Chapitre 13
Géométrie dans le plan

Table des matières

Vidal AGNIEL

1 Géométrie dans le plan

Ce chapitre revient sur les notions de géométrie dans le plan $\mathbb{R}^2$, et les consolide. Tous les objets utilisés se retrouvent dans d'autres chapitres au programme des classes préparatoires (espaces vectoriels, bases, distance/norme, produit scalaire).
Le plan $\mathbb{R}^2$ est l'un des espaces vectoriels les plus simples sur lesquels toutes ces notions peuvent être visualisées (faire des dessins pour se représenter une situation), et sur lesquels on peut faire facilement des calculs (dans $\mathbb{R}^n$ les calculs sont plus longs).
En Physique et en SI, le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ sont des ensembles fondamentaux : ce sont dans ces ensembles que tous les phénomènes se déroulent. Connaître leur géométrie aide énormément à comprendre et à prédire ces phénomènes.

1.1 Repère, coordonnées cartésiennes

Dans ce chapitre, **le plan** $\mathbb{R}^2$ pourra aussi être appelé $\mathcal{P}$. En physique, on prend souvent comme plan $\mathcal{P}$ un plan inclus dans $\mathbb{R}^3$ (une "section" de $\mathbb{R}^3$).
D'un point de vue mathématique, tous ces plans représentent le même ensemble avec la même structure. On parle d'ailleurs **du** plan réel.
Les éléments du plan sont **les points**.
Dans le plan, on peut aussi construire des **vecteurs**. Nous avons revu cette construction au chapitre précédent. Ici, nos vecteurs seront issus de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (du **plan vectoriel**).

Définition 1 (**Points et vecteurs**)
Soit $\mathcal{P}$ le plan réel. Soient $A, B \in \mathcal{P}$.
Alors, il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ tel que B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$: $B = A + \vec{u}$.
Ce vecteur est noté $\overrightarrow{AB}$. C'est le vecteur associé aux points A et B.

Proposition 2 (**Relation de Chasles**)
Soient $A, B, C \in \mathcal{P}$. On a alors :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Définition 3 (**Repère du plan, coordonnées cartésiennes**)
Soit $\mathcal{P}$ le plan réel.
Un **repère** de $\mathcal{P}$ est la donnée d'un point $O \in \mathcal{P}$ et d'une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ de vecteurs (base de l'e.v. $\mathbb{R}^2$).
Tout point $M \in \mathcal{P}$ du plan s'écrit alors de manière unique :
$$M = O + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}.$$
Les nombres réels x, y sont appelées **coordonnées cartésiennes** de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Proposition 4 (**Changement de repère cartésien**)
Soit $\left(\Omega, \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\right)$ un autre repère de $\mathcal{P}$, avec $\begin{cases} \Omega & = O + \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{i}' & = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{j}' & = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j} \end{cases}$.
Alors, pour $M = O + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, on a :
$$M = \Omega + x'\overrightarrow{i}' + y'\overrightarrow{j}', \qquad \text{avec} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

1.2 Produit scalaire de vecteurs

Définition 5 (**Produit scalaire**)
Soient $\overrightarrow{u} = (x, y), \overrightarrow{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On définit le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ ou $\langle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle$, par :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'.$$

Définition 6 (**Vecteurs orthogonaux**)
Soient $\overrightarrow{u} = (x, y), \overrightarrow{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' = 0$.

Par exemple, $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont orthogonaux. De même, $(1,0)$ et $(0,-10)$ sont orthogonaux.

Définition 7 (**Norme d'un vecteur**)
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
On définit la **norme** de $\overrightarrow{u}$, notée $\|\overrightarrow{u}\|$, par

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

On a en fait : $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$.

Par exemple, le vecteur $(1,0)$ est de norme 1. Le vecteur $(1,2)$ est de norme $\sqrt{5}$.

Définition 8 (**Base orthogonale, base orthonormée**)
Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base de $\mathbb{R}^2$.
- On dit que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est **orthogonale** si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ($\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$).
- On dit que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est **orthonormée** si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et de norme 1 ($\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0, \|\overrightarrow{u}\| = 1, \|\overrightarrow{v}\| = 1$).

Pour $\mathcal{P}$ le plan réel, et O un point de $\mathcal{P}$, on dit alors que $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un **repère orthonormé**.

Souvent, on abrège base orthonormée en b.o.n., et base orthogonale en b.o.
La base canonique $((1,0),(0,1))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. En général, c'est celle-ci que l'on utilise.

Remarque 9 — *Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ non-nuls. Si $u \cdot v = 0$, alors la famille (u,v) est libre (donc une base de $\mathbb{R}^2$).*
En effet, si la famille (u,v) était liée on aurait $v = \lambda u$ avec $\lambda \neq 0$, d'où :
$0 = u \cdot v = u \cdot (\lambda u) = \lambda(u \cdot u) = \lambda\|u\|^2 = \lambda(x^2+y^2)$. Comme $u = (x,y)$ est non-nul, on ne peut pas avoir $x^2+y^2 = 0$.
Donc, il suffit de calculer un produit scalaire pour montrer que la famille (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 10 (**Produit scalaire et angle**)
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$. Alors, on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|u\|.\|v\|.\cos(\text{angle}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})).$$

Méthode 11 (**Calculer l'angle formé par trois points** ABC) — *On calcule souvent l'angle entre trois points ABC (en B) avec la formule précédente : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BR}$ associés, dans <u>une base orthonormée</u>.*
On calcule leur norme, et leur produit scalaire.
Avec la relation, on en déduit le cosinus de l'angle ABC.
Grâce aux valeurs particulières de la fonction cos *(ou à l'ordinateur), on en déduit la valeur de l'angle ABC.*
***Attention !** Les angles positifs/négatifs sont définis avec le sens <u>trigonométrique</u> (le sens anti-horaire).*

Remarque 12 — *Si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, cela veut dire que l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est un angle droit (de $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$).*
*Un produit scalaire nul indique des droites/segments **perpendiculaires**.*
***Attention !** Pour calculer un produit scalaire d'un vecteur, il faut utiliser les coordonnées dans une base orthonormée directe (soit la base canonique, soit une autre).*

Méthode 13 (**Montrer que deux droites sont perpendiculaires**) — *On prend $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ des vecteurs directeurs des deux droites D et D'.*
On calcule leurs coordonnées dans la base canonique (ou dans une b.o.n).
On calcule leur produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
Le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est nul si et seulement si D et D' sont perpendiculaires.

Corollaire 14 (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$. Alors, on a :

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|u\|.\|v\|.$$

Preuve — On utilise la proposition précédente et le fait que $|\cos(a)| \leq 1$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. $\square$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une inégalité qui permet de majorer le produit scalaire de deux vecteurs quand on connaît leur norme (quand on connaît la "longueur" du vecteur, mais pas ses coordonnées exactes). Cela sert beaucoup en analyse.

Proposition 15 (**Propriétés du produit scalaire**)
Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $u \cdot v = v \cdot u$.
   Le produit scalaire est **symétrique**.
2. $u \cdot (v + \lambda w) = (u \cdot v) + \lambda(u \cdot w)$.
3. $(u + \lambda w) \cdot v = (u \cdot v) + \lambda(w \cdot v)$.
   Le produit scalaire est bilinéaire (linéaire à gauche, linéaire à droite).
4. $u \cdot u = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Preuve — On écrit $u = (x, y)$, $v = (x', y')$, $w = (x'', y'')$ les coordonnées de u, v, w dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et on fait les calculs. □

Proposition 16 (**Produit scalaire et angle**)
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ qui sont orthogonaux. Alors, on a :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Proposition 17 (**Formule d'Al-Kashi**)
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$. Alors, on a :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|.\|v\|.\cos(\text{angle}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})).$$

Preuve — On utilise le fait que $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle$, puis on développe le produit scalaire par bilinéarité. □

Définition 18 (**Projeté orthogonal**)
Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ non-nul.
Pour $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, on définit le **projeté orthogonal** de $\overrightarrow{u}$ selon $\overrightarrow{v}$ par :

$$p_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u}) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}.\overrightarrow{v}.$$

Si $\overrightarrow{v}$ est de norme 1, on a $p_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\overrightarrow{v}$.

Exemple 19 —

1. *Pour $v = (1, 0)$, le projeté orthogonal de $u = (x, y)$ selon v est le vecteur $(x, 0)$.*
2. *Pour $v' = (0, 1)$, le projeté orthogonal de $u = (x, y)$ selon v' est le vecteur $(0, y)$.*
3. *Pour $v'' = (1, 1)$, le projeté orthogonal de $u = (x, y)$ selon v'' est le vecteur $\frac{x+y}{2}.(1, 1) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$.*

Si on complète la famille $(\overrightarrow{v})$ en une base orthogonale $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, le vecteur u se décompose en $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{v} + b\overrightarrow{w}$. Alors, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ selon $\overrightarrow{v}$ sera $p_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{u}) = a\overrightarrow{v}$. Le projeté de $\overrightarrow{u}$ est la composante selon $\overrightarrow{v}$ dans la base orthogonale.
Cette notion est fortement utilisée en Physique et en SI afin de passer d'une étude dans le $\mathcal{P}$ à une étude sur une droite D (passer de la dimension 2 à la dimension 1).
Pour calculer un projeté orthogonal, on utilise un produit scalaire. Cela est facile à calculer.
Et, avec deux projetés orthogonaux de u selon des directions différentes, on peut retrouver la valeur du vecteur $\overrightarrow{u}$ initial.

1.3 Produit mixte/déterminant

Définition 20
Soient $\overrightarrow{u} = (x, y), \overrightarrow{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On définit le **produit mixte** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, par :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y.$$

Le produit mixte est aussi appelé **déterminant**.

Nous étudierons le déterminant en général dans un autre chapitre.

Proposition 21 (**Déterminant et angle**)
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$. Alors, on a :

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin(\text{angle}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})).$$

Attention ! Les angles positifs/négatifs sont définis avec le sens trigonométrique (le sens anti-horaire).

Proposition 22
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$.
Alors, on a $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires (si l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est plat : 0 ou π).
Un déterminant nul indique des droites/segments **parallèles**.

Attention ! Pour calculer un déterminant de deux vecteurs, il faut utiliser les coordonnées dans une base orthonormée directe (soit la base canonique, soit une autre).

Définition 23 (**Base orthonormée directe**)
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.
On dit que cette base est **directe** si le vecteur $\overrightarrow{j}$ s'obtient en appliquant une rotation de $\frac{\pi}{2}$ au vecteur $\overrightarrow{i}$. (Si la base respecte le sens trigonométrique) On abrège cela en b.o.n.d.

La base canonique $((1,0),(0,1))$ est une b.o.n.d., alors que la base $((0,1),(1,0))$ est une b.o.n. mais n'est pas directe (les vecteurs sont dans le mauvais ordre).

Proposition 24
Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ et soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une b.o.n.d. de $\mathbb{R}^2$.
Alors, pour (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées de u, v dans cette b.o.n.d., on a :

$$\det(u, v) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Pour calculer $\det(u, v)$, il faut connaître les coefficients de u et de v dans une base orthonormée directe.

Méthode 25 (**Montrer que deux droites sont parallèles**) — *On prend $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ des vecteurs directeurs des deux droites D et D'.*
On calcule leurs coordonnées dans la base canonique (ou dans une b.o.n).
On calcule leur déterminant $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Le déterminant $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est nul si et seulement si D et D' sont parallèles.

Méthode 26 (**Montrer que trois points sont alignés**) — *Pour $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, on regarde les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.*
Alors, les points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$, si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.

Proposition 27 (**Propriétés du déterminant**)
Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $\det(u, v) = -det(v, u)$.
   Le déterminant est **anti-symétrique**.
2. $\det(u, u) = 0$.
   Le déterminant est **alterné**.
3. $\det(u, (v + \lambda w)) = \det(u, v) + \lambda \det(u, w)$.
4. $\det((u + \lambda w), v) = \det(u, v) + \lambda \det(w, v)$.
   Le déterminant est bilinéaire (linéaire à gauche, linéaire à droite).

Preuve — On écrit $u = (x, y)$, $v = (x', y')$, $w = (x'', y'')$ les coordonnées de u, v, w dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et on fait les calculs. □

Point de vue dans $\mathbb{C}$

Pour $\overrightarrow{u} = (x, y)$, $\overrightarrow{v} = (x', y')$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, nous avons vu au Chapitre Nombres complexes que l'on pouvait associer les nombres complexes $z = x + iy$,$z' = x' + iy'$.

Alors, on a : $\bar{z}z' = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - x'y) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) + i \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Autrement dit :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = Re(\bar{z}z') \text{ et } \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = Im(\bar{z}z').$$

On retrouve un lien fort entre les propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$ et les outils que l'on utilise en géométrie.

Déterminant et géométrie

La quantité $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ correspond à l'aire du parallélogramme défini par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, orientée selon l'ordre de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (sens diect (trigonométrique) ou non).
Cela fournit une formule pratique pour calculer l'aire d'un parallélogramme $ABCD$:

$$Aire(ABCD) = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|.$$

De même, un parallélogramme est d'aire nulle si et seulement s'il est plat : c'est-à-dire si et seulement si les points A, B, C, D sont alignés (ou ssi les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont colinéaires). On retrouve le lien entre déterminant nul et vecteurs colinéaires.

Pour $u = (x, y), v = (x', y')$, on note aussi : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.
Cette écriture du déterminant est pratique pour faire les calculs (car elle est visuelle). On l'utilise beaucoup en SI et en mathématiques.

1.4 Coordonnées polaires

Les coordonnées cartésiennes sont très pratiques en géométrie car elles se comportent bien pour les translations (déplacer M d'un vecteur $\overrightarrow{u}$) et pour les dilatations (dilater $\overrightarrow{OM}$ d'un facteur λ).
Pour les rotations, les calculs sont faisables mais un peu plus volumineux (on utilise des matrices de rotations $\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ (rotation d'angle t, de centre $(0, 0)$)
On préfère parfois utiliser un autre système de coordonnées, adapté au cas des rotations. Ce sont les coordonnées polaires. On les utilise beaucoup en Physique et en SI dans le cas de rotations et de mouvements périodiques (orbie de planètes, déplacement d'une roue de vélo, par exemple).

Proposition 28
Coordonnées polaires d'un point] Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct du plan $\mathcal{P}$.
Soit $M \in \mathcal{P}$, de coordonnées (x, y).
Alors il existe $r \geq 0$ et $t \in [0, 2\pi[$ tels que $M = (r\cos(t), r\sin(t))$.
Les nombres r et t sont appelés les **coordonnées polaires** de M.
Si $M \neq O$, alors ces coordonnées sont uniques. De plus, on a :

$$r = sqrtx^2 + y^2 = \|\overrightarrow{OM}\| = dist(O, M) \text{ et } t = \text{angle}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}).$$

Les coordonnées polaires de M représentent sa distance à l'origine, et l'angle entre l'axe des abscisses et la droite (OM).

Preuve — Si $x = 0$ et $y = 0$, alors $r = 0$ et $t = 0$ correspondent.
Sinon, si $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $x^2 + y^2 > 0$.
La définition des coordonnées polaires donne $x = r\cos(t)$ et $y = r\sin(t)$.
Avec les propriétés de $\cos, \sin$ on a : $x^2 + y^2 = r^2$. D'où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Alors, en posant $x' = \frac{x}{r}$ et $y' = \frac{y}{r}$ (bien définis car $r > 0$), on remarque que x' et y' sont deux réels qui vérifient $x'^2 + y'^2 = 1$.
D'après les propriétés de cos et sin, il existe $t \in [0, 2\pi[$ tel que $x' = \cos(t)$ et $y' = \sin(t)$. Et, ce nombre t est unique (cela correspond à un unique point du cercle trigonométrique).
Cela démontre la proposition. $\square$

Méthode 29 (**Calculer les coordonnées polaires d'un point** M) — *On écrit les coordonnées de M dans une b.o.n.d. (en général la base canonique) : $M = (x, y)$.*
On pose le nombre complexe $z = x + iy$.
On calcule la forme exponentielle de z : $z = re^{it}$. (Rappel : $r = |z|$, et t est un argument de z)
Alors, les coordonnées polaires de M sont (r, t).

Passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes est facile : On pose $x = r\cos(t)$ et $y = r\sin(t)$.
C'est le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires qui demande plus de calculs (trouver t, surtout).

1.5 Droites

Définition 30 (**Droite passant par un point, dirigée par un vecteur**)
Une droite $\mathcal{D}$ du plan $\mathcal{P}$ est caractérisée par un vecteur directeur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ et un point $A \in \mathcal{P}$ par lequel passe la droite :

$$\mathcal{D} = \{A + \lambda\overrightarrow{u},\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ t.q. } \det\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) = 0\right\}.$$

Pour $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct, avec $A(x_A, y_A)$ et $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$, on a alors :

$$D = \{(x_A + tu_1, y_A + tu_2),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Cette dernière écriture est appelée un **paramétrage** de la droite D.

La deuxième écriture traduit le fait que $\mathcal{D} = A + Vect(\overrightarrow{u})$. C'est l'ensemble de tous les points obtenus en translatant A par un multiple du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Cette écriture permet d'obtenir une équation cartésienne de $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \text{Det}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}\right) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} u_1 & x - x_A \\ u_2 & y - y_A \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff u_1(y - y_A) - u_2(x - x_A) = 0 \\ &\iff u_1 y - u_2 x = u_1 y_A - u_2 x_A \end{aligned}$$

Proposition 31 (**Equation cartésienne de droite**)
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
Alors, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by = d$ est une droite D du plan.
L'équation $ax + by = c$ est appelée **équation cartésienne** de D.
Si D' est la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$, alors on a :

$$D' = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \text{ t.q. } u_1 y - u_2 x = u_1 y_A - u_2 x_A\}.$$

On peut résoudre l'équation cartésienne associée à la droite D (résolution d'un système linéaire 1×2), pour retrouver le paramétrage de celle-ci.
Cela revient en fait à retrouver les coefficients d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et les coordonnées d'un point $A \in D$.

Définition 32 (**Droite passant par deux points**)
Soient $A, B \in \mathcal{P}$ deux points distincts.
On définit la droite $\mathcal{D}$ du plan passant par A et par B comme la droite passant par A, de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$. C'est-à-dire :

$$\mathcal{D} = \left\{A + \lambda\overrightarrow{AB},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Définition 33 (**Vecteur normal à une droite du plan**)
Soit D une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$.
On appelle **vecteur normal à** D un vecteur $\overrightarrow{v}$ qui est non-nul et orthogonal à $\overrightarrow{u}$.
Pour $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$, un vecteur normal à $\overrightarrow{u}$ est $\overrightarrow{v} = (-u_2, u_1)$.

Définition 34 (**Droite passant par un point, avec un vecteur normal**)
Soient $A \in \mathcal{P}$ un point et $\overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^2$ non-nul.
On définit la droite $\mathcal{D}$ du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ comme :

$$D = \{M \in \mathcal{P} \text{ t.q. } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0\}.$$

C'est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, avec $\overrightarrow{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{n}$.
Pour $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2)$, le vecteur $\overrightarrow{u} = (-n_2, n_1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$.

Dans l'équation cartésienne $ax + by = c$ de la droite D, le vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à D.
Cette équation se réécrit en : $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n} = c$ (un produit scalaire avec $\overrightarrow{n}$ est constant).

Définition 35 (**Segment**)
Soient $A, B \in \mathcal{P}$ des points.
On définit le segment entre les points A et B par :

$$[A, B] = \left\{A + t\overrightarrow{AB} \;\mid\; t \in [0,1]\right\}.$$

Définition 36 (**Distance entre deux points**)
Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct, et $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \in \mathcal{P}$ des points du plan.
On définit la distance entre A et B, notée $dist(A, B)$, par :

$$dist(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

C'est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et la longueur du segment $[AB]$.

Définition 37 (**Distance d'un point à une droite**)
Soient $M \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ une droite.
On définit la distance entre M et $\mathcal{D}$, notée $dist(M, \mathcal{D})$, par :

$$\operatorname{dist}(M, \mathcal{D}) = \inf\left\{\left\|\overrightarrow{MA}\right\| \text{ avec } A \in \mathcal{D}\right\}.$$

Définition 38 (**Projeté orthogonal d'un point sur une droite**)
Soient D une droite, et $M \in \mathcal{P}$ un point. Soient $A \in D$ un point de D et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de D.
On définit **le projeté orthogonal de** M **sur** D, noté $p_D(M)$, par :

$$p_D(M) = A + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}.\overrightarrow{u}.$$

C'est un point sur la droite D. Sa construction ne dépend pas du point A choisi ni du vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ choisi.

Méthode 39 (**Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite**) — *Pour déterminer le projeté de M sur la droite D, $p_D(M)$:*
Calculer les coordonnées d'un point $A \in D$, et les coefficients d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D (si possible de norme 1).
Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}$.
Calculer $p_D(M) = A + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}.\overrightarrow{u}$.

Proposition 40 (**Distance point-droite et projeté orthogonal**)
Soient D une droite, et $M \in \mathcal{P}$ un point. Alors, on a :

$$dist(M, D) = \|\overrightarrow{Mp_D(M)}\| = dist(M, P_d(M)).$$

Le projeté orthogonal de M sur D est le point de D qui est le plus proche de M.

Preuve —(Faire un dessin, et utiliser le théorème de Pythagore.)
Soit $B \in \mathcal{D}$. On a :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(M)B}\right\|^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{Mp(M)}\right\|^2 + 2\overrightarrow{Mp(M)} \cdot \overrightarrow{p(M)B} + \left\|\overrightarrow{p(M)B}\right\|^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{Mp(M)}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{p(M)B}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{Mp(M)}\right\|^2.\end{aligned}$$

On remarque de plus qu'on a égalité si et seulement si $B = p(M)$.
Donc la distance est uniquement atteinte en $p(M)$. □

Proposition 41 (**Distance point-droite et projeté orthogonal**)
Soient D une droite, et $M \in \mathcal{P}$ un point. Soient A un point de D et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à D. Alors, on a :

$$dist(M, D) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

La distance de M à D peut se calculer avec des produits scalaires et un vecteur normal.

Méthode 42 (**Calculer la distance entre un point et une droite**) — *Pour calculer la distance entre M et D :*
On détermine un point $A \in D$, un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à D, et on calcule $\frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$. (Méthode rapide)
Ou bien, on détermine le projeté orthogonal de M sur D, et on calcule $dist(M, p_D(M))$. (Méthode plus longue)

1.6 Cercles

Définition 43 (**Cercle de diamètre** $[A, B]$)
Soient $A, B \in \mathcal{P}$.
On définit le cercle de diamètre $[A, B]$, noté $\mathcal{C}$, par :

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \right\}.$$

Proposition 44 (**Equation cartésienne de cercle**)
Soient $A, B \in \mathcal{P}$. On pose $\Omega = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ le milieu du segment $[AB]$, et $r = \frac{dist(A,B)}{2}$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[A, B]$. Alors, on a :

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \text{ t.q. } (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2\}.$$

Le cercle de diamètre $[A, B]$ est le cercle de centre Ω et de rayon r.

Preuve —Comme Ω est le milieu de $[A, B]$, on a $\overrightarrow{A\Omega} = -\overrightarrow{B\Omega}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff \left(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}\right) \cdot \left(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}\right) = 0 \\ &\iff \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = \left\|\overrightarrow{A\Omega}\right\|. \end{aligned}$$

On obtient bien le cercle de centre Ω et de rayon $r = \|A\Omega\| = \|B\Omega\|$. □

Proposition 45 (**Paramétrage d'un cercle**)
Soient $\Omega \in \mathcal{P}$, $r \geq 0$, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon r. Alors, on a :

$$\mathcal{C} = \{(x_\Omega + r\cos(t), y_\Omega + r\sin(t)),\ t \in [0, 2\pi[\}.$$

Démonstration — Admis.

Méthode 46 (**Déterminer les points d'intersection entre deux cercles**) — *Pour déterminer les points d'intersection de deux cercles C et C' :*
On écrit les deux équations cartésiennes associées : $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = r_1^2$, $(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 = r_2^2$.
L'ensemble des points d'intersection est l'ensemble des solutions d'un système de deux équations.
On applique l'opération $L_2 \to L_2 - L_1$ pour éliminer les termes x^2 et y^2.
Avec la nouvelle équation L_2, on exprime y en fonction de x.
On remplace y dans L_1 par l'équation obtenue.
On termine la résolution pour voir l'ensemble de solutions obtenu.

L'intersection entre deux cercles peut être l'ensemble vide (cercles trop éloignés), deux points (cas classique), un point (les cercles sont tangents), ou un cercle (les cercles sont égaux).
On peut connaître le nombre de solutions en fonction des rayons r_1, r_2 et de la distance entre les centres $d(\Omega, \Omega')$.

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

- Plan $\mathbb{R}^2$, points, vecteurs. Relation de Chasles pour les vecteurs. Repère du plan, coordonnées cartésiennes (x, y).
- Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} \cdot \vec{v}$, vecteurs orthogonaux. Norme d'un vecteur $\|\vec{u}\|$. Bases orthonormées (b.o.n.)
  Montrer que deux droites sont perpendiculaires avec un produit scalaire.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz pour $|\vec{u} \cdot \vec{v}|$. Bilinéarité du produit scalaire.
  Projeté orthogonal d'un vecteur.
- Déterminant/produit mixte. Savoir calculer un déterminant. Le déterminant de deux vecteurs est nul ssi les vecteurs sont colinéaires. det est bilinaire et alterné.
  Savoir montrer que deux droites sont parallèles avec un calcul de déterminant.
- Coordonnées polaires. Savoir passer des coordonnées cartésiennes aux polaires, et vice-versa.
- Lien entre toutes les notions et les opérations sur les nombres complexes.
- Différentes définitions de droites (passant par deux points, un point et un vecteur directeur, équation cartésienne, paramétrage). Savoir passer d'une écriture à une autre.
  Vecteur normal à une droite D.
- Distance entre deux points, distance point-droite. Projeté orthognal d'un point M sur une droite D. Calcul de la distance $dist(M, D)$.
- Equations cartésiennes de cercles, équations paramétriques de cercles.