Journée d'immersion en CPGE
Mathématiques

Exercice 1.

Simplifier :

1. $(1-1+1)(2-2+2)$.
2. $(2+0+2+1)-(2\times 0\times 2\times 1)$.
3. $\frac{2}{-1}$.
4. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$.
5. $\frac{(1-2)^2-3}{4^4-1}$.
6. $\frac{\sqrt{24}}{6}$.
7. $\frac{(-3)^3}{4-2^2}$.
8. $(x+1)^2-(x^2-1)$.
9. $\frac{(1-(-1)^n)}{2}$.
10. $(1+i)^3$.

Exercice 2.

1. Résoudre $\frac{x-3}{x+1}=1$.
2. Résoudre $\frac{3x+5}{2x-1}=\frac{2x-7}{3x+1}$.
3. Résoudre l'équation $x^4-3x^2+2=0$.
4. Résoudre l'équation $e^{2x}+3e^x-1=0$. On pourra poser $Y=e^x$.
5. On pose $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+3}}$, pour $n>0$.
   En utilisant une identité remarquable, montrer que $x_n\geq 0$, puis que $x_n\to_{n\to+\infty}0$.
6. Résoudre l'inéquation $3x+4\leq 8-4x$.

Exercice 3. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux.
Si l'énoncé est vrai, le montrer. Si l'énoncé est faux, le montrer.

1. Pour tout $x\geq 0$, on a $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{6}}$.
2. Si $2x=0$ alors $2=0$.
3. On a $a+b=5$ implique $a^2+b^2=25$.
4. On a $e^a+e^b=2\Leftrightarrow a+b=\ln(2)$.
5. On a $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
6. On a $e^0=0$.
7. On a $1/0=0$.
8. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $(-1)^n=-1^n$.
9. Pour $n\in\mathbb{N}$ on a $(1-(-1)^n)=2$.
10. On a $a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}$.
11. On a $(a+b)^3=a^3+b^3$, pour tous $a,b\in\mathbb{R}$.
12. On a $2xy\leq(x+y)^2$.
13. On a $4xy\leq(x^2+y^2)$.
14. Si une suite est convergente, alors elle est croissante et majorée.
15. Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
16. On a $\cos(0)=\cos(2\pi)=1$, $\cos(x)+\sin(x)=1$.

Exercice 4.

1. Résoudre $\frac{x-3}{x+1}=1$.
2. Résoudre $\frac{3x+5}{2x-1}=\frac{2x-7}{3x+1}$.
3. Résoudre l'équation $x^4-3x^2+2=0$.
4. Résoudre l'équation $e^{2x}+3e^x-1=0$. On pourra poser $Y=e^x$.
5. On pose $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+3}}$, pour $n>0$.
   En utilisant une identité remarquable, montrer que $x_n\geq 0$, puis que $x_n\to_{n\to+\infty}0$.
6. Résoudre l'inéquation $3x+4\leq 8-4x$.

Exercice 5 (Equations)**.** 3 vaches et 5 chèvres produisent en 3 jours autant de lait que 4 vaches et 2 chèvres en 5 jours.
Qui produit le plus de lait chaque jour, une vache ou une chèvre ?

Exercice 6.

1. Quel est le plus grand de ces nombres : $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $0,30303$, trente-trois centièmes.

2. Pour $a \geq b \geq 0$, lequel de ces nombres est égal à $\sqrt{a}-\sqrt{b}$: $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{a-b}$, $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$, $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$.
3. La moitié de 2^{1000} vaut :
4. Soit $f(x) = ax^2 - 4$ avec $a \neq 0$. Sachant que $f(f(1)) = -4$, que vaut $f(2)$: -4, 0, 1, 2, 12.
5. Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que $x^2 + ax + a = 1$ possède deux solutions distinctes ?
6. Que valent 70% de 30 moins 30% de 70 ?
7. Une quantité x augmente de 30%, puis diminue de 30%, puis diminue de 50%. Quelle est la quantité obtenue ?
8. La somme des longueurs des trois côtés d'un triangle rectangle vaut 18 tandis que la somme de leurs carrés vaut 128. Quelle est l'aire de ce triangle ?
9. On tire 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir 5 cartes de la même couleur ? d'avoir un carré d'as ?
10. Trouver une fraction $\frac{p}{q}$ telle que $\frac{p}{q} = 0,0131313\ldots$.
    On pourra regarder $(10)^2\frac{p}{q} - \frac{p}{q}$.
11. Soient a, b, c trois entiers tels que $ab = 12$, $bc = 24$, $ca = 32$. Que vaut abc ?
12. Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $x + y + xy = 340$. Combien vaut $x + y$?

Exercice 7 (Du calcul sans calculatrice)**.**

1. Calculer 142857×2, 142857×3, 142857×4, 142857×5, 142857×6.
   On pensera à être *malin*.
2. Calculer 142857×7. Que remarque-t-on ?
3. En utilisant le résultat précédent, calculer 142857×14, 142857×35.
4. En combinant les calculs précédents, calculer 142857×8, 142857×10, 142857×37.
5. Pour déterminer un produit comme 142857×68, que faut-il faire avec 68 pour obtenir le résultat très rapidement grâce aux calculs précédent ? (sans devoir poser tout le produit)
6. Calculer 142857×243, 142857×456, $(142857)^2$

Exercice 8 (Nombres complexes)**.**

1. Décrire l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z + i| = 2$.
   Donner un paramétrage de l'ensemble des solutions.
2. Décrire l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z + 2 - i| = |z - 3|$.
   Donner un paramétrage de l'ensemble des solutions.
3. Décrire l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - 1| = |z + 1| = |z + i|$.
   On fera un petit dessin pour représenter la situation.

Exercice 9 (Probabilités)**.** Soient A, B deux événements tels que $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Montrer que $\mathbb{P}(A \cup B) \in [0.5; 1]$. Que peut-on dire sur $\mathbb{P}(A \cap B)$?

Pour aller plus loin . . .

Exercice 10. Les démonstrations suivantes sont fausses. Où sont les erreurs ? Indiquer précisément quelles parties de la démonstration (quel morceau de quelle phrase) sont fausses, et expliquer pourquoi.

1. Soient a et b deux nombres réels. Supposons que $a = b$. En multipliant par a, on obtient $a^2 = ab$, donc $a^2 - b^2 = ab - b^2$. En factorisant, on en déduit que $(a + b)(a - b) = b(a - b)$, puis, en simplifiant par $a - b$, on obtient $a + b = b$, et donc $a = 0$. a étant un nombre réel quelconque, tout nombre réel est donc nul.
2. On cherche les réels x tels que $x^2 + x + 1 = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ est solution, x est non nul donc on obtient $x + 1 + \frac{1}{x} = 0$. Or $x + 1 = -x^2$ donc $\frac{1}{x} = x^2$, ce qui donne $x = 1$. Donc 1 est solution et on a $3 = 0$.

Exercice 11. Soit $\mathcal{C}$ un carré.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ un entier, on dit qu'on peut découper $\mathcal{C}$ en n carrés si on peut trouver une partition de $\mathcal{C}$ (un découpage de $\mathcal{C}$) en n carrés, carrés qui ne sont pas forcément de la même taille.

1. Montrer qu'on peut découper le carré $\mathcal{C}$ en 4 carrés, en 6 carrés, en 7 carrés et en 8 carrés.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que si on peut découper le carré $\mathcal{C}$ en n carrés, alors on peut découper $\mathcal{C}$ en $n + 3$ carrés.
3. Montrer que pour tout $n \geq 6$, on peut découper $\mathcal{C}$ en n carrés.
4. On ne peut pas découper $\mathcal{C}$ en 2, 3 ou 5 carrés.
   Démontrer cela, en essayant d'être le plus rigoureux possible.(*)
   Quel type de raisonnement utiliser ?