# Chapitre 7
# Nombres réels et suites

## Table des matières

**1 Généralités sur les suites réelles** **1**
1.1 Définitions . . . 1
1.2 Variations d'une suite . . . 2
1.3 Encadrement d'une suite . . . 4
1.4 Définition explicite, implicite, par récurrence . . . 5

**2 Suites usuelles** **7**
2.1 Suites arithmétiques et géométriques . . . 7
2.2 Suites arithmético-géométriques . . . 8
2.3 Suites définies par une somme . . . 9

**3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2** **10**
3.1 Définition . . . 10
3.2 Mise sous forme explicite . . . 11

**4 Limite d'une suite réelle** **12**
4.1 Cas des limites finies . . . 15
4.2 Cas des limites infinies . . . 15
4.3 Relations d'ordre et limites . . . 16

**5 Théorèmes d'existence de limite** **17**
5.1 Théorème de la limite monotone . . . 17
5.2 Suites adjacentes . . . 17
5.3 Théorèmes d'encadrements . . . 18
5.4 Croissances comparées . . . 19
5.5 Approximation décimale d'un réel . . . 19

**6 Suites extraites** **19**

**7 Propriétés des ensembles de nombres réels** **20**
7.1 Bornes supérieures et inférieures . . . 20
7.2 Déterminer un sup ou un inf . . . 21
7.3 Caractérisation des intervalles . . . 21

**8 Extension brève aux suites complexes** **22**

Vidal AGNIEL

Un certain nombre de concepts utiles pour ce chapitre ont été vus au fil du cours. Il s'agit :

1. Des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ (et $\mathbb{D}$).
2. De la droite réelle $\mathbb{R}$, la relation d'ordre $\leq$, ainsi que les notions de majorant, minorant, maximum et minimum d'une partie $A$.
3. Des parties de $\mathbb{R}$, en particulier les intervalles.
4. De la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$.
5. De la fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

# 1 Généralités sur les suites réelles

## 1.1 Définitions

Définition 1 (**Suite réelle**)
*Une* ***suite réelle*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On la note également* $(u_n)_{n\geq 0}$*.*
*Le nombre* $u_n$ *est appelé le* ***terme général*** *de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$*.*
*Le nombre entier* $n$ *est appelé* ***l'indice*** *du terme* $u_n$*.*
*L'ensemble des suites réelles indexées sur* $\mathbb{N}$ *est noté* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*.*

Exemple 2 — *L'expression* $(n^2)_{n\geq 0}$ *est une suite, dont le terme général est* $u_n = n^2$*.*
*Elle correspond à la fonction* $n \in \mathbb{N} \mapsto n^2 \in \mathbb{R}$*.*

Remarque 3 — ***Attention !*** *Il ne faut pas confondre la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *avec l'un de ses termes* $u_n$ *(qui est seulement un nombre).*
*De même, le nombre* $u_{n+1}$ *(terme d'indice* $n+1$ *de la suite) n'a en général rien à voir avec* $u_n + 1$ *(terme d'indice* $n$*, auquel on ajoute* $1$*).*

Définition 4 (**Suite réelle**)
*Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$*. Une* ***suite réelle*** $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est une fonction de* $[\![ n_0, +\infty [\![$ *dans* $\mathbb{R}$*.*
*Une telle suite n'est pas indexée sur* $\mathbb{N}$*, mais sur l'ensemble des entiers supérieurs à* $n_0$*.*

Remarque 5 — *La notation* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *permet d'identifier clairement l'indice initial de la suite (ici, l'indice* $n_0$*). Souvent, on a* $n_0 = 0$*,* $1$ *ou* $2$*.*
*Abus de notation : On abrège parfois* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *en* $(u_n)_n$*.*

Remarque 6 — *Attention ! Pour* $I$ *un ensemble d'entiers naturels, si on souhaite définir une suite* $(u_n)_{n\in I}$*, il faut s'assurer que son terme général* $u_n$ *existe bien, c'est-à-dire que pour tout* $n \in I$*,* $u_n$ *ait un sens.*

Exemple 7 — *La suite de terme général* $\dfrac{1}{n}$ *ne peut pas se définir pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *mais seulement à partir du rang* $n_0 = 1$*. On notera donc cette suite* $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$*. Son indice initial est* $1$*, et son premier terme est* $1$*.*
*La suite* $(\frac{1}{n-n^2})_{n\geq 2}$ *a pour indice initial* $2$*. Son premier terme est* $\frac{1}{2-4} = \frac{-1}{2}$*.*

Définition 8
*Soient* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite et* $k$ *un entier supérieur à* $n_0$*.*
*On appelle* $k$***-ième terme*** *de la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *le nombre réel* $u_{n_0+k-1}$*.*
*Le premier terme est* $u_{n_0}$*, le deuxième terme est* $u_{n_0+1}$*, ...*

Exercice 1 — *Déterminer le plus petit entier* $n_0$ *pour lequel on peut définir la suite* $(\frac{2n}{1-\frac{n^2}{7,5}})_{n\geq n_0}$*.*
*Puis, calculer les* $3$ *premiers termes de cette suite.*

### 1.2 Variations d'une suite

Tout comme les fonctions au chapitre 2, les suites réelles possèdent une notion de variation (suites croissantes, décroissantes, strictement croissantes, strictement décroissantes).

EXEMPLE 9 — *On peut vérifier la croissance et la décroissance des suites suivantes comme sur les fonctions.*

- *La suite* $(n^2)_{n\geq 0}$ *est croissante, car pour tous* $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *avec* $n \leq m$, *on a* $n^2 \leq m^2$.
- *La suite* $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ *est décroissante. En effet, pour tous entiers* $n, m$ *tels que* $1 \leq n \leq m$ *on a* $\dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{n}$.

Pour $I$ un intervalle et $x \in I$, il n'y a pas de notion de nombre réel "juste après" $x$.
Pour $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, il y a un entier "juste après" $n$, c'est $n+1$.
Ce phénomène permet de tester plus facilement la monotonie d'une suite : il suffit de comparer deux termes consécutifs ($u_n$ et $u_{n+1}$) pour toutes les valeurs de $n$ possibles.

PROPOSITION 10 (**Variations**)
*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite. Alors :*

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est* ***croissante*** *ssi pour tout* $n \in N$, $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, *on a* $u_n \leq u_{n+1}$.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est* ***décroissante*** *ssi pour tout* $n \in N$, $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, *on a* $u_n \geq u_{n+1}$ .
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est* ***constante*** *ssi pour tout* $n \in N$, $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, *on a* $u_n = u_{n+1}$.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est* ***strictement croissante*** *ssi pour tout* $n \in N$, $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, *on a* $u_n < u_{n+1}$.
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est* ***strictement décroissante*** *ssi pour tout* $n \in N$, $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, *on a* $u_n > u_{n+1}$.

*Quand* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *vérifie l'une de ces conditions, on dit qu'elle est* ***monotone***.

EXEMPLE 11 —

— *La suite* $(\dfrac{1+n}{1+n^2})_{n\geq 0}$ *est décroissante.*
*En effet, soit* $n \in \mathbb{N}$. *On a alors :*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+(n+1)}{1+(n+1)^2} - \frac{1+n}{1+n^2} \underbrace{=}_{\text{réduction au même dénominateur}} \frac{(2+n)(1+n^2)-(1+n)(1+(n+1)^2)}{(1+(n+1)^2)(1+n^2)} = \frac{-3n-n^2}{(1+(n+1)^2)(1+n^2)} \leq 0$$

— *La suite* $(v_n)_{n\geq 0}$ *définie pour tout entier* $n$ *par* $v_0 = 1$ *et* $v_{n+1} = v_n + 2$ *est croissante.*
*En effet, pour tout entier* $n$, *on a* $v_{n+1} - v_n = 2 \geq 0$.
— *La suite* $(e)_{n\geq 0}$ *est constante.*

PROPOSITION 12
*Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite.*
$(u_n)_{n\geq 0}$ *est constante si et seulement s'il existe* $k \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_n = k$.
**Démonstration** —*On procède par double-implication.*

Il existe plusieurs méthodes pour montrer qu'une suite est monotone. Examinons-en trois différentes.

MÉTHODE 13 (**Monotonie par différence**)
*Pour montrer qu'une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est croissante ou décroissante, on peut étudier le signe de* $u_{n+1} - u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n \in [\![n_0, +\infty[\![$. *Trois cas se présentent :*

— *Soit pour tout* $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, *on a* $u_{n+1} - u_n \geq 0$. *Dans ce cas,* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est croissante.*
*Si on a* $u_{n+1} - u_n > 0$, *la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est strictement croissante.*

— *Soit pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, *on a* $u_{n+1} - u_n \leq 0$. *Dans ce cas,* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est décroissante.*
*Si on a* $u_{n+1} - u_n < 0$, *la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est strictement décroissante.*
— *Soit il existe deux entiers* $n_1, n_2$ *tels que* $u_{n_1+1} - u_{n_1}$ *et* $u_{n_2+1} - u_{n_2}$ *sont de signes opposés. Dans ce cas, la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *n'est pas monotone.*

EXEMPLE 14 — *Montrons que la suite* $(n^3 - 2n)_{n \geq 1}$ *est croissante. Soit* $n \geq 1$. *On a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= ((n+1)^3 - 2(n+1)) - (n^3 - 2n) \\ &= n^3 + 3n^3 + 3n + 1 - 2n - 2 - n^3 + 2n \\ &= 3n^2 + 3n - 1 \underbrace{\geq}_{n \geq 1} 3n^2 > 0 \end{aligned}$$

*Cela montre que cette suite est croissante. Elle est même strictement croissante.*

MÉTHODE 15 (**Monotonie par quotient**)
*Soit* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *une suite dont* ***tous les termes sont strictement positifs****.*
*Pour montrer que* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est monotone, on peut comparer la quantité* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *avec* 1.
*Trois cas se présentent :*

— *Soit pour tout* $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, *on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. *Alors,* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est croissante.*
*Si on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est strictement croissante.*
— *Soit pour tout* $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, *on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. *Alors,* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est décroissante.*
*Si on a* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est strictement décroissante.*
— *Soit il existe deux entiers* $n_1, n_2$ *tels que* $\frac{u_{n_1+1}}{u_{n_1}} > 1$ *et* $\frac{u_{n_2+1}}{u_{n_2}} < 1$.
*Alors la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *n'est pas monotone.*

EXEMPLE 16 — *Montrons que la suite* $(\dfrac{(n+1)!}{2^n})_{n \geq 1}$ *est strictement croissante. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On a :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{2^n}} = \frac{2^n \times (n+2)!}{(n+1)! \times 2^{n+1}} = \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1 \underbrace{>}_{n \geq 1} 1$$

*Cela montre que cette suite est strictement croissante.*

MÉTHODE 17 (**Monotonie par récurrence**)
*Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$ *et* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *une suite réelle.*

— *On calcule les premiers termes de la suite.*
— *Si il n'y a pas de régularité dans l'ordre des premiers termes on en conclut que la suite n'est pas monotone.*
— *Si la suite semble être croissance/décroissante, pour tout* $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ $\mathcal{P}(n)$ : "$u_{n+1} \leq u_n$" *(ou "*$u_n \leq u_{n+1}$*").*
*Et, on essaie de prouver par récurrence sur* $n$ *que les propositions* $\mathcal{P}(n)$ *sont vraies.*

EXEMPLE 18 — *Soit* $(u_n)_{n \geq 0}$ *la suite définie par récurrence par* $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, *et pour tout* $n \in [\![2, +\infty[\![$ *par* $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

1. *Calculons les premiers termes de la suite :* $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$.
2. *On obtient* $u_0 \leq u_1 < u_2 < u_3$.
*Ainsi, on conjecture que* $(u_n)_{n \geq 0}$ *est croissante.*
3. *Pour* $n \geq 0$, *posons* $\mathcal{P}(n)$ : "$u_n \leq u_{n+1}$". *Montrons par récurrence forte que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ *est vraie.*
— *Initialisation : Les propriétés* $\mathcal{P}(0)$ *et* $\mathcal{P}(1)$ *sont vraies puisque* $u_0 \leq u_1$ *et* $u_1 < u_2$.

— *Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, tel que $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(m)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.*
*On remarque que d'après les hypothèses de récurrence, les termes $u_0, \dots, u_m$ sont rangés dans l'ordre croissant. On a ainsi $u_{m-1} \geq u_0 = 1$.*
*Par construction de la suite, on a $u_{m+1} = u_m + u_{m-1}$.*
*On a donc $u_{m+1} - u_m = u_{m-1} \geq u_0 = 1 \geq 0$. Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.*
*Cela termine la récurrence. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

Remarque 19 — *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de l'exemple précédent n'est pas strictement croissante car on a $u_0 = u_1$.*
*Par contre, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ (mêmes valeurs, mais commençant à partir de 1) est strictement croissante, car pour tout $n \in [\![1, +\infty[\![$ on a montré que $u_{n+1} - u_n \geq 1 > 0$.*
*De façon similaire, la suite $(\frac{2^n}{n!})_{n\geq 0}$ n'est pas monotone, alors que la suite $(\frac{2^n}{n!})_{n\geq 2}$ est strictement croissante. On parle dans ce cas de suite décroissante à partir d'un certain rang (du rang 2 ici).*

Remarque 20 — *Une méthode est souvent plus adaptée qu'une autre en fonction de la forme du terme général de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.*
- *Si $u_n$ s'écrit comme une somme, on préfèrera utiliser la méthode par différence.*
- *Si $u_n$ s'écrit comme un produit ou un quotient, on emploiera souvent la méthode par quotient* ***lorsque cela est permis*** *($u_n$ de signe constant, et qui ne s'annule pas).*
  *La méthode par différence peut parfois fonctionner avec des produits grâce aux factorisations/mises au dénominateur commun.*
- *Si $u_n$ est définie par récurrence, une preuve par récurrence pourra être adaptée.*

### 1.3 Encadrement d'une suite

Comme une suite réelle est une fonction (de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$), elle peut être majorée ou minorée.

Définition 21 (**Suites majorées/minorées**)
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. Alors :*
- *La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est* ***majorée*** *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on a $u_n \leq M$.*
  *On dit que $M$ est un* ***majorant*** *de $(u_n)_{n\geq n_0}$.*
- *La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est* ***minorée*** *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on a $m \leq u_n$.*
  *On dit que $m$ est un* ***minorant*** *de $(u_n)_{n\geq n_0}$.*
- *La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est* ***bornée*** *si elle est minorée et majorée.*

Exemple 22 —
- *La suite $(n^2)_{n\geq 0}$ est minorée mais pas majorée.*
  *La suite $(n^2)_{n\geq 0}$ est minorée par 0, son premier terme, car elle est croissante.*
  *Montrons que $(n^2)_{n\geq 0}$ n'est pas majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$. On cherche $n \geq 0$ tel que $u_n > M$.*
  *Si $M \leq 0$, alors $n = 1$ convient car $u_1 = 1$.*
  *Supposons maintenant que $M > 0$. On a alors $u_n > M$ ssi $n^2 > M$ ssi $n > \sqrt{M}$. Le nombre $m = \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1$ est un entier, et il vérifie $m > \sqrt{M}$. Ainsi, on a $u_m > M$.*
  *Cela démontre que la suite $(n^2)_{n\geq 0}$ n'est pas majorée.*
- *La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est bornée.*
  *Pour $n \geq 1$ on a $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)}$, donc cette suite est strictement décroissante. Elle est donc majorée par son premier terme, qui vaut $u_1 = 1$. Et cette suite est positive, ce qui veut dire qu'elle est minorée par 0. Elle est donc bien bornée.*

Remarque 23 — *Attention ! • L'ordre des quantificateurs est important dans la définition de suite majorée/minorée.*
*En effet, soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. La proposition "$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$" est*

*forcément vraie. Pour $n$ fixé, il suffit de prendre $M = u_n$. Pourtant cette suite n'est pas forcément majorée.*
• *Le minorant $m$ ou le majorant $M$ d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$* ***ne dépendent pas*** *de $n$.*

Proposition 24
*Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.*
— *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, alors elle est minorée par $u_{n_0}$.*
— *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante, alors elle est majorée par $u_{n_0}$.*

**Démonstration** — *On utilise la définition de la décroissance.*

Remarque 25 — *Une suite peut être croissante et majorée (par exemple $(1-\dfrac{1}{n})_{n\geq n_0}$) ou bien croissante et non majorée (par exemple $(n^2)_{n\geq n_0}$). Elle n'est donc pas forcément bornée.*

Méthode 26 (**Encadrer une suite**)
*Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.*
— *Si on sait que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est monotone, on peut appliquer la proposition précédente pour la majorer ou minorer par son premier terme.*
— *Si la suite n'est pas monotone, on peut conjecturer un encadrement et le démontrer par récurrence.*
— *Dans certains cas, on utilise des comparaisons entre fonctions, ainsi que le signe, pour trouver un majorant et un minorant de $u_n$.*
*Ex : $(\frac{2+n}{1+n^2})_{n\geq 0}$. Pour $n \geq 0$ on a $\frac{2+n}{1+n^2} > 0$, donc la suite est minorée par $0$ car positive. Pour $n \geq 2$ on montre que $\frac{2+n}{1+n^2} \leq 1$ car $1+n^2-(2+n) \geq 0$. Donc, la suite est majorée par* $\max(u_0, u_1, 1) = 2$.

Proposition 27
*Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.*
*La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n\geq n_0}$ est majorée.*

### Propriétés à partir d'un certain rang

Définition 28
*Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ une proposition (vraie ou fausse).*
*On dit que $P(n)$ est vraie* ***à partir d'un certain rang*** *s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in [\![k, +\infty[\![$ on a $P(n)$ vraie.*

*Dans le cas des suites, on peut ainsi parler de suites croissantes à partir d'un certain rang, décroissantes à partir d'un certain rang, majorées à partir d'un certain rang, ou d'une inégalité $u_n \leq v_n$ vraie à partir d'un certain rang.*
*Souvent, on ne connaît pas la valeur du rang $k$ à partir duquel la propriété est vraie, on sait simplement que ce rang existe. Cela revient à dire que lorsque "n est suffisamment grand", la propriété $P(n)$ est vraie, et que l'on ne sait pas ce qui se passe lorsque "n est petit".*
*Attention, une suite croissante à partir d'un certain rang n'est en général pas croissante (on ne sait rien sur la valeur des premiers termes). Par exemple, $(\frac{n!}{3^n})_{n\geq 0}$ n'est pas croissante, mais est croissante à partir du rang $3$.*

Proposition 29
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée/minorée à partir d'un certain rang, alors la suite est majorée/minorée.*

***Démonstration*** — *(Cas majoré) On a $M \in \mathbb{R}$ et $k \geq n_0$ tels que pour $n \in [\![k, +\infty[\![$ on a $u_n \leq M$. Pour $n \in [\![n_0, k]\!]$ on a $u_n \leq \max(u_{n_0}, u_{n_0+1}, \ldots, u_k) = M'$. Donc, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on a $u_n \leq \max(M, M')$.* □

## 1.4 Définition explicite, implicite, par récurrence

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ peut être définie de plusieurs façons différentes. Selon la définition de la suite, certaines propriétés seront plus ou moins faciles à vérifier. On cherche parfois aussi à changer d'expression (passer d'une expression implicite à une expression explicite ou à une expression par récurrence).

Définition 30 (**Suite explicite**)
*On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est explicite s'il existe une fonction $f : [n_0, +\infty[$ telle que pour tout entier $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on ait $u_n = f(n)$.*
*On dit que $f$ est la* ***fonction associée*** *à la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.*

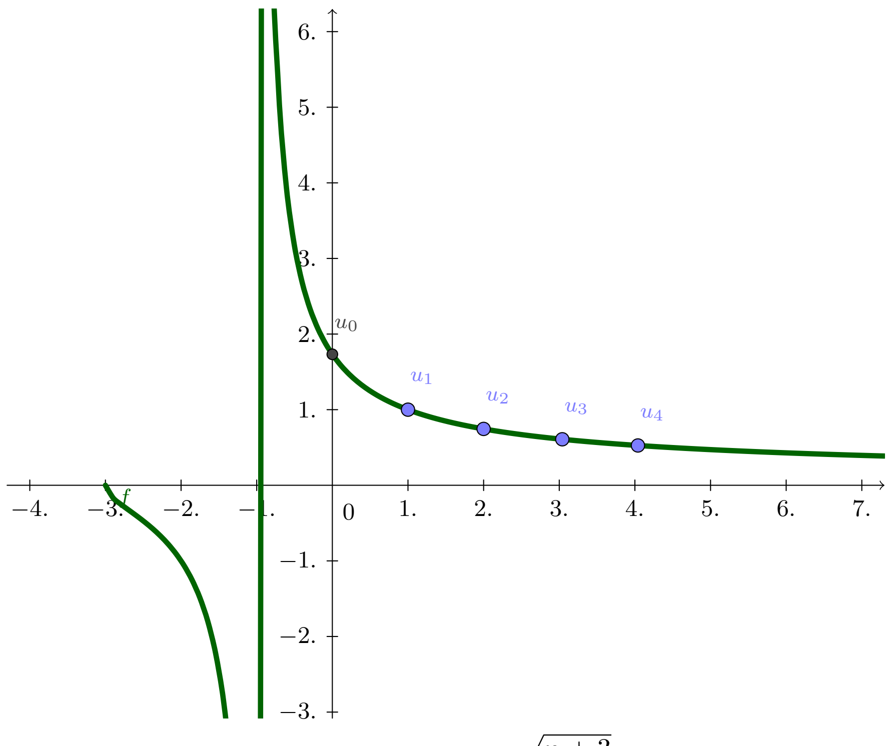
Les suites dites explicites sont des suites dont les termes peuvent se calculer indépendamment, ce qui rend leur calcul pratique.

Exemple 31 — *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n+3}}{1+n}$ est une suite explicite, définie par la fonction $f : x \in [0, +\infty[ \mapsto \dfrac{\sqrt{x+3}}{1+x}$.*

Il existe un lien entre la monotonie de $(u_n)_{n\geq n_0}$ et la monotonie de sa fonction associée $f$.

Proposition 32
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle qui est explicite, de fonction associée $f$. On a :*
- *Si $f$ est croissante sur $[n_0, +\infty[$, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.*
- *Si $f$ est strictement croissante sur $[n_0, +\infty[$, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.*
- *Si $f$ est décroissante sur $[n_0, +\infty[$, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.*
- *Si $f$ est strictement décroissante sur $[n_0, +\infty[$, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante.*

En utilisant un graphique, on peut représenter une suite explicite via le graphe de sa fonction associée.




Premiers termes de $(\dfrac{\sqrt{n+3}}{1+n})$

Exemple 33 — *On pose $(u_n)_{n\geq 0} = (\frac{2+n}{1+n})_{n\geq 0}$.*
*Cette suite est explicite, de fonction associée $f : x \in [0, \infty[ \mapsto \frac{2+x}{1+x}$.*
*La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{-1}{(1+x)^2}$. Comme $f' < 0$, on en déduit que $f$ est strictement décroissante et donc que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite strictement décroissante.*

Définition 34 (**Suite récurrente**)
*Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.*
*On dit que est $(u_n)_{n\geq n_0}$* ***récurrente*** *ou* ***définie par récurrence*** *si, pour tout entier $n \in [\![n_0+1,+\infty[\![$, le terme général $u_n$ se définit en fonction des termes $u_{n_0},\ldots,u_{n-1}$.*

Exemple 35 —

1. *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (u_{n-1})^2 + 4$, est une suite récurrente.*
2. *La suite $(n^2)_{n\geq n_0}$ est définie de façon explicite. Cependant, pour $n \geq 1$ si l'on cherche une relation entre $u_n$ et $u_{n-1}$, on obtient : $u_n = (n-1+1)^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = u_{n-1} + 2\sqrt{u_{n-1}} + 1$.*
   *On peut donc aussi écrire cette suite avec une relation de récurrence.*
3. *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$, est une suite récurrente. (C'est en fait une suite géométrique)*
4. *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$ par $u_n = (n-1)^2.u_{n-1} + u_{n-2}^2$, est une suite récurrente.*

Remarque 36 — *Pour une suite récurrente $(u_n)_{n\geq n_0}$, au lieu d'exprimer, pour tout $n \in [\![n_0+1,+\infty[\![$, $u_n$ en fonction des termes $u_{n_0},\ldots,u_{n-1}$, on peut aussi à la place exprimer $u_{m+1}$ en fonction de $u_{n_0},\ldots,u_m$ pour tout $m \in [\![n_0,+\infty[\![$. (Cela correspond au changement de variables $m = n-1$).*
*Par exemple, la relation "$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2u_{n-1} + 3$" est équivalente à "$\forall m \in \mathbb{N}$, $u_{m+1} = 2u_m + 3$".*
*De même, la relation "$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $u_n = (n-1)^2.u_{n-1} + u_{n-2}^2$" est équivalente à "$\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = (k+1)^2.u_{k+1} + u_k^2$". (poser $k = n-2$)*

Définition 37 (**Suite implicite**)
*On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est implicite si pour tout $n \in [\![n_0,+\infty[\![$, il existe une équation $(E_n)$ dont $u_n$ est l'unique solution.*

Exemple 38 — *La fonction $g : x \in [0,+\infty[\mapsto x^3 + 2x^2 - 1$ est strictement croissante, continue, et avec $g(0) = -1$ et $g(x) \to_{x\to+\infty} +\infty$. Ainsi, d'après le TVI, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique nombre $u_n$ tel que $g(u_n) = n$.*
*La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est alors une suite implicite.*
*Chaque terme $u_n$ existe bien, mais l'on ne possède pas de façon explicite de calculer $u_n$ (il faut d'abord résoudre l'équation $g(x) = n$ pour cela).*
*Cependant, les variations de $g$ impliquent que $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. Et comme on a $g(\frac{n^{1/3}}{2}) = \frac{n}{8} + \frac{n^{2/3}}{2} - 1 \leq n$, on en déduit aussi que $u_n \geq \frac{n^{1/3}}{2}$.*

Exemple 39 — *La suite $(v_n)_{n\geq 0}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n$ est l'unique solution sur $[\frac{1}{e},+\infty[$ de l'équation $x\ln(x) = n^2 + 1$.*
*En étudiant la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ on vérifie que pour tout $n \geq 0$ fixé, l'équation $x\ln(x) = n^2 + 1$ possède bien une solution. Mais on ne possède pas d'outils pour donner une expression explicite de $u_n$.*
*Cependant, les variations de $h$ impliquent que $(v_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante. Et comme on a $h(n) = n\ln(n) \leq n^2 + 1$, on en déduit aussi que $v_n \geq n$.*

Etudions maintenant les suites les plus classiques.

# 2 Suites usuelles

## 2.1 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 40 (**Suite arithmétique**)
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.*

*La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est* ***arithmétique*** *s'il existe un réel $r$ tel que pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre $r$ est appelé la* ***raison*** *de la suite arithmétique.*

Exemple 41 — *La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, par $v_2 = 3$ et $v_{n+1} = v_n + 5$ est arithmétique. Sa raison est $r = 5$.*
*Une suite arithmétique est définie par récurrence.*

Proposition 42
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison $r$.*
*Alors, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on a $u_n = (n - n_0) \times r + u_{n_0}$.*
*Cette suite est explicite, de fonction associée $f : x \mapsto (x - n_0) \times r + u_{n_0}$.*
**Démonstration** — *On démontre cela par récurrence sur $n$.*

Exemple 43 — *Dans l'exemple précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a alors $v_n = v_2 + 5(n-2) = 3 + 5(n-2)$. Cette expression de $v_n$ est plus pratique. Par exemple, on a $v_{202} = 1003$.*

Proposition 44 (**Monotonie d'une suite arithmétique**)
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison $r$. Alors :*
- *Si $r > 0$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.*
- *Si $r = 0$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante.*
- *Si $r < 0$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante.*

**Démonstration** — *On regarde le signe de $u_{n+1} - u_n$.*

Définition 45 (**Suite géométrique**)
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_n$ est une suite* ***géométrique*** *s'il existe un réel $q$ tel que pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on a $u_{n+1} = q \times u_n$.*
*Le réel $q$ est appelé la* ***raison*** *de la suite géométrique.*

Exemple 46 — *Pour $u_n = 3 \times 5^{n-2}$, La suite $(w_n)_{n\geq 2}$ telle que $w_0 = 3$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a $w_{n+1} = 5w_n$, est une suite géométrique de raison 5.*

Proposition 47
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison $q$.*
*Alors, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on a $u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$.*
*Cette suite est explicite, de fonction associée $f : x \mapsto u_{n_0} \times q^{x-n_0}$.*
**Démonstration** — *On démontre cela par récurrence sur $n$.*

Exemple 48 — *Pour la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ de l'exemple précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a $w_{n+1} = 3.5^{n-2}$. Ainsi, on a $w_{10} = 3.5^8$.*

Proposition 49 (**Monotonie d'une suite géométrique**)
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_{n_0} > 0$. Alors :*
- *Si $q < 0$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est pas monotone.*
- *Si $0 < q < 1$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante.*
- *Si $q = 1$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante.*
- *Si $q = 0$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante à partir du rang $n_0 + 1$.*
- *Si $1 < q$, la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.*

**Démonstration** — *On étudie chacun des cas, en regardant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (sauf si $q = 0$).*

Remarque 50 — *Si on suppose $u_{n_0} < 0$ (premier terme négatif), cela inverse le sens de la monotonie (croissant/décroissant) dans la proposition précédente.*

### 2.2 Suites arithmético-géométriques

Un peu plus élaboré que les suites arithmétiques ou géométriques, les suites arithmético-géométriques.

DÉFINITION 51
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.*
*La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est* ***arithmético-géométrique*** *s'il existe $a, b$ des réels tels que pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on a $u_{n+1} = a \times u_n + b$.*

EXEMPLE 52 — *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général, pour tout $n \geq 0$, $u_n = 3\times 2^n + 1$, est arithmético-géométrique.*
*En effet, pour $n \geq 0$, on a :*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3 \times 2^{n+1} + 1 \\ &= 2 \times (3 \times 2^n) + 1 \\ &= 2 \times (3 \times 2^n + 1) + 1 - 2 \\ &= 2 \times u_n - 1. \end{aligned}$$

*Cette suite vérifie donc bien une relation de récurrence de suite arithmético-géométrique, (avec $a = 2$ et $b = -1$).*

PROPOSITION 53
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmético-géométrique avec, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$ et avec $a \neq 1$.*
*On pose $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.*
*Alors la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison $a$.*
**Démonstration** — *On écrit $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.*

REMARQUE 54 — *Dans l'énoncé de la proposition précédente, $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$ existe bien car on a supposé dans l'énoncé que $a \neq 1$. Ce nombre $\alpha$ est la solution de l'équation $x = ax + b$.*
*Si $a = 1$, la suite $(u_n)_n$ est seulement une suite arithmétique.*

COROLLAIRE 55
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmético-géométrique avec, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$.*
*On pose $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.*
*Alors, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ on a $u_n = (u_{n_0} - \alpha) \times a^{n-n_0} + \alpha$.*

MÉTHODE 56 (**Calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique**)
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmético-géométrique avec, pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$.*
- *Étape 1 : Calculer $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.*
- *Étape 2 : Dire que la suite $(u_n - \alpha)_{n\geq n_0}$ est géométrique de raison $a$. (Le vérifier si demandé)*
- *Étape 3 : On obtient le terme général : Pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on a $u_n = (u_{n_0} - \alpha) \times a^{n-n_0} + \alpha$.*

EXERCICE 2 — *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite de premier terme $u_0 = 1$ et telle que pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} - u_n = \pi \times (1 - u_n)$.*
*Montrer que cette suite est arithmético-géométrique, et donner une expression explicite de son terme général.*

### 2.3 Suites définies par une somme

Les termes d'une suite sont des nombres réels (parfois complexes). On peut donc les sommer. Cela donne un lien entre suites arithmétiques/géométriques et sommes arithmétiques/géométriques

Proposition 57
*Soient $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite réelle et $n\in\mathbb{N}$.*
- *Si pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_k=k$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \frac{n(n+1)}{2}$. (Somme arithmétique)*
- *Si pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_k=k^2$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.*
- *Si pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_k=a^k$, avec $a\neq 1$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. (Somme géométrique)*

Les techniques de sommation comme le télescopage peuvent être utilisées pour déterminer explicitement certaines suites définies par récurrence.

Méthode 58 (**Calcul du terme général à l'aide d'une somme télescopique**)
*Soit $(\alpha_n)_{n\geq n_0}$ une suite. Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite admettant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1}=u_n+\alpha_n$ et de premier terme $u_0$.*
- *On vérifie que le terme $\alpha_n$ ne dépend pas des $u_k$.*
  *Par exemple, $\alpha_n=\exp(u_{n-1})$ ne convient pas pour cette méthode.*
- *On calcule, si possible, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha_k)$.*
  *D'autre part, on a : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha_k)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=u_n-u_0$.*
- *On obtient alors $u_n=u_0+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k$, ce qui donne une expression explicite de $u_n$.*

Exemple 59 — *Calculons le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0=1$, et pour tout $n\geq 0$ par $2u_{n+1}=2u_n-\frac{6\pi n}{4}+e^n$.*
- *Remarquons que :*

$$2u_{n+1}=2u_n-\frac{6\pi n}{4}+e^n \iff u_{n+1}=u_n-\frac{3\pi n}{4}+\frac{e^n}{2}$$

- *Pour tout $n\geq 0$, le terme $u_{n+1}-u_n=\frac{3\pi n}{4}-\frac{e^n}{2}$ ne dépend pas des valeurs de $u_{n+1}$ et $u_n$.*
- *On calcule :*

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3\pi k}{4}-\frac{e^k}{2}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3\pi k}{4}\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{e^k}{2}=\frac{3\pi}{4}\times\left(\sum_{k=0}^{n}k\right)-\frac{1}{2}\times\sum_{k=0}^{n}e^k$$

  *D'autre part, on a $\sum_{k=0}^{n}u_{k+1}-u_k=u_{n+1}-u_0$ par télescopage.*
- *Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}=\frac{3\pi}{4}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{e^{n+1}-1}{e-1}+1$*

# 3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

## 3.1 Définition

Les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques appartiennent à ce qu'on appelle les suites récurrentes affines d'ordre 1. Ce sont les suites définies par récurrence de la forme $u_{n+1}=au_n+b$, pour $a,b\in\mathbb{R}$. Allons un peu plus loin.

Définition 60 (**Suite récurrente linéaire d'ordre 2**)
*Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.*
*On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $a,b$ des réels tels que pour tout $n\geq 0$, on ait $u_{n+2}=a\times u_{n+1}+b\times u_n$.*

Remarque 61 — *Lorsque l'on veut définir une unique suite récurrente linéaire d'ordre 2, il est nécessaire de fixer les deux premiers termes $u_0$ et $u_1$.*

L'exemple principal de suite récurrente linéaire d'ordre 2 est la suite dite de Fibonacci.

Exemple 62 — ***(Suite de Fibonacci)*** *La suite de Fibonacci est définie pour tout entier $n \geq 0$ par : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et par $u_0 = 1, u_1 = 1$.*
*Le calcul manuel donne : $u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 8, \ldots$.*

### 3.2 Mise sous forme explicite

Les suites récurrentes linéaires d'ordre deux ont une forme explicite. Tout comme les EDL2, Il faut pour cela étudier une fonction polynômiale de degré 2 associée à la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Définition 63 (**Equation caractéristique**)
*Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.*
*On définit **l'équation caractéristique** associée à $(u_n)_{n \geq n_0}$ par :*

$$x^2 - ax - b = 0$$

Exemple 64 — *Avec $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, l'équation caractéristique de la suite de Fibonacci est :*

$$x^2 - x - 1 = 0$$

.

Théorème 65
*Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 avec, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.*
*Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^2 - ax - b = 0$ l'équation caractéristique associée à cette suite.*
*On pose $\Delta = a^2 + 4b$. Alors, on a :*

— *Cas 1 : $\Delta > 0$*
*Soient $x_1, x_2$ les deux racines réelles de $x^2 - ax - b = 0$.*
*Il existe deux réels $\alpha, \beta$ tels que*

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \alpha \times (x_1)^n + \beta \times (x_2)^n.$$

— *Cas 2 : $\Delta = 0$*
*Soit $x_0$ la racine doube de $x^2 - ax - b = 0$.*
*Il existe deux réels $\alpha, \beta$ tels que*

$$\forall n \geq 0,\ u_n = (\alpha + n\beta) \times (x_0)^n.$$

— *Cas 3 : $\Delta < 0$*
*Soient $x_1, x_2$ les deux racines complexes conjuguées de $x^2 - ax - b = 0$.*
*Soit $x_1 = re^{i\theta}$ l'écriture exponentielle de $x_1$. Il existe deux réels $A, B$ tels que*

$$\forall n \geq 0,\ u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)).$$

**Démonstration** —*Admise.*

Exemple 66 — *Reprenons l'exemple de la suite de Fibonacci : $(u_n)_{n \geq 0}$ avec $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.*
*Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ associée à cette suite a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$.*
*Cette équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.*
*Donc, il existe deux constantes $\alpha, \beta$ telles que le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est de la forme :*

$$u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n.$$

*Pour déterminer $\alpha$ et $\beta$, on utilise le fait que $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.*
*Cela fournit un système linéaire $2 \times 2$ d'inconnues $\alpha$ et $\beta$ :*

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha x_1^0 & + & \beta x_2^0 & = & u_0 = 1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & u_1 = 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ 0 & + & (x_2 - x_1)\beta & = & 1 - x_1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 - \beta \\ \beta & = & \frac{1-x_1}{x_2-x_1} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 - \dfrac{1-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{x_2 - 1}{x_2 - x_1} \\ \beta & = & \frac{1-x_1}{x_2-x_1} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \beta & = & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \alpha & = & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

*Ainsi, le terme général de la suite de Fibonacci s'écrit explicitement :*

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

*Cette nouvelle expression des termes de la suite de Fibonacci apporte beaucoup d'information pour leur étude.*
*Nous avons une suite constituée uniquement de nombres entiers, qui s'écrit avec des sommes et puissances de nombres qui ne sont pas entiers ni même rationnels.*
*On a $\sqrt{5} \sim 2.2$, donc $x_1 \sim -0.6$ et $x_2 \sim 1.6$. Avec les résultats que nous verrons sur les limites de suites géométriques, on peut montrer que $u_n$ est équivalent à $\beta x_2^n$ quand $n \to +\infty$. C'est-à-dire que la vitesse de croissance de cette suite est "géométrique" (elle augmente "de façon similaire" à une suite géométrique).*

Méthode 67 (**Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2**)
*Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.*
*Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x^2 - ax - b = 0$ son équation caractéristique.*

- *Étape 1 : On pose le discriminant $\Delta = a^2 + 4b$, et on détermine son signe.*
- *Étape 2 : On détermine les racines de $x^2 - ax - b = 0$.*
  *Puis, on applique le théorème qui fournit une forme explicite.*
- *Étape 3 : On détermine les coefficients $\alpha, \beta$ (ou $A, B$) en écrivant la valeur de $u_0$ et $u_1$ de deux façons différentes.*
  *Cela donne un système linéaire $2 \times 2$ que l'on peut résoudre avec des opérations sur les lignes.*

Exercice 3 — *Mettre sous forme explicite les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 suivantes :*

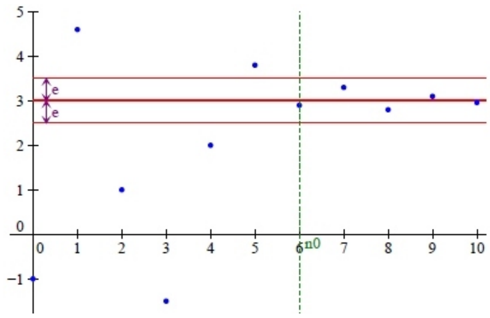
1. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
2. $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

## 4 Limite d'une suite réelle

Définition 68 (**Limite d'une suite**)
*Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle, et soit $l \in \mathbb{R}$ un réel.*
*On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$* ***converge vers l****, ce que l'on note $u_n \to_{n \to +\infty} l$, si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \in [\![ n_1, +\infty [\![ \text{ on a } |l - u_n| < \epsilon.$$

*Moins formellement, on a $u_n \to_{n \to +\infty} l$ si tout intervalle $I$ contenant $l$, aussi petit que l'on veut, contient aussi tous les termes de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à partir d'un certain rang $n_0$. En effet, l'inégalité $|l - u_n| < \epsilon$ se réécrit $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$. Le nombre $l \in \mathbb{R}$ est appelé* ***une limite*** *de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.*



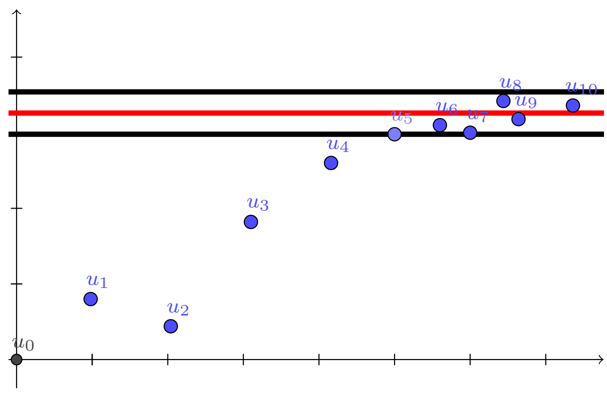

*Une suite convergente vers 3.*

Définition 69 (**Suite divergente**)
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.*
*Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est* ***divergente****.*

Exemple 70 — *La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ converge vers $0$ en $+\infty$. Montrons-le.*

- *Soit $\epsilon > 0$.*
- ***Analyse*** *: Soit $n \geq 1$. On a $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} < n$.*
  *On remarque que $N_\epsilon = (\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1)$ est un nombre entier et qu'il est supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$.*
- ***Synthèse*** *Pour tout $n \geq N_\epsilon$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$.*
- *Donc, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$ on a $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.*
  *Comme cela est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que la suite converge vers $0$.*

Exercice 4 — *Montrer que $(1 + \frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$ converge vers $1$.*




*Convergence d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$*

Dans la définition précédente, on a employé le terme "**la limite**" et pas "**une limite**". Ceci est dû à la proposition suivante :

Proposition 71 (**Unicité de la limite**)
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle. Soient $l_1, l_2$ deux réels tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2$.*
*Alors on a $l_1 = l_1$.*
*Une suite qui est convergente possède une unique limite.*
**Démonstration** — *On suppose par l'absurde que $l_1 \neq l_2$. On pose $\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$, et on cherche une contradiction.*

Définition 72
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle qui est convergente.*
*On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$* ***la limite*** *de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.*

Exemple 73 — *Il existe des suites qui ne sont pas convergentes.*

1. *La suite* $((-1)^n)_{n\geq 0}$ *n'est pas convergente. Elle alterne entre les valeurs* $-1$ *et* $1$.
2. *La suite* $(n^2)_{n\geq 0}$ *n'est pas convergente.*

Pour les suites réelles, une autre notion de limite est assez pratique : la limite en $+\infty/-\infty$.

Définition 74 (**Limite infinie**)
*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite réelle.*
*On dit que* $(u_n)_{n\geq n_0}$ ***tend vers*** $+\infty$*, noté* $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$*, si :*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_1 \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \in [\![n_1, +\infty[\![ \text{ on a } u_n > M.$$

*Dans ce cas, on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
*On dit que* $(u_n)_{n\geq n_0}$ ***tend vers*** $-\infty$*, noté* $u_n \to_{n\to+\infty} -\infty$*, si :*

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_1 \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \in [\![n_1, +\infty[\![ \text{ on a } u_n < m.$$

*Dans ce cas, on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
*Moins formellement, on a* $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$ *si tout intervalle de la forme* $]M, +\infty[$*, avec* $M$ *aussi grand que l'on veut, contient tous les termes de la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *à partir d'un certain rang* $n_0$.

On parle aussi de suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ qui **diverge** vers $+\infty/-\infty$ (en opposition aux suites qui convergent vers un nombre réel $l$).

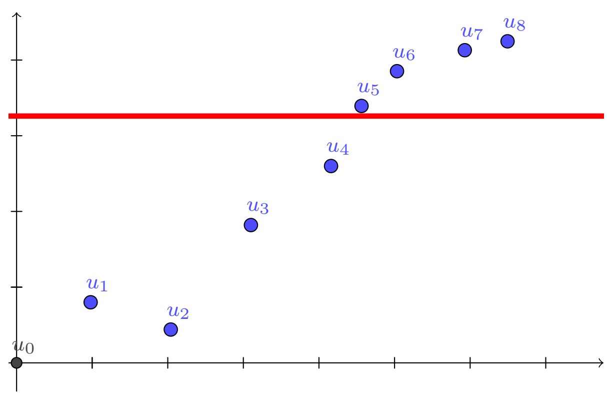
Exemple 75 — *La suite* $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ *tend vers* $+\infty$.
*En effet, soit* $M \in \mathbb{R}$*. On recherche un entier* $n_0$*, tel que pour tout* $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ *on a* $\sqrt{n} > M$.
*On distingue deux cas :*

1. *Si* $M < 0$ *l'inégalité* $\sqrt{n} > M$ *est vérifiée pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. On peut donc choisir* $n_0 = 0$.
2. *Si* $M \geq 0$*, pour* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\sqrt{n} > M$ *ssi* $n > M^2$*. En posant* $n_0 = \lfloor M^2 \rfloor + 1$*,* $n_0$ *est un entier et on a* $n_0 > M^2$*. Alors, pour tout* $n \in [\![n_0, +\infty[\![$ *on a* $n \geq n_0 > M^2$*, donc* $\sqrt{n} > M$.

*Dans tous les cas, on a montré que l'entier* $n_0$ *qui convient existe. Ainsi, on en conclut que* $(\sqrt{n})_{n\geq n_0}$ *tend vers* $+\infty$.

Exercice 5 — *Montrer que la suite* $(1 + n - n^2)_{n\geq 0}$ *tend vers* $-\infty$.

Exercice 6 — *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *la suite de Fibonacci (*$u_0 = 1, u_1 = 1$*,* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$*).*
*Montrer que pour tout* $n \geq 0$*, on a* $u_n \geq n$*. (Quelle méthode de démonstration utiliser ?)*
*En déduire que la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *tend vers* $+\infty$.




Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui diverge vers $+\infty$.

Quand on connaît la limites de certaines suites, on peut calculer la limite (si elle existe) de nouvelles suites plus compliquées.

### 4.1 Cas des limites finies

Proposition 76 (**Opérations sur les limites**)
*Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}$ des suites convergentes, de limites $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.*
*Alors, les suites $(u_n+v_n)_{n\geq n_0}$, $(u_n-v_n)_{n\geq n_0}$, $(u_nv_n)_{n\geq n_0}$, et $(\frac{u_n}{v_n})_{n\geq n_0}$ (si $l_2 \neq 0$) sont convergentes.*
*Et, leurs limites sont :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = l_1 - l_2$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = l_1 \times l_2$
4. *Si* $l_2 \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l_1}{l_2}$

**Démonstration** —*Admise.*

Remarque 77 — *Cette proposition contient deux résultats en un. D'une part, le fait qu'une somme/produit/soustraction/quotient de suites convergentes est une suite convergente (avec condition pour le quotient).*
*D'autre part, la valeur des limites pour chaque opération.*

Exemple 78 — *On considère les suites* $(2+\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ *et* $(3+(\frac{1}{2})^n)_{n\geq 1}$. *Alors :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2+\frac{1}{n}+3+(\frac{1}{2})^n) = 2+3 = 5$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} ((2+\frac{1}{n})-(3+(\frac{1}{2})^n)) = 2-3 = -1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} ((2+\frac{1}{n})\times(3+(\frac{1}{2})^n)) = 2\times 3 = 6$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{2+\frac{1}{n}}{3+(\frac{1}{2})^n}) = \dfrac{2}{3}$

On sait que si un réel $x > 0$ est très proche de 0, alors $\frac{1}{x}$ est très grand. Cela fait apparaître un cas particulier dont il faut faire attention.

Remarque 79 — *Attention ! Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites convergentes dont la limite est 0.*
*Alors la suite $(\dfrac{u_n}{v_n})_{n\geq n_0}$, si elle est définie, n'a pas forcément de limite.*
*Elle peut même converger vers n'importe quel réel a, ou diverger en l'infini.*
*Penser à $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{a}{n}$, ou $v_n = \frac{a}{\sqrt{n}}$.*

Exercice 7 — *Déterminer si les suites suivantes sont convergentes. Si oui, déterminer leur limite :*

1. $\left(\dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right)_{n\geq 1}$
2. $\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$
3. $\left(\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right)_{n\geq 1}$
4. $\left(\dfrac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$

### 4.2 Cas des limites infinies

Remarque 80 — *Attention ! L'infini, $\infty$, n'est pas un nombre.*
*Cependant, on adopte la convention suivante pour les calculs de limites :*
- *Pour $\lambda > 0$, on pose $\lambda \times +\infty = +\infty$ et $\lambda \times -\infty = -\infty$.*
- *Pour $\lambda < 0$, on pose $\lambda \times +\infty = -\infty$ et $\lambda \times -\infty = +\infty$.*
- *$+\infty \times +\infty = +\infty$ et $-\infty \times +\infty = -\infty$.*
- *$0 \times +\infty$ et $0 \times -\infty$ ne sont pas définis (ils n'ont pas de sens).*

Remarque 81 (**Formes indéterminées**) — *Les cas de produits/quotients/sommes de limites qui ne sont pas définis sont :*
1. $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

2. $0 \times +\infty$ *et* $0 \times -\infty$.
3. $(+\infty) + (-\infty)$.

*Ces cas sont appelés* ***formes indéterminées*** *(FI).*
*Pour déterminer la limite de* $\frac{u_n}{v_n}, u_n.v_n, u_n + v_n$ *dans un cas de forme indéterminée, il faut aller plus loin dans les calculs.*

On se sert de cette convention pour formaliser les opérations sur les limites infinies de suites.

Proposition 82 (**Opérations entre limite finie et limite infinie**)
*Soient* $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}$ *deux suites, telle que* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *converge vers* $l \in \mathbb{R}$ *et* $(v_n)_{n \geq n_0}$ *diverge vers* $+\infty$. *On a les propriétés suivantes :*

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = -\infty$
3. *Si* $l \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n) = l \times \infty$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$

Remarque 83 — *A nouveau, cette proposition contient deux résultats : la convergence/divergence des suites, et fournit la valeur de leur limite.*

Exemple 84 — *Les limites suivantes illustrent la précédente proposition.*

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{n} + n) = +\infty$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (2 - 3n^2) = -\infty$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} ((3 - \frac{1}{n}) \times n^2) = 3 \times \infty = +\infty$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-2}{1+n} = 0$

Proposition 85 (**Opérations entre limites finies**)
*Soient* $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}$ *deux suites qui divergent vers* $+\infty$. *On a les propriétés suivantes :*

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (-u_n - v_n) = -\infty$

*Pour* $\frac{u_n}{v_n}$ *et* $u_n - v_n$, *on ne peut rien dire en général (formes indéterminées).*

Exercice 8 — *Déterminer deux suites* $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}$ *qui tendent vers* $+\infty$, *à termes strictement positifs, et telles que :*

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = -\infty$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$
4. $\dfrac{u_n}{v_n}$ *n'a pas de limite.*

### 4.3 Relations d'ordre et limites

Proposition 86 (**Majorants/minorants et limite**)
*Soit* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *une suite convergente, de limite* $l \in \mathbb{R}$. *On a :*

— *Si* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est majorée par* $M \in \mathbb{R}$, *alors* $l \leq M$.
— *Si* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est minorée par* $m \in \mathbb{R}$, *alors* $m \leq l$.

Exemple 87 —

— *La suite* $(4 + 3^{-n})_{n \geq 0}$ *est majorée par* $6$, *et converge vers* $4$.
— *la suite* $(1 - \frac{3}{n})_{n \geq 1}$ *est minorée par* $-2$, *et converge vers* $1$.

## 5 Théorèmes d'existence de limite

Nous avons rencontré dans les précédentes sections la notion de suite convergente, et de suite divergente en l'infini. Certaines suites ne sont pas dans l'un de ces cas comme la suite $((-1)^n)_{n\geq n_0}$. Lorsqu'on étudie une suite il faut donc d'abord déterminer si elle admet une limite avant d'en parler. On examine dans cette section certains cas dans lesquels on sait qu'une suite donnée admet une limite.

### 5.1 Théorème de la limite monotone

Théorème 88
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle. Alors :*
- *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante et majorée, alors elle est convergente.*
- *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante et minorée, alors elle est convergente.*
- *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante et non-majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.*
- *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante et non-minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.*

**Démonstration** —*Ce résultat est une conséquence de la propriété de la borne supérieure.*

Exemple 89 —
1. $(1-\dfrac{1}{n})_{n\geq 1}$ *est croissante et majorée, donc converge.*
2. $(e^{-n}\times n)_{n\geq 1}$ *est décroissante minorée par* $0$*, donc converge.*
3. $(2\times n!)_{n\geq 0}$ *est croissante non-majorée, donc diverge par* $+\infty$*.*
4. $(-n^3)_{n\geq 0}$ *est décroissante non-minorée, donc diverge vers* $-\infty$*.*

Remarque 90 — *Les équivalences suivantes sont une conséquence du théorème.*
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle croissante.*
*Alors, $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée ssi elle est convergente.*
*Soit $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle décroissante.*
*Alors, $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée ssi elle est convergente.*

### 5.2 Suites adjacentes

Définition 91 (**Suites adjacentes**)
*Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles.*
*On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont **adjacentes** si :*
- *La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.*
- *La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.*
- *La suite $(u_n-v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $0$. ($\lim_n(u_n-v_n)=0$)*

Théorème 92
*Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites adjacentes.*
*Alors, les suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ sont convergentes, et elles ont la même limite. ($\lim_n(u_n)=\lim_n(v_n)$)*
**Démonstration** — *On utilise les propriétés des suites croissantes majorées et décroissantes minorées.*

Exemple 93 — *Les suites $(u_n)_{n\geq 1}=(1-\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}=(1+\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ sont adjacentes. En effet, on a :*
- *$(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.*
- *$(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.*
- *Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $1-\frac{1}{n}-(1+\frac{1}{n})=\frac{-2}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.*

Méthode 94 (Montrer que deux suites sont adjacentes)
*Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles.*
*On procède en 3 étapes pour montrer qu'elles sont adjacentes.*

1. *On montre que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante.*
2. *On montre que la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.*
3. *On montre que la suite $(u_n - v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 0.*

Exercice 9 (Deux suites adjacentes) — *Soient $(u_n)_{n\geq 1}, (v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.*
*Montrer que ces deux suites sont adjacentes.*
*En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq 2$.*

### 5.3 Théorèmes d'encadrements

Théorème 95 (**Théorème des gendarmes**)
*Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}, (w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites réelles, telles que :*
- *$(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ convergent, et one la même limite $l$.*
- *Il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \in [\![n_1, +\infty[\![$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.*
  *(La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est encadrée, à partir d'un certain rang, par $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$.)*

*Alors $(v_n)_{n\geq n_0}$ est une suite convergente, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.*
**Démonstration** —*On utilise la définition de divergence vers $\pm\infty$.*

Théorème 96 (**Comparaison et divergence**)
*Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles.*
*Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in [\![n_0, +\infty[\![$, on ait $u_n \leq v_n$. On a :*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

**Démonstration** —*Admis.*

Exercice 10 — *On rappelle, avec les propriétés de la partie entière, que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \leq \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$.*
*Montrer que la suite $(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n})_{n\geq 1}$ converge, et montrer que sa limite est $l = x$.*

Avec les résultats sur les limites de suites et les comparaisons (suites adjacentes, théorème des gendarmes, comparaison et limites infinies), on peut déterminer la convergence des suites géométriques.

Théorème 97 (**Limite de suite géométrique**)
*Soient $q \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ la suite géométrique de terme général $u_n = q^n$. On a :*

1. *Si $q > 1$, alors $\lim_n(u_n) = +\infty$.*
2. *Si $q = 1$, alors $\lim_n(u_n) = 1$.*
3. *Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_n(u_n) = 0$.*
4. *Si $q \leq -1$ alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'a pas de limite.*

**Démonstration** —Admis. (On pourra le démontrer de façon pratique avec les fonctions continues.)

Ces suites apparaissent souvent en mathématiques. La valeur de ces limites est à connaître.

### 5.4 Croissances comparées

Chez les suites, on trouve plusieurs familles de suites qui tendent vers $+\infty$ (logarithme, puissance,polynôme, exponentielle, factorielle). On donne dans cette section des comparaisons de "vitesses de croissance/décroissance" entre ces différentes familles. Ce sont les **croissances comparées**.

THÉORÈME 98 (**Croissances comparées**)

1. $\forall q \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0.$
   *La factorielle croit "bien plus vite" que les suites géométriques.*
2. $\forall q \in ]1, +\infty[$ *et* $\forall a > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n^a} = +\infty.$
3. $\forall q \in ]-1;1[$ *et* $\forall a > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n^a} = 0.$
   *Les suites géométriques croissent/décroissent "bien plus vite" que les suites "puissance"/"polynômiales".*
4. $\forall a > 0,\ \forall b \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0.$
   *Les suites "puissance"/"polynômiales" croissent "bien plus vite" que les suites "logarithmiques".*

**Démonstration** —*Admis.*

On retrouve dans ce résultat les croissances comparées que vous avez vues en terminale.
On rappelle pour cela que pour $q > 0$, on a $q^n = \exp(n.\ln(q))$. La suite géométrique $(q^n)_{n\geq n_0}$ est en fait une suite associée à une exponentielle.

EXERCICE 11 — *Déterminer la limite de la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2} + n^2 \times (\dfrac{1}{2})^n + 1.$

### 5.5 Approximation décimale d'un réel

Tout nombre réel $x$ peut être approché "aussi près que l'on veut" par des nombre rationnels.

THÉORÈME 99 (**Approximation décimale d'un réel**)
*Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$u_n = \frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} \leq x \leq \frac{\lfloor x.10^n \rfloor + 1}{10^n} = v_n.$$

*Le terme de gauche est* ***l'approximation décimale de $x$ à $10^{-n}$ près, par défaut.***
*Le terme de droite est* ***l'approximation décimale de $x$ à $10^{-n}$ près, par excès.***
*Les nombres $u_n$ et $v_n$ définissent des suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$. Ce sont des suites de nombres rationnels qui convergent vers $x$.*

***Démonstration*** — *On a* $\frac{x.10^n - 1}{10^n} < \frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} \leq \frac{x10^n}{10^n}$, *donc* $x - \frac{1}{10^n} < \frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} \leq x$.
*La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge donc vers $x$ d'après le théorème des gendarmes.* □

## 6 Suites extraites

Une suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ composée d'une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$. Plus précisément on a la définition suivante :

DÉFINITION 100 (**Suite extraite**)
*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.*
*La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ est appelée une* ***suite extraite de*** *$(u_n)_{n\geq n_0}$.*
*On parle aussi de* ***sous-suite*** *de $(u_n)_{n\geq n_0}$.*
*La fonction $\varphi$ est appelée* ***l'extractrice*** *de la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$.*

EXEMPLE 101 —
- *La suite constante égale à 1 est une suite extraite de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

- *La suite* $\left(\exp(n^2+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite extraite de* $(\exp(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 102
*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite* ***convergente****. Soit* $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ *une suite extraite de* $(u_n)_{n\geq n_0}$.
*Alors la suite* $(u_{\varphi(n)})_{n\geq n_0}$ *est convergente, et sa limite est celle de* $(u_n)_{n\geq n_0}$.
**Démonstration** — *On utilise la définition de la convergence.*

***Risque d'erreur***
*Attention ! Le contraire est faux. Une suite qui n'est pas convergente peut avoir une suite extraite convergente. On pensera à* $((-1)^n)_{n\geq 0}$.

La contraposée de la proposition précédente permet de montrer qu'une suite est divergente.

Corollaire 103
*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une suite réelle.*
*S'il existe* $(v_n)_{n\geq n_0}, (w_n)_{n\geq n_0}$ *deux suites extraites de* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *qui convergent et qui ont des limites différentes* $(\lim_n(v_n) \neq \lim_n(w_n))$*, alors la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est divergente.*

Exemple 104 — *La suite* $(-1)^n$ *n'est pas convergente car les suites extraites de terme général* $(-1)^{2n} = 1$ *et* $(-1)^{2n+1} = -1$ *sont convergentes de limites respectives* $1$ *et* $-1$ *qui sont différentes.*

Exercice 12 — *Montrer que la suite de terme général* $(\cos(\frac{\pi n}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente.*

# 7 Propriétés des ensembles de nombres réels

## 7.1 Bornes supérieures et inférieures

*L'une des différences fondamentales entre l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$ *et l'ensemble des nombres rationnels* $\mathbb{Q}$ *est la propriété de la borne supérieure. Cette proprieté est fondamentale pour faire de l'analyse. Définissons cela.*

Définition 105 (**Borne supérieure/Borne inférieure**)
*Soit* $X \subset \mathbb{R}$ *un ensemble non-vide et majoré (respectivement minoré).*
*On appelle* ***borne supérieure*** *de* $X$*, notée* $\sup(X)$*, le plus petit majorant de* $X$ *dans* $E$*, s'il existe.*
*On appelle* ***borne inférieure*** *de* $X$*, notée* $\inf(X)$*, le plus grand minorant de* $X$ *dans* $E$*, s'il existe.*
*Plus formellement, cela s'écrit :*

- *Si* $M$ *est un majorant de* $X$ *tel que pour tout majorant* $A$ *de* $X$ *on a* $M \leq A$*, alors* $M = \sup(X)$*. (*$\sup(X)$ *est le plus petit des majorants)*
  *Cela s'écrit aussi :* $M = \sup(X) = \min(\{A \in \mathbb{R},\ t.q.\ \forall x \in X,\ x \leq A\})$.
- *Si* $m$ *est un minorant de* $X$ *tel que pour tout minorant* $a$ *de* $X$ *on a* $a \leq m$*, alors* $m = \inf(X)$*. (*$\inf(X)$ *est le plus grand des minorants)*
  *Cela s'écrit aussi :* $m = \sup(X) = \max(\{a \in \mathbb{R},\ t.q.\ \forall x \in X,\ x \leq a\})$.

Exemple 106 — • *Si un ensemble* $E$ *admet un maximum, alors il possède une borne supérieure. De plus, on a* $\sup(E) = \max(E)$.
• *Et si cet ensemble* $E$ *admet un minimum, alors il possède une borne inférieure. De plus, on a* $\inf(E) = \min(E)$.

Exercice 13 — *Prenons l'intervalle* $I = [0, \sqrt{2}[$.

1. *Montrer que* $I$ *admet une borne inférieure et une borne supérieure dans* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $I \cap \mathbb{Q}$ *admet une borne inférieure dans* $\mathbb{R}$*, mais pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$.

On a cette propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ :

Théorème 107 (**Propriété de la borne supérieure**)
*Soit $X$ une partie de $\mathbb{R}$.*

1. *Si $X$ est majorée, alors elle admet une borne supérieure ($\sup(X)$ existe).*
2. *Si $X$ est minorée, alors elle admet une borne inférieure ($\inf(X)$ existe).*

Remarque 108 — *Nous avons vu à l'exercice précédent que cette propriété n'était pas valable pour $\mathbb{Q}$ puisque $[0, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}$ est une partie majorée, mais elle n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. L'ensemble des majorants de $[0, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}$ est $[\sqrt{2}, +\infty[\cap\mathbb{Q}$, et cet ensemble ne possède pas de minimum (il n'a pas de plus petit élément).*

Remarque 109 — *Pour un ensemble $E$ contenu dans $\mathbb{R}$, nous avons trois objets différents liés aux comparaisons : majorant/maximum/borne supérieure (resp. minorant/minimum/borne inférieure).*
*Si $E$ est majoré, alors il possède une borne supérieure. Il ne possède pas forcément de maximum (Ex : $E = ]-\infty, 1[$).*
*Si $E$ est minoré, alors il possède une borne inférieure. Il ne possède pas forcément de minimum (Ex : $E = ]-1, +\infty[$).*

## 7.2 Déterminer un sup ou un inf

Montrer qu'un ensemble $E$ possède une borne sup (inf) revient à montrer qu'il est majoré/minoré.
Montrer que $E$ possède un maximum (minimum) revient à trouver un élément $x \in E$ qui est un majorant (minorant) de $E$.
Si $E$ possède un maximum (minimum), alors on a $\sup(E) = \max(E)$ ($\inf(E) = \min(E)$).
Comment déterminer $\sup(E)$ ($\inf(E)$) lorsque $E$ n'a pas de maximum (minimum) ?

Proposition 110
*Soient $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble, $M$ un majorant de $X$, $m$ un minorant de $X$.*
*Alors, on a $M = \sup(X)$ si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ dans $X$ qui converge vers $M$ ($u_n \to_{n\to+\infty} M$).*
*On a $m = \inf(X)$ si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ dans $X$ qui converge vers $m$ ($u_n \to_{n\to+\infty} m$).*
**Démonstration** —*Admis.*

Méthode 111 (**Déterminer la borne supérieure d'un sous-ensemble $X$ de $\mathbb{R}$**)

1. *Prendre un réel $M$ qui semble être la borne supérieure de $X$.*
2. *Montrer que $M$ est un majorant de $X$.*
3. *En déduire que $X$ possède une borne supérieure.*
4. *Tester si $M$ appartient à $X$. Si oui, alors $M = \max(X)$ et donc $M = \sup(X)$.*
5. *Si non, déterminer une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ d'éléments de $X$ qui converge vers $M$.*
6. *En conclure que $M$ est la borne supérieure de $X$.*

La méthode est similaire pour la borne inférieure.

Exercice 14 — *Soit $X = \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^\star\}$.*
*Montrer que $X$ possède un sup et un inf, et les déterminer.*

## 7.3 Caractérisation des intervalles

Une autre façon de caractériser les intervalles de $\mathbb{R}$ est la propriété suivante.

PROPOSITION 112
*Soit $X \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.*
*Alors, $X$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ avec $a \leq b$, on a $[a, b] \subset X$.*
**Démonstration** —*Admis.*

## 8 Extension brève aux suites complexes

On peut aussi définir la convergence d'une suite à valeurs complexes, avec les notions définies pour les suites réelles. Cela utilise la partie réelle et la partie imaginaire.
Pour une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à valeurs complexes, on notera en général son terme général $u_n = R_n + i.I_n$, avec $R_n = Re(u_n)$ et $I_n = Im(u_n)$.
L'ensemble des suites à valeurs complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

DÉFINITION 113 (**Suite bornée**)
*Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite à valeurs complexes.*
*On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **bornée** si la suite réelle $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ des modules de $u_n$ est bornée.*

DÉFINITION 114 (**Convergence d'une suite à valeurs complexes**)
*Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite à valeurs complexes, et $l \in \mathbb{C}$.*
*On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ **converge vers** $l$, noté $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, si la suite réelle $(|u_n - l|)_{n \geq n_0}$ converge vers $0$.*

EXERCICE 15 — *Donner une définition à l'aide de quantificateurs $(\exists, \forall)$ et de $\epsilon, n_0, |.|$ le fait u'une suite complexe soit convergente.*

PROPOSITION 115
*Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*
*La suite $(u_n = R_n + i.I_n)_{n \geq n_0}$ est convergente si et seulement si les suites réelles $(R_n)_{n \geq n_0}$ et $(I_n)_{n \geq n_0}$ sont convergentes.*
*On a alors $\lim_n(u_n) = \lim_n(R_n) + i. \lim_n(I_n)$.*
**Démonstration** —*Admis.*

PROPOSITION 116
*Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On a :*

1. *Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente, alors sa limite est unique.*
2. *Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente, alors elle est bornée.*
3. *Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente, alors toutes ses suites extraites sont convergentes.*
4. *Si $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}$ sont convergentes, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(u_n.v_n)_{n \geq n_0}$ est convergente et $\lambda.u_n + \mu.v_n$ est convergente.*

**Démonstration** —*Admis.*

***Risque d'erreur***

*Il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ comme $\leq$ sur $\mathbb{R}$.*
*Pour une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, il faut donc prendre garde à ne pas parler de suite croissante/décroissante, de suite majorée/minorée, ni de suite divergente vers $+\infty/-\infty$. Cela n'a pas de sens.*
*On ne peut pas appliquer le théorème de la limite monotone, celui suites adjacentes, ou celui des gendarmes à une suite à valeurs complexes.*

EXERCICE 16 — *Montrer que la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ est convergente, et déterminer sa limite.*

***Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :***

- *Définition de suite, suite majorée, minorée, bornée, monotone, convergente, divergente. Savoir montrer qu'une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *vérifie l'une de ces propriétés.*
- *Savoir calculer le terme général d'une suite arithmétique* $(u_{n+1} = u_n + b)$, *géométrique, arithmético-géométrique* $(u_{n+1} = au_n + b)$, *et récurrente linéaire d'ordre* 2.
- *Limite d'une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$. *Limite finie, limite infinie. Unicité de la limite.*
  *Limite d'une somme, d'un produit de suites convergentes.*
  *On fera attention aux formes indéterminées* $(+\infty.0, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \ldots)$.
- *Théorème de convergence monotone : Une suite croissante converge ssi elle est majorée. Sinon elle diverge vers* $+\infty$. *Une suite décroissante converge ssi elle est minorée. Sinon elle diverge vers* $-\infty$.
- *Convergence et limite de la suite géométrique* $(q^n)_{n\geq 0}$.
- *Théorème de comparaison* $(u_n \leq v_n)$, *sur la convergence/divergence.*
- *Suites adjacentes, définition. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite. Savoir utiliser le Théorème des gendarmes pour déterminer la limite d'une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$.
- *Croissances comparées entre* $\ln(n)^a$, $n^b$ $(b > 0)$, $e^n|c^n$, $n!$.
- *Suite extraite* $(u_{\phi(n)})_{n\geq n_0}$. *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *converge alors* $(u_{\phi(n)})_{n\geq n_0}$ *converge. Si* $(u_{2n})_{n\geq n_0}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\geq n_0}$ *converge, alors* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *converge.*
  *Utiliser des suites extraites pour montrer que* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *diverge.*
- *Suites récurrentes. Savoir déterminer le comportement d'une suite récurrente de la forme* $u_{n+1} = f(u_n)$, *où* $f$ *est monotone. Utilisation de preuves par récurrence.*
- *Définition de borne supérieure et inférieure d'un ensemble* $X \subset \mathbb{R}$. *Elles existent si* $X$ *est majoré (sup) ou minoré (inf).*
- *Savoir manipuler les suites à valeurs complexes.*