssi $\forall y \in F$, $\exists! x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Une fonction est bijective ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ possède exactement une solution.
Autrement dit une fonction bijective est une fonction qui passe exactement une fois par chaque valeur de F.



f injective f surjective f bijective

Exemple 32 — *Soit* $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ *. Cette application est bijective. En effet :*

1. *(existence d'un antécédent) Soit $y \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.*
2. *(unicité de l'antécédent) Soient x et x' deux réels positifs tels que $f(x) = f(x')$, alors :*

$$x^2 = (x')^2 \Leftrightarrow x^2 - (x')^2 = 0 \Leftrightarrow (x - x') \times (x + x') = 0 \Rightarrow x = x'.$$

De même, $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ *est surjective mais pas injective,* $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ *est injective mais pas surjective, et Soit* $j : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ *n'est ni injective ni surjective.*

Remarque 33 — *L'injectivité/surjectivité/bijectivité de $f : E \to F$ dépendent du choix des ensembles de départ et d'arrivée E et F.*
Pour le moment, nous nous intéresserons principalement aux fonctions bijectives.
Souvent, on restreint la fonction f sur un sous-ensemble $E' \subset E$, vers un ensemble image $F' \subset F$, de sorte que $x \in E' \mapsto f(x) \in F'$ soit bijective.

Proposition 34
Soient I, J des parties de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ une fonction.
Si f est strictement monotone, alors f est injective.
Si f est strictement monotone et si $J = f(I)$, alors f est bijective.
Démonstration — *On vérifie la définition de fonction injective/bijective.*

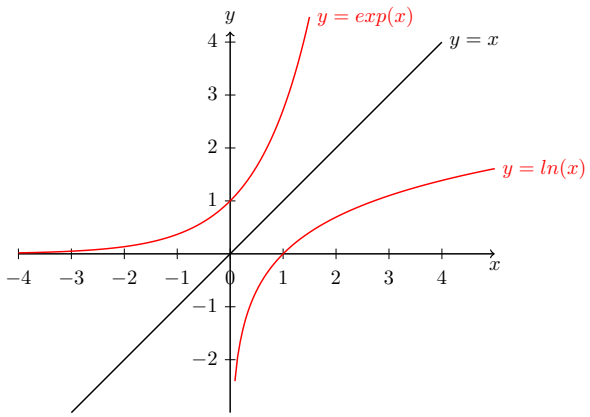
Exercice 11 — *Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 1 \in \mathbb{R}$ est bijective.*

Définition 35 (**Bijection réciproque**)
Soient D et E deux ensembles et $f : D \to E$ une fonction bijective.
*Comme tout élément de E possède un antécédent par f, on peut définir une nouvelle fonction : la **bijection réciproque** de f.*
On la note f^{-1}.
C'est la fonction $g : E \to D$, qui vérifie $g \circ f = Id_D$ ($\forall x \in D$, $g(f(x)) = x$) et $f \circ g = Id_E$ ($\forall y \in E$, $f(g(y)) = y$).

Exercice 12 — *Soit $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(x+1) - 2 \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to]-1, +\infty[$ telle que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $(g \circ f)(x) = x$.*
2. *Est-ce que f est bijective ?*

Proposition 36
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une fonction bijective et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.
Alors le graphe $\mathcal{C}_f$ est le symétrique de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Démonstration — *Le graphe $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points de la forme $(x, f(x))$, pour $x \in I$. Son symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ est l'ensemble des points de la forme $(f(x), x)$ pour $x \in I$. En posant $y = f(x)$, on a $(f(x), x) = (y, f^{-1}(y))$. Et lorsque x décrit I, $y = f(x)$ décrit J par surjectivité de f. Donc ce symétrique est $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.* □



Graphe de la fonction logarithme et de sa réciproque, la fonction exponentielle

On constate la symétrie entre les courbes des fonctions exp *et* ln. *Cette symétrie donne un lien visuel entre les propriétés de* exp *(valeurs, limites, croissances comparées) et celles de* ln.

2.7 Image réciproque

Définition 37 (**Image réciproque d'un ensemble**)
Soient D, E des ensembles, soit $f : D \to E$, et soit $A \subset E$.
*On définit **l'image réciproque de A par f**, par $f^{-1}(A) = \{x \in D \text{ t.q. } f(x) \in A\}$. L'image réciproque $f^{-1}(A)$ est un ensemble inclus dans D.*

Exemple 38 — *Pour $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ on a $f^{-1}([1, +\infty[) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.*
En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) \geq 1$ ssi $x^2 \geq 1$ ssi $x \geq 1$ ou $x \leq -1$.
On a aussi $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Remarque 39 — *L'image réciproque et la bijection réciproque utilisent une notation similaire, mais elles sont bien différentes. L'image réciproque de l'ensemble A, $f^{-1}(A)$, existe toujours, c'est l'ensemble des $x \in D$ tels que $f(x) \in A$. $f^{-1}(A)$ est une partie de D.*
La bijection réciproque de f n'existe que si f est bijective, et pour $y \in E$, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = y$. $f^{-1}(y)$ est un élément de D.

2.8 Simplification d'égalités et d'inégalités

Certaines propriétés des fonctions sont très utiles pour transformer des égalités ou des inégalités afin de les simplifier, voire les résoudre.

Proposition 40
Soient I, J des parties de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une fonction, et $x, y \in I$.

- *Si f est injective ou bijective, alors on a "$x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$".*
- *Si f est strictement croissante sur I,*
  alors on a "$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$" et "$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$".
- *Si f est strictement décroissante sur I,*
  alors on a "$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$" et "$x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$".
- *Si f est croissante, alors on a "$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$".*
- *Si f est décroissante, alors on a "$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$".*

Démonstration —*On utilise la définition de chaque propriété pour obtenir les implications ou équivalences de la proposition.*

Exemple 41 — *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x + 2 = 3x + 1$ ssi $x + 1 = 3x$ car la fonction $z \mapsto z - 1$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.*
Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a $x^2 = y^2$ ssi $x = y$ car la fonction $z \mapsto z^2$ est injective (car strictement croissante) de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.
Pour $x, y \in \mathbb{R}_-^*$, on a $x \leq y$ ssi $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ car la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.
Pour $x, y \in \mathbb{R}^*$, on a $x = y$ ssi $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ car la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est injective (et bijective) de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}^*$. Cette fonction n'est pas contre pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Remarque 42 — *La stricte croissance/décroissance est nécessaire pour avoir des équivalences. Parmi les fonctions croissances/décroissantes on retrouve les fonctions constantes, pour lesquelles $f(x) \leq f(y)$ n'implique rien sur x et y.*
Lorsque l'on veut appliquer une fonction f particulière à une inégalité, il faut rappeler la stricte monotonie de f pour justifier l'équivalence que l'on écrit.

2.9 Dérivabilité

Une autre propriété utilisée extrêmement souvent dans l'étude de fonctions d'une variable réelle est la dérivabilité. Vous avez vu cela au lycée, nous le revoyons ici.
Avec la dérivabilité se trouvent la notion de continuité ainsi que celle de limite. Nous étudierons ces deux notions par la suite.
Dans cette section, I désignera un intervalle.

Définition 43 (**Taux d'accroissement**)
Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et $a \in I$, $h \neq 0$ tels que $a + h \in I$.

On définit le ***taux d'accroissement de*** f ***en*** a ***de pas*** h *comme le réel* $\Delta_f(a,h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple 44 — *Soit* $f : x \mapsto x^2$ *définie sur* $\mathbb{R}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ *et* $h \neq 0$, *son taux d'accroissement est*

$$\Delta_f(a,h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{h^2 + 2ah}{h} = h + 2a$$

Définition 45 (**dérivabilité en un point**)
Soient I *un intervalle,* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction,* $a \in I$.
On dit que f *est* ***dérivable en*** a *si le taux d'accroissement* $h \mapsto \Delta_f(a,h)$ *admet une limite en* 0. *C'est à dire si* $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *existe et est finie.*
On note alors $f'(a)$ *cette limite.*
Le réel $f'(a)$ *est appelé* ***nombre dérivé*** *de* f *en* a. *C'est un nombre réel.*

Exemple 46 — *La fonction* $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ *est dérivable en tout point* $a \in \mathbb{R}$ *car* $\Delta_f(a,h) = h + 2a \to_{h\to 0} 2a$. *Ainsi, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, *on a* $f'(a) = 2a$.

Méthode 47 (**Montrer qu'une application est dérivable en un point**)
Pour montrer qu'une fonction f *est dérivable en un point* a, *on suit en général les étapes suivantes :*

1. *On écrit le taux d'accroissement* $\Delta_f(a,h)$.
2. *On simplifie au maximum son expression en essayant de simplifier la partie en "h" au dénominateur.*
3. *On fait tendre* h *vers* 0, *et on détermine la valeur de la limite.*
4. *Si la limite existe et est finie, alors* f *est dérivable en* a.
   La valeur obtenue est celle de $f'(a)$.

Exercice 13 — *Montrer que* $g : x \mapsto x^3 - x - 1$ *est dérivable en* $a = 1$, *et calculer* $g'(1)$.

Définition 48
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une application dérivable en un point* $a \in I$, *notons* $\mathcal{C}_f$ *la courbe représentative de* f. *Alors, la* ***tangente à*** $\mathcal{C}_f$ ***en*** $(a, f(a))$ *est la droite d'équation cartésienne* $y = f(a) + f'(a) \times (x - a)$.

Exemple 49 — *Soit* $f : x \mapsto x^3 - x - 1$. *On a* $f(1) = -1$ *et* f *dérivable en* 1 *de dérivée* $f'(1) = 2$.
On en déduit que $\mathcal{C}_f$ *admet une tangente en* $(1, -1)$ *d'équation* $y = 2x - 3$.

Exercice 14 — *Déterminer l'équation de la tangente en* $x = 0$ *de l'application* $f : x \mapsto (x+1)^2 + 1$. *Tracer la courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ *ainsi que* $T_0(f)$.

Définition 50 (**Dérivabilité**)
Soient I *un intervalle et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une application.*
On dit que f *est* ***dérivable sur I*** *si, pour tout* $a \in I$ *l'application* f *est dérivable en* a.
La fonction qui à $x \in I$ *associe le nombre* $f'(x)$ *est appelée* ***la dérivée de f*** *et est notée* f'.
Une dérivée est une fonction.

Remarque 51 — *Quand il n'y a pas d'ambigüité sur l'ensemble de définition de* f' *(sur l'ensemble des points où* f *est dérivable), on pourra dire que* f *est dérivable sans faire référence à son ensemble de départ.*

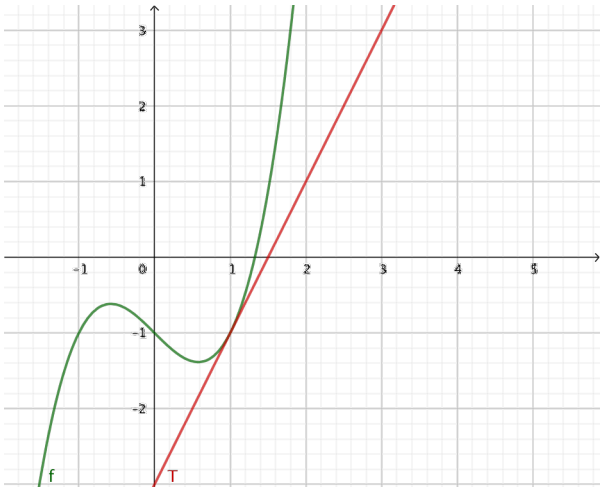


FIGURE 1 – courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente $T_1(f)$

EXEMPLE 52 — *La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable et, pour tout $a \in \mathbb{R}$, de dérivée $f'(a) = 2a$. En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons déjà vu que $\lim_{h \to 0} \Delta(a, h) = 2a$.*

2.10 Opérations sur les dérivées usuelles

Certaines opérations sur des fonctions dérivables donnent des fonctions qui restent dérivables (même chose pour les fonctions continues, que l'on verra par la suite). On a le théorème suivant :

THÉORÈME 53 (**Dérivabilité et opérations algébriques**)
Soient I un intervalle et f, g deux fonctions dérivables sur I. Alors :

1. *$f + g$ est dérivable sur I, et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$*
2. *$f \times g$ est dérivable sur I, et $(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$*
3. *$\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I (si g ne s'annule pas), et $(\dfrac{f}{g})'(x) = \dfrac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{(g(x))^2}$.*

EXERCICE 15 — *Soient $f : x \mapsto (x + 2)e^{x^2}$ et $g : x \mapsto |x - 2| + \ln(x)$.*

1. *Déterminer les ensembles de définition de f et g.*
2. *Calculer les dérivées de f et g.*
3. *En déduire l'expression des dérivées de $f+g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ sur les intervalles où ces fonctions sont dérivables.*

2.11 Dérivée d'une composée de fonctions

THÉORÈME 54 (**Dérivabilité et composition**)
Soient I, J deux intervalles et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.
Alors la fonction $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable. Et, pour tout $x \in I$, on a

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

EXEMPLE 55 — *Soient $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto e^x + \ln(x)$ dérivables toutes deux sur $]0, +\infty[$.*

Remarquons que f est à valeurs strictement positives donc $g \circ f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On a pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = e^x + \frac{1}{x}$. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 2x \times (e^{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2})$$

Soient f et g deux fonctions à valeurs strictement positives. Ave le théorème sur la dérivation de fonctions composées, et de la définition de la fonction puissance ($f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(x)}$), on peut montrer que la fonction f^g est dérivable.

Corollaire 56
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs strictement positives. Alors $x \mapsto f(x)^{g(x)}$ est dérivable sur I.

Méthode 57
Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables. Pour calculer la dérivée de $g \circ f$ en $x \in I$:

1. *on calcule d'abord les dérivées f' et g'.*
2. *on calcule $g'(f(x))$.*
3. *on réalise le produit $f'(x) \times g'(f(x))$ qui est la dérivée $(g \circ f)'(x)$.*

Exercice 16 — *Calculer la dérivée de $x \mapsto 3^{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$.*

3 Dérivée de fonctions réciproques

Théorème 58 (**Dérivabilité et bijection réciproque**)
Soient I, J deux intervalles, et $f : I \to J$ une application bijective dérivable telle que, pour tout $x \in I$, on ait $f'(x) \neq 0$.
Alors, la fonction $f^{-1} : J \to I$ est dérivable sur J. Pour tout $x \in J$, on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Démonstration — *On a $f \circ f^{-1}(x) = x$. En dérivant, cela donne $(f \circ f^{-1})' = 1$. On obtient alors le résultat.*

Exemple 59 — *Soit $f : x \mapsto x^3 + 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est bijective et déterminons $(f^{-1})'(1)$*

1. *La fonction f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ donc f est strictement monotone. De plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.*
2. *Déterminons $f^{-1}(1)$. On a*
$$\begin{aligned} & f(x) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 + 2x + 1 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 + 2x = 0 \quad \textit{ainsi } f^{-1}(1) = 0. \\ \Leftrightarrow\ & x \times (x^2 + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \end{aligned}$$
3. *Par application de la formule de dérivée d'une fonction réciproque, on en déduit que $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{3 \times 0^2 + 2} = \frac{1}{2}$.*

Exercice 17 — *Montrer à partir de la formule de dérivation des fonctions réciproques que que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est donnée pour tout $x > 0$ par $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.*

3.1 Lien entre dérivée et monotonie

Théorème 60
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.

1. *Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) = 0$, alors f est constante.*
2. *Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.*
3. *Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.*

Démonstration —*Admise. (Voir chapitre Dérivabilité)*

On peut donner une version plus fine du théorème précédent.

Théorème 61
Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) et telle que f' ne s'annule que sur un nombre fini de points.
Alors f est strictement croissante (décroissante) sur I.
Démonstration —*Admis.*

Exemple 62 — *La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. Elle ne s'annule qu'en $x = 0$ donc d'après le théorème précédent on obtient que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

4 Fonctions usuelles

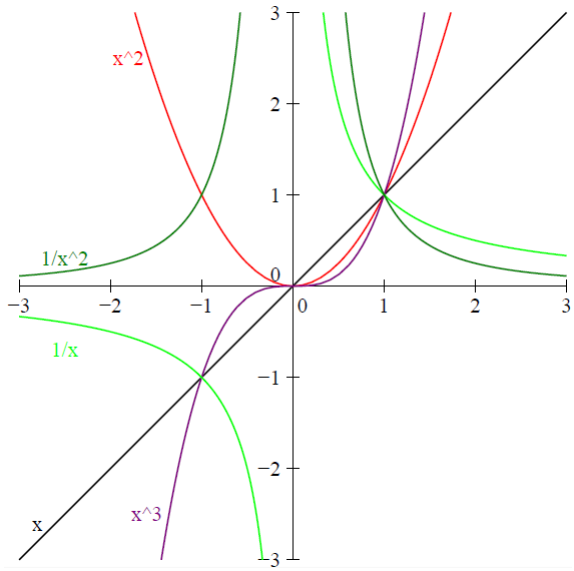
Nous reprenons dans cette section les propriétés des fonctions usuelles vues en terminale. Ces fonctions seront construites et leur propriétés démontrées au cours de l'année.

4.1 Fonctions polynomiales, fonctions puissances

Définition 63 (**Fonctions polynomiales**)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle fonction monomiale puissance n la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n \in \mathbb{R}$.
On appelle fonction polynomiale de degré n une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe des nombres $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
C'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Proposition 64
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- *Pour $n = 0$, la fonction $x \mapsto x^0$ est la fonction constante égale à 1.*
- *La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.*
  Sa dérivée est $x \mapsto nx^{n-1}$ si $n \neq 0$ et $x \mapsto 0$ sinon.
- *Pour $n \neq 0$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.*
- *Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.*
- *Si n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.*



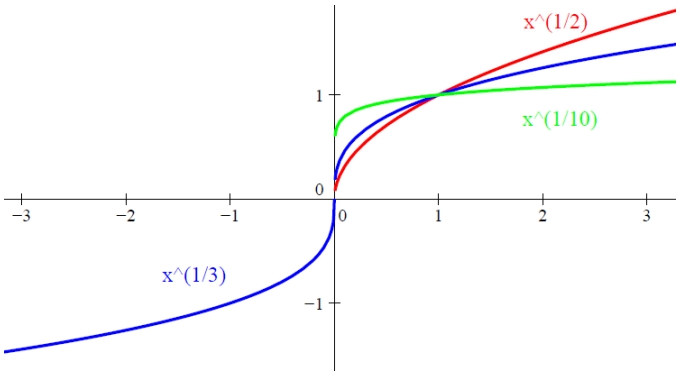
Définition 65 (**Fonctions puissances**)
Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance a la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \exp(a.\ln(x)) \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $x^a = \exp(a\ln(x))$.

- *Si $a \in \mathbb{N}$ (ex : $a = 2$), on retrouve une fonction monomiale, qui est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.*
- *Si a est un entier strictement négatif (ex : $a = -5$), on retrouve l'inverse d'une fonction monomiale, car $x^a = \frac{1}{x^{-a}}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.*
- *Si a est l'inverse d'un nombre entier pair (ex : $a = \frac{1}{6}$), on retrouve la bijection réciproque de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{\frac{1}{a}}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.*
- *Si a est l'inverse d'un nombre entier impair (ex : $a = \frac{1}{3}$), on retrouve la bijection réciproque de $x \in \mathbb{R} \mapsto x^{\frac{1}{a}}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.*
- *Si rien n'est précisé sur a, on conserve $\mathbb{R}_+^*$ comme domaine de définition.*

Proposition 66
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^a y^a = (xy)^a, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a} = (\frac{1}{x})^a$$

La fonction $x \mapsto x^a$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto ax^{a-1}$.
Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si $a > 0$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si $a < 0$.



Remarque 67 —
• *La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ qui est négative sur $\mathbb{R}^*$, mais cette fonction est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. La croissance/décroissance ne s'étudie que sur un*

intervalle, donc pas sur $\mathbb{R}^*$.
• *Hormis la fonction constante, toutes les fonctions puissances sont strictement monotones sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(croissantes si* $a > 0$*, décroissantes si* $a < 0$*).* • *Pour* a *de la forme* $\frac{1}{n}$*, avec* $n \in \mathbb{N}^*$*, la fonction* $x \mapsto x^a$ *s'étend à* $\mathbb{R}_+$ *ou à* $\mathbb{R}$ *comme bijection réciproque de* $x \mapsto x^n$*, mais cette fonction n'est pas dérivable en* 0*. La dérivée de* $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ *est* $x \mapsto \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$*, cette fonction n'est pas définie en* 0*.*

4.2 Fonction logarithme

Définition 68 (**Fonction logarithme népérien**)
On appelle fonction logarithme népérien, notée $\ln$*, la primitive de* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *sur* $]0, +\infty[$ *qui s'annule en* 1*. C'est-à-dire, pour tout* $x > 0$ *on a* $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$*.*

Proposition 69
Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $a \in \mathbb{R}$*. On a :*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y), \quad \ln(x^a) = a\ln(x)$$

La fonction $\ln$ *est continue et dérivable sur* $]0, +\infty[$*, de dérivée* $x \mapsto \frac{1}{x}$*.*
On a $\ln(1) = 0$*,* $\ln(x) \to_{x \to 0^+} -\infty$ *et* $\ln(x) \to_{x \to +\infty} +\infty$*.*
La fonction $\ln$ *est strictement croissante et bijective de* $]0, +\infty[$ *vers* $\mathbb{R}$*.*
Sa bijection réciproque est la fonction $\exp$*.*

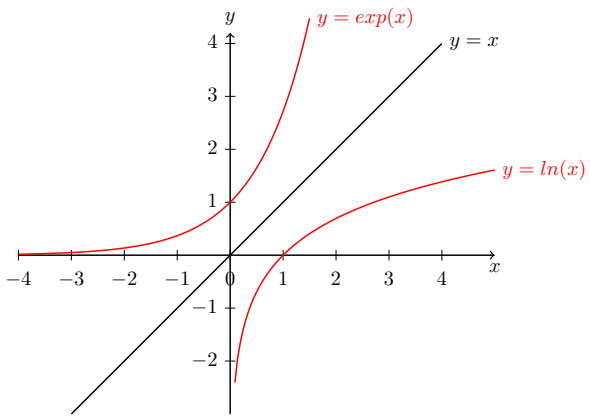
4.3 Fonction exponentielle

Définition 70 (**Fonction exponentielle**)
On appelle fonction exponentielle, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$*, la bijection réciproque de* $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$*.*
C'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$*,* $\exp(x)$ *est l'unique réel srictement positiv tel que* $\ln(exp(x)) = x$*.*

Proposition 71
Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $a \in \mathbb{Q}$*. On a :*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(-x) = \exp(x)^{-1}, \quad \exp(x)^a = \exp(ax)$$

La fonction $\exp$ *est continue et dérivable sur R, de dérivée* $\exp$*.*
On a $\exp(0) = 1$*,* $\exp(1) = e$*,* $\exp(x) \to_{x \to -\infty} 0$ *et* $\exp(x) \to_{x \to +\infty} +\infty$*.*
La fonction $\exp$ *est strictement croissante et bijective de* $\mathbb{R}$ *vers* $]0, +\infty[$*.*
Sa bijection réciproque est la fonction $\ln$*.*



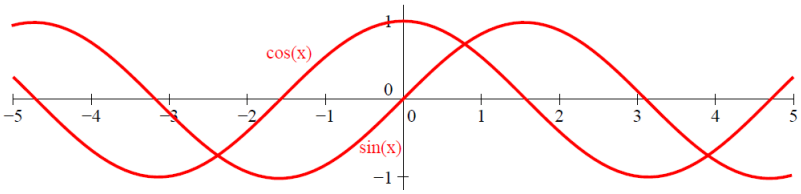
4.4 Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques seront redéfinies dans le prochain chapitre.
Toutes les formules de trigonométrie pour cos et sin y seront aussi présentes.

Proposition 72 (**Fonctions cosinus et sinus**)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On a :

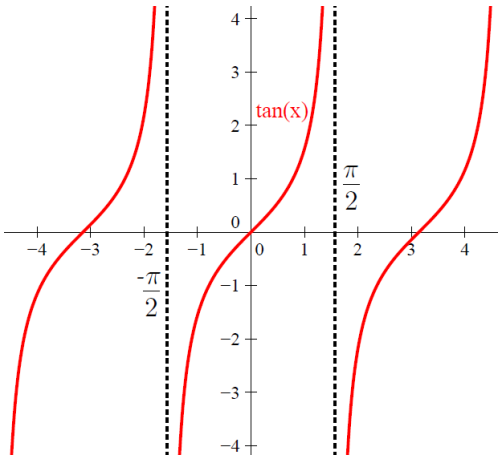
$$\cos(a+2k\pi) = \cos(a),\ \sin(a+2k\pi) = \sin(a)$$
$$\cos(-a) = \cos(a),\ \sin(-a) = -\sin(a),\ \cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a),\ \sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),\ \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

Les fonctions cos *et* sin *sont périodiques, de période* 2π.
La fonction cos *est paire, et la fonction* sin *est impaire.*
Les fonction cos *et* sin *sont déphasées d'un angle de* $\frac{\pi}{2}$ *:* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.
Les fonctions cos *et* sin *sont continues et dérivables sur* $\mathbb{R}$, *avec* $\cos' = -\sin$ *et* $\sin' = \cos$.



Définition 73 (**Fonction tangente**)
On appelle fonction tangente, notée tan, *la fonction définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *par tan :* $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition 74
La fonction tan *est continue et dérivable sur son domaine de définition.*
On a $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.
On a $\tan(0) = 0$, $\tan(x) \to_{x \to \frac{-\pi}{2}^+} -\infty$, *et* $\tan(x) \to_{x \to \frac{\pi}{2}^-} +\infty$.
La fonction tan *est strictement croissante et bijective de* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *vers* $\mathbb{R}$.



5 Asymptotes

Nous définissons ici les asymptotes à la courbe représentative d'une fonction en un point. Il s'agit d'une droite permettant de visualiser la limite d'une fonction en l'infini lorsqu'elle existe et que la fonction est suffisamment régulière.

5.1 Asymptotes verticales

Définition 75
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to a^+ (ou\ a^-)} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est une ***asymptote verticale*** *à la courbe de f.*

Dessin (propre) sur feuille

Exemple 76 — *La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.*

5.2 Asymptotes horizontales

Définition 77
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to +\infty (ou\ -\infty)} f(x) = a$, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une ***asymptote horizontale*** *à la courbe de f.*

Exemple 78 — *La fonction inverse admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi qu'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque $x \to -\infty$.*

Dessin sur feuille

5.3 Asymptotes obliques

Définition 79
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné. Soit (d) une droite d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. On dit que la droite (d) est une ***asymptote oblique*** *à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.*

Dessin sur feuille

Exemple 80 — *La courbe représentative associée à l'application* $\begin{array}{rccc} f : &]2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 2} \end{array}$ *admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = x - 2$.*

Exercice 18 — *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (et de $-\infty$ aussi).*

6 Etude d'une fonction

On détaille dans cette section le plan d'étude d'une fonction f de la variable réelle à valeurs réelles.

On commence par tenter de restreindre le domaine de d'étude de la fonction f en suivant ces étapes.

Méthode 81 (**Restriction du domaine d'étude**)

1. *Si l'ensemble de définition D de f n'est pas donné on commence par le déterminer une fois connue l'expression $f(x)$.*
2. *si f est périodique de période T, c'est-à-dire qu'il existe $a \in D$ et $T \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = f(a+T)$ on peut restreindre l'étude de f à l'ensemble $D \cap [a, a+T]$ (pour T éventuellement le plus petit possible)*
3. *s'il existe $a \in D$ tel que pour tout $x \in D$, $f(b - x) = f(x)$ alors par symétrie il suffit d'étudier la fonction f sur $D \cap [\frac{b}{2}, +\infty[$*

On détermine ensuite les variations de f.

MÉTHODE 82 (**Tableau de variations de f**)

1. *si la fonction possede des variations évidentes (règles de monotonie des fonctions usuelles, propriété sur les fonctions monotones, etc..) on peut directement indiquer à l'aide de flèches les variations de f*
2. *la plupart du temps, il est recommandé de dériver la fonction f en justifiant soigneusement qu'elle est dérivable puis en déterminant son signe.*
3. *on complète le tableau de variations avec les valeurs prises par cette dernière aux endroits où un changement de variations à lieu ou bien les limites aux bornes du domaine de définition.*

MÉTHODE 83 (**Représentation graphique**)

- *On se sert du tableau de variations pour déterminer l'allure de la courbe ainsi que les extrema.*
- *Lorsqu'on se donne une fonction, on commencera toujours par déterminer ses limites aux bornes de l'intervalle de définition :*
  - *Si f est définie sur $\mathbb{R}$, on déterminera $\lim\limits_{x\to+\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f$.*
  - *Si f est définie sur $]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$, il faut déterminer 4 limites : en $+\infty$, $-\infty$, a^+ et a^-.*
- *On notera directement les asymptotes horizontales (limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$) et les asymptotes verticales (limite infinie en a^+ ou a^-) sinon on détermine si $\mathcal{G}_f$ admet une asymptote oblique.*

7 Fonctions trigonométriques réciproques

Avec les fonctions bijectives, les fonctions réciproques sont très utilisées tant en analyse que dans d'autres domaines des sciences.
Nous définissons fonctions réciproques des fonctions trigonométriques classiques (sur certains intervalles). Vous retrouverez par exemple la fonction Arctan qui apparait dans le calcul d'intégrales.

7.1 Fonction Arc sinus

PROPOSITION 84
La fonction sinus restreinte à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est strictement croissante et a pour image $[-1, 1]$.
La fonction $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$ est donc une bijection.

D'après les résultats sur les bijections, on en déduit l'existence d'une bijection réciproque :

DÉFINITION 85 (**Fonction Arcsin**)
*La bijection réciproque de la fonction $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sin(x) \in [-1, 1]$ est appelée **fonction Arcsinus**.*
On la note Arcsin. Elle est définie comme suit :

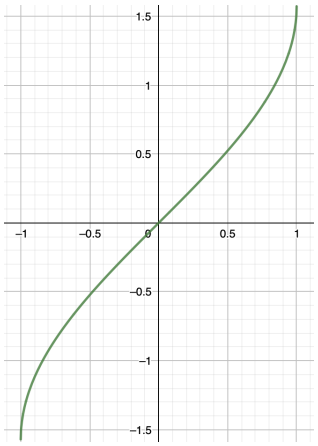
$$\begin{array}{rccl} Arcsin: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \sin(y) = x \end{array}$$

EXEMPLE 86 — *Voici quelques valeurs importantes prises par la fonction Arcsin :*

- $Arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$
- $Arcsin(0) = 0$
- $Arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$
- $Arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 19 — *Soit $x \in [-1;1]$. Montrer que* $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Proposition 87
Soient $x \in [-1,1]$ et $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
On a $\sin(\arcsin(y)) = y$ *et* $\arcsin(\sin(x)) = x$.
La fonction arcsin *est continue sur* $[-1,1]$, *impaire, et strictement croissante.*
La fonction arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$, *de dérivée* $\arcsin' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Démonstration — *On utilise les propriétés des bijections réciproques et la dérivée de* sin.



Graphe de la fonction arcsinus

Remarque 88 —
• *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\arcsin(\sin(x))$ *a un sens, mais ce nombre n'est égal à x que si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.*
Par exemple, $\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0$.
• *Tout comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, la fonction* arcsin *n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition. Elle n'est pas dérivable en -1 ni en 1.*

7.2 Fonction Arc cosinus

Proposition 89
La fonction cosinus restreinte à $[0,\pi]$ est strictement décroissante et a pour image $[-1,1]$.
Donc, la fonction $x \in [0,\pi] \mapsto \cos(x) \in [-1,1]$ est une bijection.

Définition 90 (**Fonction Arccos**)
La bijection réciproque de $x \in [0,\pi] \mapsto \cos(x) \in [-1,1]$ est appelée ***fonction arccosinus****.*
On la note arccos. *Elle est définie comme :*

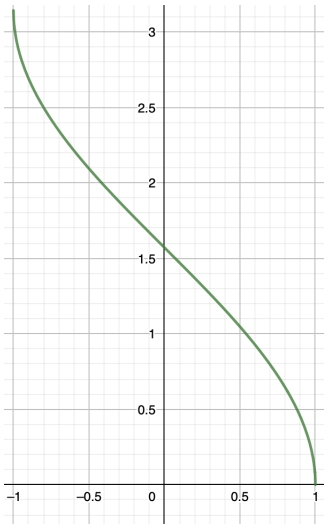
$$\begin{array}{rccl} \arccos : & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } y \in [0,\pi] \text{ tel que } \cos(y) = x \end{array}$$

Exemple 91 — *Voici quelques valeurs remarquables prises par la fonction Arccos :*

- $Arccos(1) = 0$
- $Arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$
- $Arccos(-1) = \pi$
- $Arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 20 — *Soit $x \in [-1;1]$. Exprimer* $\sin(Arccos(x))$ *seulement en fonction de x.*

Proposition 92
Soient $x \in [-1, 1]$ *et* $y \in [0, \pi]$.
On a $\cos(\arccos(y)) = y$ *et* $\arccos(\cos(x)) = x$.
La fonction arccos *est continue sur* $[-1, 1]$, *paire, et strictement décroissante.*
La fonction arccos *est dérivable sur* $]-1, 1[$, *de dérivée* $\arccos' : x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Démonstration — *On utilise les propriétés des bijections réciproques et la dérivée de* cos.



Graphe de la fonction Arccosinus

Remarque 93 —
• *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\arccos(\cos(x))$ *a un sens, mais ce nombre n'est égal à* x *que si* $x \in [0, \pi]$.
Par exemple, $\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0$.
• *Tout comme la fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$, *la fonction* arccos *n'est pas dérivable sur tout son domaine de définition. Elle n'est pas dérivable en* -1 *ni en* 1.

7.3 Fonction Arctangente

Proposition 94
La restriction de fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *est strictement croissante et a pour image* $\mathbb{R}$.
Donc, la fonction $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$ *est bijective.*

Définition 95 (Fonction Arctan)
La bijection réciproque de $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto \tan(x) \in \mathbb{R}$ *est appelée* ***fonction arctangente****.*
On la note arctan. *Elle est définie comme :*

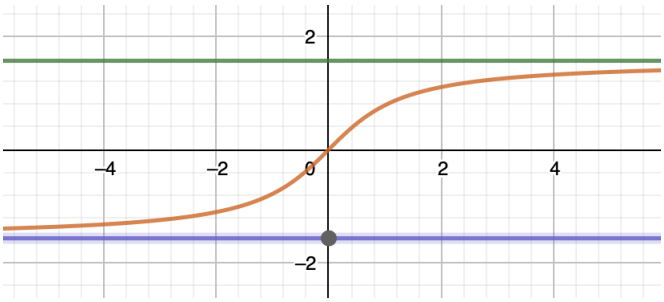
$$\begin{array}{rccl} \arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \tan(y) = x \end{array}$$

Exemple 96 — *Voici quelques limites et valeurs remarquables prises par la fonction Arctan :*

- $Arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$
- $Arctan(0) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} Arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} Arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

Proposition 97
La fonction Arctan est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, *et dérivable.*
Sa dérivée est $\arctan' : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration — *On utilise les propriétés des bijections réciproques.*



Graphe de la fonction Arctangente

Remarque 98 — *Pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\arctan(\tan(x))$ *a un sens, mais ce nombre n'est égal à* x *que si* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Par exemple, $\arctan(\tan(\pi)) = \arctan(0) = 0$.

Remarque 99 — *En analyse, on a parfois besoin d'utiliser des primitives de* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *et de* $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. *Ces primitives s'expriment seulement avec* $\arcsin, \arccos, \arctan$.
Ainsi, les dérivées de ces 3 fonctions sont à connaître.

Exercice 21 — *Simplifier les nombres suivants :*

- $\arctan(\tan(\frac{3\pi}{4}))$
- $\arctan(\tan(\frac{5\pi}{4}))$
- $\arctan(\tan(\frac{7\pi}{4}))$
- $\arctan(\tan(\frac{29\pi}{6}))$

Proposition 100
Soient $x \in [-1, 1]$ *et* $y \in \mathbb{R}$. *On a :*

- $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$
- $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}.sgn(x)$ ($sgn(x)$ *vaut* 1 *si* $x > 0$ *et* -1 *si* $x < 0$).

Démonstration —*On dérive les fonctions à gauche. Leur dérivée est nulle, donc ces fonctions sont constantes sur leurs intervalles de définition. Puis, on détermine les constantes.*

8 Fonctions additionnelles

Quelques fonctions apparaissent fréquemment dans les exercices. Etudions-les.

8.1 Fonctions hyperboliques

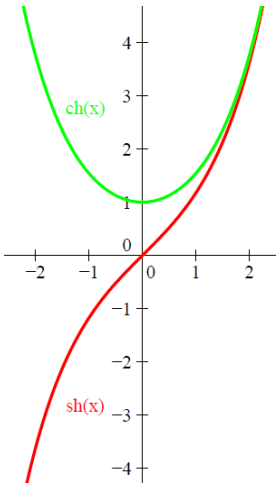
Définition 101 (**Fonctions hyperboliques**)
On définit la fonction cosinus hyperbolique, $ch : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, *par* $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
On définit la fonction sinus hyperbolique, $sh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, *par* $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Proposition 102

1. *La fonction ch est paire, positive, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée* $ch' = sh$. *Elle est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0]$, *strictement croissante sur* $[0, +\infty[$ *et son image est* $[1, +\infty[$.
   On a $ch(0) = 1$ *et* $\lim_{x \to \pm\infty} ch(x) = +\infty$.
2. *La fonction sh est impaire, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée* $sh' = ch$. *Elle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *et son image est* $\mathbb{R}$.
   On a $sh(0) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} sh(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty$.

3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$.*

Démonstration —*Les fonctions ch et sh sont définies à l'aide de la fonction exponentielle. Deux études de fonctions permettent d'obtenir ces résultats.*



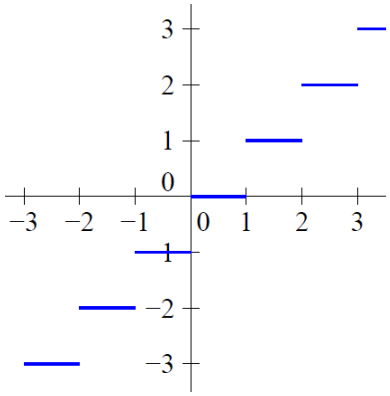
8.2 Fonction partie entière

Définition 103 (**Partie entière**)
Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$ (ou $Ent(x)$ ou $E(x)$), comme le plus grand entier n tel que $n \leq x$.

Proposition 104 1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.*

2. *Pour tous $n \in \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est constante sur $[n, n+1[$. Elle n'est pas continue ni dérivable sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 105 — *On a $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 0.99 \rfloor = 0$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -1.5 \rfloor = -2$.*



La fonction partie entière, aussi appelée fonction plancher (*floor* en anglais), est utilisée pour obtenir un nombre entier "proche" d'un nombre réel x dans des preuves (majorations, minorations).
Elle a un analogue, la fonction plafond (**ceiling** en anglais). Celle-ci vérifie $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$.
Nous n'utiliserons que la fonction plancher dans ce cours ainsi qu'en informatique.

Exemple 106 — *Pour tout $x \in [1, +\infty[$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^k \leq x < 2^{k+1}$.*
Procédons par analyse-synthèse. Analyse : Si un tel entier k existe, il vérifie $2^k \leq x$ et $x < 2^{k+1}$.
On a donc $k \ln(2) \leq \ln(x)$ et $\ln(x) < (k+1)\ln(2)$, c'est-à-dire $k \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} < k+1$.
Comme k est un entier on en déduit que $k \leq \lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \rfloor$ et $\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \rfloor + 1 \leq k+1$.
Par double-inégalité, on obtient que $k = \lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \rfloor$.

Synthèse : Le nombre $k = \lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \rfloor$ *est bien un entier, et la fonction partie entière nous donne* $k \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < k+1$*, d'où* $2^k \leq x < 2^{k+1}$*.*
Cela termine la preuve de l'existence. On a de même montré que cet entier est unique.

Exemple 107 — *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$*, il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $x \leq k!$*.*
On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on a* $n! \geq n$*.*
Ainsi, on a $x \leq \lfloor x \rfloor + 1 \leq (\lfloor x \rfloor + 1)!$*. Le nombre* $k = \lfloor x \rfloor + 1$ *convient donc.*

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

- Savoir déterminer le domaine de définition D d'une fonction f. (fonctions usuelles, et somme/produit/quotient/composée de fonctions)
- Connaître les fonctions usuelles $\cos, \sin, \exp, \ln, x \mapsto x^a, \tan$: domaine de définition, courbe, croissance/décroissance, limites aux bords du domaine, propriétés spécifiques.
- Savoir montrer qu'une fonction est paire, impaire, périodique, croissante, décroissante.
- Connaître les formules de dérivation : dérivées des fonctions usuelles, somme, produit, quotient, composée $((u+v)', (\lambda u)', (uv)', (\frac{u}{v})', (u \circ v)', (\frac{1}{v})', (u^a)', (\exp(u))', (\ln(u))')$.
- Fonctions injectives, surjectives, bijectives, bijection réciproque f^{-1}. Définition avec $f(x) = y$. Savoir montrer que $f : I \to J$ est bijective. Une fonction strictement monotone est injective, et bijective sur son image. Dérivée de f^{-1}.
- Savoir faire une étude de fonctions : domaine de définition, propriétés, dérivée, signe de la dérivée, variations, limites, tracé de la courbe.
- Fonction cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$, bijection réciproque arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$.
  Valeurs particulières, allure de la courbe, dérivée $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Fonction sin : $[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}] \to [-1, 1]$, bijection réciproque arcsin : $[-1, 1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
  Valeurs particulières, allure de la courbe, dérivée $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Fonction tan : $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, bijection réciproque arctan : $\mathbb{R} \to]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
  Valeurs particulières, allure de la courbe, dérivée $\arccos'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Fonctions ch, sh, $x \mapsto \lfloor x \rfloor, x \mapsto |x|$.