# Chapitre 18
# Géométrie dans l'espace

## Table des matières

1 Géométrie dans l'espace . . . . . . 1
1.1 Repère, coordonnées cartésiennes . . . . . . 1
1.2 Produit scalaire de vecteurs . . . . . . 1
1.3 Produit vectoriel . . . . . . 3
1.4 Produit mixte/déterminant . . . . . . 4
1.5 Coordonnées cylindriques . . . . . . 5
1.6 Plans . . . . . . 6
1.7 Droites . . . . . . 8
1.8 Sphères . . . . . . 10

Vidal AGNIEL

# 1 Géométrie dans l'espace

Ce chapitre revient sur les notions de géométrie dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et les consolide. Tous les objets utilisés se retrouvent dans d'autres chapitres au programme des classes préparatoires (espaces vectoriels, bases, distance/norme, produit scalaire).
L'espace $\mathbb{R}^3$ est l'un des espaces vectoriels les plus simples sur lesquels toutes ces notions peuvent être visualisées (faire des dessins pour se représenter une situation), et sur lesquels on peut faire facilement des calculs (dans $\mathbb{R}^n$ les calculs sont plus longs).
En Physique et en SI, le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ sont des ensembles fondamentaux : ce sont dans ces ensembles que tous les phénomènes se déroulent. Connaître leur géométrie aide énormément à comprendre et à prédire ces phénomènes.

## 1.1 Repère, coordonnées cartésiennes

Dans ce chapitre, **l'espace** $\mathbb{R}^3$ pourra aussi être appelé $\mathcal{E}$. En physique, on désigne souvent l'espace ambiant par $\mathcal{E}$.
On parle d'ailleurs **de** l'espace.
Les éléments de l'espace sont **les points**.
Dans l'espace, on peut aussi construire des **vecteurs**. Nous avons revu cette construction au chapitre précédent. Ici, nos vecteurs seront issus de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Définition 1 (**Points et vecteurs**)
Soit $\mathcal{E}$ l'espace réel. Soient $A, B \in \mathcal{E}$.
Alors, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \mathcal{E}$ tel que $B$ est l'image de $A$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ : $B = A + \vec{u}$.
Ce vecteur est noté $\overrightarrow{AB}$. C'est le vecteur associé aux points $A$ et $B$.

Proposition 2 (**Relation de Chasles**)
Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^3$. On a alors :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Définition 3 (**Repère de l'espace, coordonnées cartésiennes**)
Soit $\mathbb{R}^3$ l'espace réel.
Un **repère** de $\mathbb{R}^3$ est la donnée d'un point $O \in \mathbb{R}^3$ et d'une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de vecteurs (base de l'e.v. $\mathbb{R}^3$).
Tout point $M \in \mathbb{R}^3$ de l'espace s'écrit alors de manière unique :
$$M = O + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$$
Les nombres réels $x, y, z$ sont appelées **coordonnées cartésiennes** de $M$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \overrightarrow{k})$.

## 1.2 Produit scalaire de vecteurs

Définition 4 (**Produit scalaire**)
Soient $\overrightarrow{u} = (x, y, z), \overrightarrow{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On définit le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ ou $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$, par :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Définition 5 (**Vecteurs orthogonaux**)
Soient $\overrightarrow{u} = (x, y, z), \overrightarrow{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz' = 0$.

Par exemple, $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, 0)$ sont orthogonaux. De même, $(1, 0, 1)$ et $(0, -10, 0)$ sont orthogonaux.

Définition 6 (**Norme d'un vecteur**)
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
On définit la **norme** de $\overrightarrow{u}$, notée $\|\overrightarrow{u}\|$, par
$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On a en fait : $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$.

Par exemple, le vecteur $(1,0,0)$ est de norme 1. Le vecteur $(1,2,1)$ est de norme $\sqrt{6}$.

Définition 7 (**Base orthogonale, base orthonormée**)
Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ une base de $\mathbb{R}^3$.
• On dit que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est **orthogonale** si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux deux à deux ($\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$).
• On dit que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est **orthonormée** si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux deux à deux et de norme 1 ($\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{w}\| = 1$).
Pour $\mathbb{R}^3$ l'espace, et $O$ un point de $\mathbb{R}^3$, on dit alors que $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est un **repère orthonormé**.

Souvent, on abrège base orthonormée en b.o.n., et base orthogonale en b.o
La base canonique $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. En général, c'est celle-ci que l'on utilise.
Construire une base de vecteurs de norme 1 n'est pas difficile (on renormalise), mais avoir des vecteurs qui sont orthogonaux entre eux est moins simple (il faut utiliser des projetés orthogonaux pour y arriver).

Remarque 8 — *Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$ non-nuls.*
*Si $u \cdot v = 0$, alors la famille $(u, v)$ est libre (donc une base de $\mathbb{R}^3$).*
*En effet, si la famille $(u, v)$ était liée on aurait $v = \lambda u$ avec $\lambda \neq 0$, d'où :*
$0 = u \cdot v = u \cdot (\lambda u) = \lambda(u \cdot u) = \lambda\|u\|^2 = \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$. *Comme $u = (x, y, z)$ est non-nul, on ne peut pas avoir $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.*
*Donc, il suffit de calculer un produit scalaire pour montrer que la famille $(u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Méthode 9 (**Renormaliser un vecteur** $u$) —
*Soit $u \in \mathbb{R}^3$ non-nul. La norme $\|.\|$ vérifie $\|\lambda.u\| = |\lambda|\|u\|$.*
*Ainsi, pour $\lambda = \frac{1}{\|u\|}$ on a $\|\frac{1}{\|u\|}u\| = \frac{1}{\|u\|}\|u\| = 1$.*
*Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ non-nul, il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda u$ est de norme 1.*
*Pour avoir un vecteur de norme 1, il suffit de le diviser par sa norme.*

Proposition 10 (**Produit scalaire et angle**)
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$. Alors, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|u\|.\|v\|.\cos(\text{angle}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})).$$

Méthode 11 (**Calculer l'angle formé par trois points** $ABC$) —
*On calcule souvent l'angle entre trois points $ABC$ (en $B$) avec la formule précédente : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BR}$ associés, dans <u>une base orthonormée</u>.*
*On calcule leur norme, et leur produit scalaire.*
*Avec la relation, on en déduit le cosinus de l'angle $ABC$.*
*Grâce aux valeurs particulières de la fonction* cos *(ou à l'ordinateur), on en déduit la valeur de l'angle $ABC$.*
***Attention !*** *Les angles positifs/négatifs sont définis avec le sens <u>trigonométrique</u> (le sens anti-horaire).*

Remarque 12 —
*Si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, cela veut dire que l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un angle droit (de $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$).*
*Un produit scalaire nul indique des droites/segments **perpendiculaires**.*
***Attention !*** *Pour calculer un produit scalaire d'un vecteur, il faut utiliser les coordonnées dans une base orthonormée (soit la base canonique, soit une autre).*

Méthode 13 (**Montrer que deux droites sont perpendiculaires**) —
*On prend $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ des vecteurs directeurs de deux droites $D$ et $D'$.*
*On calcule leurs coordonnées dans la base canonique (ou dans une b.o.n).*
*On calcule leur produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.*
*Le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est nul si et seulement si $D$ et $D'$ sont perpendiculaires.*

Corollaire 14 (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$. Alors, on a :

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|u\|.\|v\|.$$

**Preuve** — On utilise la proposition précédente et le fait que $|\cos(a)| \leq 1$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. □

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une inégalité qui permet de majorer le produit scalaire de deux vecteurs quand on connaît leur norme (quand on connaît la "longueur" du vecteur, mais pas ses coordonnées exactes). Cela sert beaucoup en analyse.

Proposition 15 (**Propriétés du produit scalaire**)
Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $u \cdot v = v \cdot u$.
   Le produit scalaire est **symétrique**.
2. $u \cdot (v + \lambda w) = (u \cdot v) + \lambda(u \cdot w)$.
3. $(u + \lambda w) \cdot v = (u \cdot v) + \lambda(w \cdot v)$.
   Le produit scalaire est bilinéaire (linéaire à gauche, linéaire à droite).
4. $u \cdot u = 0$ si et seulement si $u = 0$.

**Preuve** — On écrit $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$, $w = (x'', y'', z'')$ les coordonnées de $u, v, w$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on fait les calculs. □

Définition 16 (**Projeté orthogonal**)
Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non-nul de $\mathbb{R}^3$.
Pour $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ non-nul, on définit le **projeté orthogonal** de $\overrightarrow{u}$ selon $\overrightarrow{v}$ par :

$$p_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u}) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}.\overrightarrow{v}.$$

Si $\overrightarrow{v}$ est de norme 1, on a $p_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{v}$.

Exemple 17 —

1. *Pour $v = (1, 0, 0)$, le projeté orthogonal de $u = (x, y, z)$ selon $v$ est le vecteur $(x, 0, 0)$.*
2. *Pour $v' = (0, 1, 0))$, le projeté orthogonal de $u = (x, y, z)$ selon $v'$ est le vecteur $(0, y, 0)$.*
3. *Pour $v'' = (1, 1, 1)$, le projeté orthogonal de $u = (x, y, z)$ selon $v''$ est le vecteur $\frac{x+y+z}{3}.(1, 1, 1) = (\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3})$.*

Si on complète la famille $(\overrightarrow{v})$ en une base orthogonale $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}', \overrightarrow{v}'')$, on aura alors $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{v}' + c\overrightarrow{v}''$, et le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ sera $a\overrightarrow{v}$. Ce projeté représente la composante du vecteur $\overrightarrow{u}$ selon $\overrightarrow{v}$, dans une base othogonale.
Cette notion est fortement utilisée en Physique et en SI afin de passer d'une étude dans le $\mathbb{R}^3$ à une étude sur une droite $D$ (passer de la dimension 2 à la dimension 1).
Pour calculer un projeté orthogonal, on utilise un produit scalaire. Cela est facile à calculer.

Méthode 18 (**Constuire une base orthogonale dans $Vect(u, v)$**) —
*Soient $u, v$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas colinéaires.*
*En général, ces vecteurs ne sont pas orthogonaux, et on cherche une base orthonormée de $Vect(u, v)$.*
*Il faut alors trouver deux vecteurs de $Vect(u, v)$ qui sont orthogonaux, puis renormaliser ces vecteurs.*
*Alors, le vecteur $v - p_u(v) = v - \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u$ est orthogonal à $u$. (Faire un dessin)*
*La famille $(u, v - p_u(v))$ est donc une base orthogonale de $Vect(u, v)$.*
*De plus, le théorème de Pythagore donne $\|v - p_u(v)\|^2 = \|v\|^2 - \|p_u(v)\|^2 = \|v\|^2 - \frac{\langle v,u\rangle^2}{\|u\|^2}$.*

## 1.3 Produit vectoriel

Définition 19
Soient $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On définit le **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, par :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - y'x).$$

C'est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 20 (**Propriétés du produit vectoriel**)
Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $u \wedge v = -v \wedge u$.
   Le produit vectoriel est **anti-symétrique**.
2. $u \wedge (v + \lambda w) = u \wedge v + \lambda(u \wedge w)$.
3. $(u + \lambda w) \wedge v = u \wedge v + \lambda(w \wedge v)$.
   Le produit vectoriel est bilinéaire (linéaire à gauche, linéaire à droite).

**Preuve** — On écrit $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$, $w = (x'', y'', z'')$ les coordonnées de $u, v, w$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on fait les calculs. □

Proposition 21 (**Produit vectoriel et angle**)
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$. Alors, on a :

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin(\text{angle}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))|.$$

**Attention !** Les angles positifs/négatifs sont définis avec le sens trigonométrique (le sens anti-horaire).

Proposition 22
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$.
Alors, on a $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires (si l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est plat : 0 ou $\pi$).
Un produit vectoriel nul indique des droites/segments **parallèles**.

Remarque 23 — *La norme du produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ représente l'aire du paralélépipède défini par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (comme le déterminant de deux vecteurs en dimension 2).*
*On retrouve le fait que le parallélépipède est plat (d'aire nulle) si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires)*

Proposition 24 (**Produit vectoriel et orthogonalité**)
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est non-nul, alors ce vecteur est un vecteur normal au plan $Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

**Attention !** Pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs, il faut utiliser les coordonnées dans une base orthonormée directe (soit la base canonique, soit une autre).

Définition 25 (**Base orthonormée directe**)
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
On dit que cette base est **directe** si le vecteur $\overrightarrow{j}$ s'obtient en appliquant une rotation de $\frac{\pi}{2}$ au vecteur $\overrightarrow{i}$, et si $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$ ($\overrightarrow{k}$ est du bon côté du plan $Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$).
On abrège cela en b.o.n.d.

La base canonique $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une b.o.n.d., alors que la base $((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ est une b.o.n. mais n'est pas directe (les vecteurs ne sont pas dans le bon ordre).

Méthode 26 (**Montrer que deux droites sont parallèles**) —
*On prend $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ des vecteurs directeurs des deux droites $D$ et $D'$.*
*On calcule leurs coordonnées dans la base canonique (ou dans une b.o.n).*
*On calcule leur produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.*
*Le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est le vecteur nul si et seulement si $D$ et $D'$ sont parallèles.*

Méthode 27 (**Montrer que deux points sont alignés**) —
*Pour $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, on regarde les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.*
*Alors, les points $A, B, C$ sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$, si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$.*

## 1.4 Produit mixte/déterminant

Définition 28
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On définit le **produit mixte** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$, par :

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}.$$

Le produit mixte est aussi appelé **déterminant**.

Nous étudierons le déterminant en général dans un autre chapitre.

Proposition 29
Soient $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in\mathbb{R}^3$.
Alors, on a $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})=0$ si et seulement si la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée, si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.
Un déterminant nul indique de la coplanarité.
**Attention !** Pour calculer un déterminant de vecteurs, il faut utiliser les coordonnées dans une base orthonormée directe (soit la base canonique, soit une autre).

Méthode 30 (**Montrer que quatre points sont coplanaires**) —
*Pour $A,B,C,D\in\mathbb{R}^3$, on regarde les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.*
*Alors, les points $A,B,C,D$ sont coplanaires si et seulement si $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ est liée, si et seulement si* $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=0$.

Proposition 31 (**Propriétés du déterminant**)
Soient $u,v,w,z\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $\det(u,v,z) = -det(v,u,w)$.
   Le déterminant est **anti-symétrique**. (permuter deux vecteurs multiplie le déterminant par $-1$)
2. $\det(u,v,(w+\lambda z)) = \det(u,v,w)+\lambda\det(u,v,z)$.
3. $\det(u,(v+\lambda z),w) = \det(u,v,z)+\lambda\det(u,w,z)$.
4. $\det((u+\lambda z),v,w) = \det(u,v,w)+\lambda\det(w,v,z)$.
   Le déterminant est tri-linéaire (linéaire à gauche, linéaire au milieu, linéaire à droite).

**Preuve** — On écrit $u=(x,y,z)$, $v=(x',y',z')$, $w=(x'',y'',z'')$, $z=(a,b,c)$ les coordonnées de $u,v,w,z$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on fait les calculs. □

La quantité $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ correspond au volume du parallélépipède défini par $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, orientée selon l'ordre de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ (sens direct ou non).
Cela fournit une formule pratique pour calculer le volume d'un paralléllépipède $ABCDEFGH$ :

$$Volume(ABCDEFGH) = |\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AH})|.$$

De même, un parallélépipède est de volume nul si et seulement s'il est plat : c'est-à-dire si et seulement si les points $A,B,C,D,E,F,G,H$ sont coplanaires (ou ssi les vecteurs $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ sont liés). On retrouve le lien entre déterminant nul et famille de vecteurs liée.

Pour $u=(x,y,z), v=(x',y',z'), w=(x'',y'',z'')$, on le note aussi : $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$.
Cette écriture du déterminant est pratique pour faire les calculs (car elle est visuelle). On l'utilise beaucoup en SI et en mathématiques.

Remarque 32 — *Quand on a deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, on se sert uniquement du produit vectoriel. Il est moins lourd en calculs. On n'utilise le déterminant que pour trois vecteurs, dans de rares cas.*

## 1.5 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cartésiennes sont très pratiques en géométrie car elles se comportent bien pour les translations (déplacer $M$ d'un vecteur $\overrightarrow{u}$) et pour les dilatations (dilater $\overrightarrow{OM}$ d'un facteur $\lambda$).
Pour les rotations, les calculs sont faisables mais un peu plus volumineux (on utilise des matrices de rotations).

On préfère parfois utiliser un autre système de coordonnées, adapté au cas des rotations. Ce sont les coordonnées cylindriques. On les utilise beaucoup en Physique et en SI dans le cas de rotations et de mouvements périodiques.

Proposition 33 (**Coordonnées cylindriques d'un point**)
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace $\mathbb{R}^3$.
Soit $M \in \mathbb{R}^3$, de coordonnées $(x, y, z)$.
Alors il existe $r \geq 0, h \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 2\pi[$ tels que $M = (r\cos(t), r\sin(t), h)$.
Les nombres $r$,$t$,$h$ sont appelés les **coordonnées cyindriques** de $M$.
Si $M \neq O$, alors ces coordonnées sont uniques. De plus, on a :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ t = Arg(x + iy) \text{ et } h = z.$$

Les coordonnées polaires de $M$ représentent la distance à l'origine du projeté de $M$ dans le plan $Oxy$, l'angle entre l'axe des abscisses et la droite $(Op(M))$, et la hauteur de $M$.

Méthode 34 (**Calculer les coordonnées cylindriques d'un point** $M$) —
*On écrit les coordonnées de $M$ dans une b.o.n.d. (en général la base canonique) : $M = (x, y, z)$.*
*On pose le nombre complexe $z = x + iy$.*
*On calcule la forme exponentielle de $z$ : $z = re^{it}$. (Rappel : $r = |z|$, et $t$ est un argument de $z$)*
*Alors, les coordonnées polaires de $M$ sont $(r, t, z)$.*

Passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes est facile :
On pose $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$, et $z = h$.
C'est le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques qui demande plus de calculs (trouver $t$, surtout).

## 1.6 Plans

Définition 35 (**Plan passant par un point, dirigée par deux vecteurs**)
Un plan $\mathcal{P}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ est caractérisé par deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ non-colinéaires, et un point $A \in \mathbb{R}^3$ par lequel passe le plan :

$$\mathcal{D} = \{A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \left\{M \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \overrightarrow{AM} \in Vect(\vec{u}, \vec{v})\right\}.$$

Pour $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct, avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ on a alors :

$$D' = \{(x_A + tu_1 + sv_1, y_A + tu_2 + sv_2, z_A + tu_3 + sv_3),\ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Cette dernière écriture est appelée un **paramétrage** du plan $P$.

La troisième écriture traduit le fait que $\mathcal{P} = A + Vect(\vec{u}, \vec{v})$. C'est l'ensemble de tous les points obtenus en translatant $A$ par une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Cette écriture permet d'obtenir une <u>équation cartésienne</u> de $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{AM} \in Vect(\vec{u}, \vec{v}) \\
&\iff \overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \\
&\iff (x - x_A)(u_2v_3 - u_3v_2) + (y - y_A)(u_3v_1 - v_1u_3) + (z - z_A)(u_1v_2 - u_2v_1) = 0 \\
&\iff (x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0 \\
&\iff xa + yb + zc = d
\end{aligned}$$

Proposition 36 (**Equation cartésienne de plan**)
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0)$.
Alors, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by + cz = d$ est un plan $\mathbb{R}^3$ de l'espace.
L'équation $ax + by + cz = d$ est appelée **équation cartésienne** de $P$.

On peut résoudre l'équation cartésienne associée au plan $P$ (résolution d'un système linéaire $1 \times 3$), pour retrouver le paramétrage de celle-ci.

Cela revient en fait à retrouver les coefficients de deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et les coordonnées d'un point $A \in P$.

Définition 37 (**Plan passant par trois points**)
Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ trois points non alignés.
On définit le plan $\mathcal{P}$ de l'espace passant par $A, B$ et $C$ comme le plan passant par $A$, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. C'est-à-dire :

$$\mathcal{P} = \left\{A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Définition 38 (**Vecteur normal à un plan de l'espace**)
Soit $P$ un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$.
On appelle **vecteur normal à** $P$ un vecteur $\overrightarrow{n}$ qui est non-nul et orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.
Comme $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont non-colinéaires, un vecteur normal est alors $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

Définition 39 (**Plan passant par un point, avec un vecteur normal**)
Soient $A \in \mathbb{R}^3$ un point et $\overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^3$ non-nul.
On définit le plan $\mathcal{P}$ de l'espace passant par $A$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ comme :

$$D = \{M \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0\}.$$

C'est le plan passant par $A$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ orthogonaux à $\overrightarrow{n}$.

Méthode 40 (**Déterminer un vecteur normal à un plan**) —
*Pour $P$ un plan dont on connaît un point $A$ et deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur normal au plan $P$.*
*Si on connaît l'équation cartésienne $ax + by + cz = d$ du plan $P$, alors le vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ est un vecteur normal à $P$.*

Méthode 41 (**Déterminer une b.o.n. d'un plan**) —
*Pour $P$ un plan dont on connaît un point $A$ et deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, on peut déterminer une b.o.n. de la façon suivante.*
*On pose $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, vecteur normal au plan $P$.*
*On pose $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{u}$. C'est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{n}$, donc dans $Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et qui est aussi orthogonal à $\overrightarrow{u}$.*
*Enfin, on pose $\overrightarrow{u}' = \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ et $\overrightarrow{v}'' = \frac{\overrightarrow{v}'}{\|\overrightarrow{v}'\|}$.*
*Ce sont des vecteurs de norme 1, qui sont orhogonaux, et qui forment une base de $Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Définition 42 (**Distance entre deux points de l'espace**)
Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct, et $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B) \in \mathbb{R}^3$ des points de l'espace.
On définit la distance entre $A$ et $B$, notée $dist(A, B)$, par :

$$dist(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

C'est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et la longueur du segment $[AB]$.

Définition 43 (**Distance d'un point à un plan**)
Soient $M \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{P}$ un plan.
On définit la distance entre $M$ et $\mathcal{P}$, notée $dist(M, \mathcal{P})$, par :

$$\text{dist}\,(M, \mathcal{P}) = \inf\left\{\left\|\overrightarrow{MA}\right\| \text{ avec } A \in \mathcal{P}\right\}.$$

Définition 44 (**Projeté orthogonal d'un point sur un plan**)
Soient $P$ un plan, et $M \in \mathbb{R}^3$ un point. Soient $A \in P$ un point de $P$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ des vecteurs directeurs de $P$.
On définit **le projeté orthogonal de** $M$ **sur** $P$, noté $P_P(M)$, par :

$$P_P(M) = A - \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}}.\overrightarrow{n},$$

où $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. C'est un point sur le plan $P$, et sa construction ne dépend pas du point $A$ choisi ni des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ choisis.

MÉTHODE 45 (**Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan**) —
*Pour déterminer le projeté de $M$ sur le plan $P$, $P_P(M)$ :*
*Calculer les coordonnées d'un point $A \in P$, et les coefficients de deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de $P$.*
*Calculer $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, puis $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}$.*
*Calculer $P_P(M) = A - \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}} . \overrightarrow{n}$.*

PROPOSITION 46 (**Distance point-plan et projeté orthogonal**)
Soient $P$ un plan, et $M \in \mathbb{R}^3$ un point. Alors, on a :

$$dist(M, D) = \|\overrightarrow{Mp_P(M)}\| = dist(M, P_P(M)).$$

Le projeté orthogonal de $M$ sur $P$ est le point de $P$ qui est le plus proche de $M$.

**Preuve** —(Faire un dessin, et utiliser le théorème de Pythagore.) □

PROPOSITION 47 (**Distance point-plan et projeté orthogonal**)
Soient $E$ un plan, et $M \in \mathbb{R}^3$ un point. Soient $A$ un point de $P$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $P$. Alors, on a :

$$dist(M, D) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

La distance de $M$ à $P$ peut se calculer avec des produits scalaires et un vecteur normal.

MÉTHODE 48 (**Calculer la distance entre un point et un plan**) —
*Pour calculer la distance entre $M$ et $P$ :*
*On détermine un point $A \in P$, un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à $P$, et on calcule $\frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$. (Méthode rapide)*
*Ou bien, on détermine le projeté orthogonal de $M$ sur $P$, et on calcule $dist(M, p_P(M))$. (Méthode plus longue)*

## 1.7 Droites

DÉFINITION 49 (**Droite passant par un point, dirigée par un vecteur**)
Une droite $\mathcal{D}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ est caractérisée par un vecteur directeur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ et un point $A \in \mathbb{R}^3$ par lequel passe la droite :

$$\mathcal{D} = \{A + \lambda \overrightarrow{u},\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{ M \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0} \right\}.$$

Pour $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct, avec $A(x_A, y_A, z_A)$ et $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, on a alors :

$$D' = \{(x_A + tu_1, y_A + tu_2, z_A + tu_3),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Cette dernière écriture est appelée un **paramétrage** de la droite $D$.

La troisième écriture traduit le fait que $\mathcal{D} = A + Vect(\overrightarrow{u})$. C'est l'ensemble de tous les points obtenus en translatant $A$ par un multiple du vecteur $\overrightarrow{u}$.

PROPOSITION 50 (**Equation cartésienne de droite**)
Soient $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$, tels que $((a, b, c), (e, f, g))$ est une famille libre .
Alors, l'ensemble des solutions du système d'équations $ax + by + cz = d$ et $ex + fy + gz = h$ est une droite $D$ de l'espace.
Les équations $ax + by + cz = d$ et $ex + fy + gz = h$ sont appelées **équations cartésiennes** de $D$.

On peut résoudre les équations cartésiennes associées à la droite $D$ (résolution d'un système linéaire $3 \times 3$), pour retrouver le paramétrage de celle-ci.
Cela revient en fait à retrouver les coefficients d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et les coordonnées d'un point $A \in D$.
Pour obtenir des équations cartésiennes de $D$ à partir de $A$ et de $\overrightarrow{u}$, il faut déterminer deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ qui sont orthogonaux à $\overrightarrow{u}$.
Alors, on a $M \in D$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{w} = 0$.

Définition 51 (**Droite passant par deux points**)
Soient $A, B \in \mathbb{R}^3$ deux points distincts.
On définit la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par $A$ et par $B$ comme la droite passant par $A$, de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. C'est-à-dire :

$$\mathcal{D} = \left\{ A + \lambda \overrightarrow{AB},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Définition 52 (**Droite passant par deux plans**)
Soient $P_1, P_2$ deux plans de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas parallèles et pas égaux.
On définit la droite $\mathcal{D}$ de l'espace contenue dans $P_1$ et $P_2$ par :

$$D = \{M \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } M \in P_1, M \in P_2\}.$$

Pour $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, n_3)$ un vecteur orthogonal à $P_1$ et $n' = (n_1', n_2', n_3')$ un vecteur orthogonal à $P_2$, la droite $D$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$.

Dans les équations cartésiennes $ax + by + cz = d$ et $ex + fy + gz = h$ de la droite $D$, les vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ et $\overrightarrow{n}' = (e, f, g)$ sont des vecteurs normaux à $D$.
Les solutions d'une équation cartésienne définissent un plan. Il faut deux équations cartésiennes pour avoir une droite (intersection de deux plans)

Définition 53 (**Distance d'un point à une droite**)
Soient $M \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{D}$ une droite.
On définit la distance entre $M$ et $\mathcal{D}$, notée $dist(M, \mathcal{D})$, par :

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \inf \left\{ \left\| \overrightarrow{MA} \right\| \text{ avec } A \in \mathcal{D} \right\}.$$

Définition 54 (**Projeté orthogonal d'un point sur une droite**)
Soient $D$ une droite, et $M \in \mathbb{R}^3$ un point. Soient $A \in D$ un point de $D$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $D$.
On définit **le projeté orthogonal de** $M$ **sur** $D$, noté $p_D(M)$, par :

$$p_D(M) = A + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} . \overrightarrow{u}.$$

C'est un point sur la droite $D$. Sa construction ne dépend pas du point $A$ choisi ni du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ choisi.

Méthode 55 (**Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite**) —
*Pour déterminer le projeté de $M$ sur la droite $D$, $p_D(M)$ :*
*Calculer les coordonnées d'un point $A \in D$, et les coefficients d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $D$ (si possible de norme $1$).*
*Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}$.*
*Calculer $p_D(M) = A + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} . \overrightarrow{u}$.*

Proposition 56 (**Distance point-droite et projeté orthogonal**)
Soient $D$ une droite, et $M \in \mathbb{R}^3$ un point. Alors, on a :

$$dist(M, D) = \|\overrightarrow{Mp_D(M)}\| = dist(M, P_d(M)).$$

Le projeté orthogonal de $M$ sur $D$ est le point de $D$ qui est le plus proche de $M$.

**Preuve** —(Faire un dessin, et utiliser le théorème de Pythagore.)
Soit $B \in \mathcal{D}$. On a :

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{MB} \right\|^2 &= \left\| \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(M)B} \right\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{Mp(M)} \right\|^2 + 2\overrightarrow{Mp(M)} \cdot \overrightarrow{p(M)B} + \left\| \overrightarrow{p(M)B} \right\|^2 \\ &= \left\| \overrightarrow{Mp(M)} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{p(M)B} \right\|^2 \geq \left\| \overrightarrow{Mp(M)} \right\|^2. \end{aligned}$$

On remarque de plus qu'on a égalité si et seulement si $B = p(M)$.
Donc la distance est uniquement atteinte en $p(M)$. □

Méthode 57 (**Calculer la distance entre un point et une droite**) —
*Pour calculer la distance entre $M$ et $D$ :*
*On calcule $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$.*
*D'après le théorème de Pythagore, on a $dist(M, D)^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 - \|\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} \overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 - \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u})^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$.*

### 1.8 Sphères

Définition 58 (**Equation cartésienne de sphère**)
Soient $\Omega = (x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega) \in \mathbb{R}^3$ et $r \geq 0$.
On définit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega$ et de rayon $r$ par :

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } (x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 + (z-z_\Omega)^2 = r^2\}.$$

Proposition 59 (**Paramétrage d'une sphère**)
Soient $\Omega \in \mathbb{R}^3$, $r \geq 0$, et $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega$ et de rayon $r$. Alors, on a :

$$\mathcal{S} = \{(x_\Omega + r\cos(t)\cos(s), y_\Omega + r\sin(t)\cos(s), z_\Omega + r\sin(s)),\ t \in [0, 2\pi[\}.$$

**Démonstration** —Admis.

Méthode 60 (**Déterminer les points d'intersection entre deux sphères**) —
*Pour déterminer les points d'intersection de deux sphères $C$ et $C'$ :*
*On écrit les deux équations cartésiennes associées : $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = r_1^2$, $(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = r_2^2$. L'ensemble des points d'intersection est l'ensemble des solutions d'un système de deux équations.*
*On applique l'opération $L_2 \to L_2 - L_1$ pour éliminer les termes $x^2$, $y^2$ et $z^2$.*
*Avec la nouvelle équation $L_2$, on exprime $z$ en fonction de $x$ et de $y$.*
*On remplace $z$ dans $L_1$ par l'équation obtenue.*
*On termine la résolution pour voir l'ensemble de solutions obtenu. (chercher à obtenir une équation de cercle)*

L'intersection entre trois sphères peut être l'ensemble vide (sphères trop éloignées), un cercle (cas classique), un point (les sphères sont tangentes), ou une sphère (les sphères sont égales).
On peut connaître le nombre de solutions en fonction des rayons $r_1, r_2$ et de la distance entre les centres $d(\Omega, \Omega')$.

**Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :**

- Espace $\mathbb{R}^3$, points, vecteurs, plans. Relation de Chasles pour les vecteurs. Repère de l'espace, coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$.
- Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} \cdot \vec{v}$, vecteurs orthogonaux. Norme d'un vecteur $\|\vec{u}\|$. Bases orthonormées (b.o.n.). Bases orhtonormées directes (b.o.n.d.).
  Montrer que deux droites sont perpendiculaires avec un produit scalaire.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz pour $|\vec{u} \cdot \vec{v}|$. Bilinéarité du produit scalaire.
  Projeté orthogonal d'un vecteur.
- Produit vectoriel. Savoir calculer un produit vectoriel. Le produit vectoriel est nul ssi les vecteurs sont colinéaires. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est une fonction bilinaire et alternée.
  Savoir montrer que deux droites sont parallèles/trois points sont alignés avec un calcul de produit vectoriel.
  Le produit vectoriel est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Savoir détrminer un vecteur normal à un plan $P$.
- Déterminant/produit mixte. Savoir calculer un déterminant. Le déterminant de trois vecteurs est nul ssi la famille est liée. det est tri-linaire et alterné.
  Savoir montrer que quatre points sont coplanaires avec un calcul de déterminant.
- Coordonnées cylindriques. Savoir passer des coordonnées cartésiennes aux cylindriques, et vice-versa.
- Différentes définitions de plans (passant par trois points, un point et deux vecteurs directeurs, un point et un vecteur normal, équation cartésienne, paramétrage). Vecteur normal à un plan. Savoir passer d'une écriture à une autre.
- Différentes définitions de droites (passant par deux points, un point et un vecteur directeur, équations cartésiennes, paramétrage). Savoir passer d'une écriture à une autre.
- Distance entre deux points, distance point-droite. Projeté orthognal d'un point $M$ sur une droite $D$. Calcul de la distance $dist(M, D)$.

- Projeté orthognal d'un point $M$ sur un plan $P$. Distance point-plan. Savoir calculer la distance $dist(M, P)$.
- Equations cartésiennes de sphères, équations paramétriques de cercles.