Formulaire de mathématiques pour Terminale

Identités remarquables

Valables pour des entiers, réels, complexes, fonctions, polynômes.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Techniques usuelles

- $a = a + b - b$ ["+1 −1"]
- $a = \frac{a \times b}{b}$ (si $b \neq 0$) ["×1 /1"]
- $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ [Transformer une égalité en un zéro]
- $f \leq g \Leftrightarrow 0 \leq g - f$ [Transformer une comparaison en étude de signe]
- Tester pour $n = 0, 1, 2, 3$, pour $x = 0, 1, -1, 2, -2$, pour $f(x) = x^2, x^n, \exp$. [Prendre des exemples]
- Faire un petit dessin au brouillon (cercle trigonométrique, vecteurs, courbe de fonction,...)

Techniques usuelles 2

- Factoriser une somme par le terme dominant (pour $n \to +\infty$, $x \to 0$)
- $a = \sqrt{a^2}$ (si $a \geq 0$).
- $\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{a^2-b^2}$ [Multiplier par la quantité conjuguée]
- $a = \exp(\ln(a))$ (si $a > 0$) [Utiliser l'exponentielle du logarithme] $a^x = \exp(x \ln(a))$.
- $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ [Equation produit nul]
- On a $a + b = 0$ avec $a, b \geq 0$ ssi $a = b = 0$. [Somme de positifs nulle]
- Un vecteur est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Propriétés des fonctions usuelles

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (si $a, b \geq 0$).
- $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.
- $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$, $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$, $\exp(na) = \exp(a)^n$.
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$, $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$ (si $a, b \geq 0$).
- $|ab| = |a|.|b|$, $|a+b| \leq |a| + |b|$. [Inégalité triangulaire]

Sommes, Produits

- $\sum_{k=a}^{b} x_k = x_a + x_{a+1} + x_{a+2} + \ldots + x_b$ (si $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$)
- $\Pi_{k=a}^{b} a_k = x_a \times x_{a+1} \times \ldots \times x_b$ (si $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$)
- $\sum_{k=a}^{b} \lambda.x_k = \lambda(\sum_{k=a}^{b} x_k)$ [Factorisation de somme]
- $\sum_{k=a}^{b} (x_k + y_k) = \sum_{k=a}^{b} x_k + \sum_{k=a}^{b} y_k$ [Développement de somme]

Somme arithmétique, Somme géométrique

- $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda = \lambda.(n+1)$.
- $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$, et $n+1$ si $a = 1$.

Factorielle, Coefficients binomiaux

- $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n = \Pi_{k=1}^{n} k$.
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$. Exemples avec le triangle de Pascal.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Formule du binôme

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Formules de trigonométrie

- $\cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1$. [Pythagore]
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. [Développement]
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.
- $\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 = 1 - 2\sin(a)^2$.
- $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$.
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$. [Symétries]
- $\cos(-x) = \cos(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$.
- $\sin(-x) = \sin(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.
- $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cos(\pi) = -1$. [Valeurs particulières]
- $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\sin(\pi) = 0$.

Nombres complexes

- $z = a + ib$, $Re(a+ib) = a$, $Im(a+ib) = b$, $\overline{a+ib} = a - ib$

- $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$. [Partie réelle, partie imaginaire]
- $z.\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$. [Module]
- $|z| = 0$ ssi $z = 0$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. [Inégalité triangulaire]
- $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$ [Inverse, multiplier par la quantité conjuguée]
- $z = Re^{it}$ avec $R = |z| \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$ [Module et argument]
- $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ [Exponentielle complexe]
- $e^{it}e^{is} = e^{i(t+s)}$, $e^{-it} = \frac{1}{e^{it}}$, $e^{int} = (e^{it})^n$.
- $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = Re(e^{it})$, $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = Im(e^{it})$. [Formules d'Euler]

Polynômes

- On factorise $aX^2 + bX + c$ à l'aide de $\Delta = b^2 - 4ac$. [Degré 2 et discriminant]

Dérivation

- $(x^a)' = ax^{a-1}$, $(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, $\exp' = \exp$
- $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$
- $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$

Dérivation 2

- $(u + v)' = u' + v'$, $(\lambda u)' = \lambda \times u'$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, $(\frac{1}{v})' = \frac{-v'}{v^2}$
- $f' = 0$ sur $]a, b[\Leftrightarrow f$ est constante sur $]a, b[$.

Intégrales

- $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, (si F est une primitive de f).
- $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ [Chasles]
- $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$ [Intégration par parties]

Limites de suites

- $\frac{1}{n} \to_{n\to+\infty} 0$, $n^a \to_{n\to+\infty} +\infty$ (si $a > 0$)
- $\exp(n) \to_{n\to+\infty} +\infty$, $\exp(-n) \to_{n\to+\infty} 0$.
- $\ln(n) \to_{n\to+\infty} +\infty$, $\ln(\frac{1}{n}) \to_{n\to+\infty} -\infty$.
- $(q^n)_n$ tend vers 0 si $q \in]-1, 1[$, vers 1 si $q = 1$, vers $+\infty$ si $q > 1$, n'a pas de limite si $q \leq -1$. $((-1)^n)_n$ n'a pas de limite.

Opérations sur les limites

- $\lim_n(\lambda u_n) = \lambda \lim_n(u_n)$, $\lim_n(u_n + v_n) = \lim_n(u_n) + \lim_n(v_n)$, $\lim_n(u_nv_n) = \lim_n(u_n)\lim_n(v_n)$, si les limites de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont finies.
- Si $u_n \leq v_n$ alors $\lim_n(u_n) \leq \lim_n(v_n)$ [Limite et comparaison]
- Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_n(u_n) = \lim_n(w_n) = l$, alors $v_n \to_n l$. [Gendarmes]

Formes indéterminées

- $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $(+\infty) + (-\infty)$, $\frac{\infty}{0}$
  Les cas $\infty \times \infty$, 0×0, $0 + 0$, $(+\infty) + (+\infty)$, $\frac{0}{\infty}$ ne sont pas des formes indéterminées. Sinon, on peut utiliser des croissances comparées.

Croissances comparées

- $\ln(n)^a \ll n^a \ll q^a \ll n!$ (si $a \neq 0$)
  Le terme dominant détermine la limite (pour $n \to +\infty$)
- $\ln(x)^a \ll x^a \ll \exp(a.x)$ (ou q^x) (si $a \neq 0$)
  Le terme dominant détermine la limite (pour $x \to +\infty$, $x \to 0$, $x \to -\infty$)

Limites de fonctions

- $\frac{1}{x} \to_{x\to0^+} +\infty$, $\frac{1}{x} \to_{x\to0^-} -\infty$
- $f(x) \to_{x\to a} f(a)$, (si f continue en a). [Continuité]
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a)$, (si f dérivable en a). [Taux d'accroissement]
- Si $u_n \to_n l$ et f continue en l, alors $f(u_n) \to_n f(l)$. [Suites et continuité]
- Les opérations sur les limites, les comparaisons, et les formes indéterminées sont les mêmes que celles pour les suites.

Probabilités, variables aléatoires

- $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\omega)$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$, si $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \neq 0$.
- $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_i)$, si $(B_1, \ldots, B_n)$ partition de Ω. [Découpage]
- [Bernouilli] $X : \Omega \to \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$. $\mathbb{E}(X) = p$, $Var(X) = p(1 - p)$.
- [Binomiale] $X : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1 - p)^{n-k}$. $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.
- [Uniforme] $X : \Omega \to \{0, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n+1}$. $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{2}$.
- $Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0$. [Variance]

Géométrie

- $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$, $B = A + \vec{AB}$, $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$.
- Triangles et quadrilatères particuliers (propriétés, caractérisation).
- $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. [Norme et produit scalaire]
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si x, y sont orthogonaux. [Pythagore]
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. [Inégalité triangulaire]