Chapitre 7
Nombres réels et suites

Table des matières

Vidal AGNIEL

1 Ensembles usuels de nombres et leurs propriétés

Un certain nombre de concepts utiles pour développer cette section ont été vus au fil du cours. Il s'agit :

1. Des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ (et $\mathbb{D}$).
2. De la droite réelle $\mathbb{R}$, la relation d'ordre $\leq$, ainsi que les notions de majorant, minorant, maximum et minimum d'une partie A.
3. Les parties de $\mathbb{R}$, en particulier les intervalles.
4. La fonction valeur absolue $|.|$.
5. La fonction partie entière $\lfloor \cdot \rfloor$.

1.1 Bornes supérieures et inférieures

L'une des différences fondamentales entre l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est la propriété de la borne supérieure. Cette proprieté est fondamentale pour faire de l'analyse. Définissons cela.

Définition 1 (**Borne supérieure/Borne inférieure**)
Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$ et $X \subset E$ un ensemble non-vide et majoré (respectivement minoré).
*On appelle **borne supérieure** de X, notée $\sup(X)$, le plus petit majorant de X dans E, s'il existe.*
*On appelle **borne inférieure** de X, notée $\inf(X)$, le plus grand minorant de X dans E, s'il existe. Plus formellement, cela s'écrit :*
- *Si M est un majorant de X tel que pour tout majorant A de X on a $M \leq A$, alors $M = \sup(X)$. ($\sup(X)$ est le plus petit des majorants)*
- *Si m est un minorant de X tel que pour tout minorant a de X on a $a \leq m$, alors $m = \inf(X)$. ($\inf(X)$ est le plus grand des minorants)*

Exemple 2 — • *Si un ensemble E admet un maximum, il s'agit de sa borne supérieure.*
Si $\max(E)$ existe, alors $\sup(E) = \max(E)$.
• *Et si cet ensemble E admet un minimum, il s'agit de sa borne inférieure.*
Si $\min(E)$ existe, alors $\inf(E) = \min(E)$.

Exercice 1 — *Prenons l'intervalle $I = [0, \sqrt{2}[$.*

1. *Montrer que I admet une borne inférieure et une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que $I \cap \mathbb{Q}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{Q}$, mais pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.*

On a cette propriété fondamentale de $\mathbb{R}$:

Théorème 3 (**Propriété de la borne supérieure**)
Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

1. *Si X est majorée, alors elle admet une borne supérieure ($\sup(X)$ existe).*
2. *Si X est minorée, alors elle admet une borne inférieure ($\inf(X)$ existe).*

Remarque 4 — *Nous avons vu à l'exercice précédent que cette propriété n'était pas valable pour $\mathbb{Q}$ puisque $[0, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}$ est une partie majorée, mais elle n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.*
L'ensemble des majorants de $[0, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}$ est $[\sqrt{2}, +\infty[\cap\mathbb{Q}$, et cet ensemble ne possède pas de minimum (il n'a pas de plus petit élément).

1.2 Approximation décimale d'un réel

La propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est une propriété d'existence. Elle s'énonce simplement, mais ses conséquences sont très vastes. Elle est par exemple très liée au fait que tout nombre réel x peut être approché "aussi près que l'on veut" par des nombre rationnels.

THÉORÈME 5 (**Approximation décimale d'un réel**)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n = \frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} \leq x \leq \frac{\lfloor x.10^n \rfloor + 1}{10^n} = v_n.$$

*Le terme de gauche est **l'approximation décimale de x à 10^{-n} près, par défaut**.*
*Le terme de droite est **l'approximation décimale de x à 10^{-n} près, par excès**.*
Les nombres u_n et v_n définissent des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. Ce sont des suites de nombres rationnels qui convergent vers x.
***Démonstration** — On a $\frac{x.10^n-1}{10^n} < \frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} \leq \frac{x10^n}{10^n}$, donc $x - \frac{1}{10^n} < \frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} \leq x$.*
La suite $(u_n)_n$ converge donc vers x d'après le théorème des gendarmes. □

PROPOSITION 6
Soient $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble, M un majorant de X, m un minorant de X.
Alors, on a $M = \sup(X)$ de X si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_n$ dans X qui converge vers M $(u_n \to_n M)$.
On a $m = \inf(X)$ de X si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_n$ dans X qui converge vers m $(u_n \to_n m)$.
Démonstration —*Admis.*

MÉTHODE 7 (**Déterminer la borne supérieure d'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$**)

1. *Prendre un réel M qui semble être la borne supérieure de X.*
2. *Montrer que M est un majorant de X.*
3. *Déterminer une suite $(u_n)_n$ d'éléments de X qui converge vers M.*
4. *En conclure que M est la borne supérieure de X.*

Pour la borne inférieure, la méthode est similaire.

EXERCICE 2 — *Soit $X = \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^\star\}$.*
Montrer que X possède un $\sup$ et un $\inf$, et les déterminer.

1.3 Intervalles

Une autre façon de caractériser les intervalles de $\mathbb{R}$ est la propriété suivante.

PROPOSITION 8
Soit $X \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.
Alors, X est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ avec $a \leq b$, on a $[a, b] \subset X$.
Démonstration —*Admis.*

2 Généralités sur les suites réelles

2.1 Définitions

DÉFINITION 9 (**Suite réelle**)
*Une **suite réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*
On la note également $(u_n)_{n\geq 0}$ (ou $(u_n)_n$).

Le nombre u_n est appelé le ***terme général*** *de la suite $(u_n)_n$.*
Le nombre entier n est appelé ***l'indice*** *du terme u_n.*
L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 10 — *L'expression $(n^2)_{n\geq 0}$ est une suite, dont le terme général est $u_n = n^2$.*

Remarque 11 — ***Attention !*** *Il ne faut pas confondre la suite $(u_n)_n$ avec l'un de ses termes u_n (qui est seulement un nombre).*

Remarque 12 — *On va souvent définir une suite $(u_n)_n$ qui n'est pas indexée sur $\mathbb{N}$, mais sur $\{n_0, n_0+1, \dots\}$ (l'ensemble des entiers, à partir de n_0).*
On notera alors dans ce cas $(u_n)_{n\geq n_0}$.
Si le terme de départ de la suite n'est pas clair (0 ou 1 ou n_0), on utilisera la notation $(u_n)_{n\geq n_0}$ plutôt que la notation $(u_n)_n$.

Remarque 13 — *Atention ! Si on souhaite définir une suite $(u_n)_{n\in I}$ sur un certain ensemble d'entiers naturels I, il faut s'assurer que son terme général u_n existe bien. C'est-à-dire que pour tout $n \in I$, u_n ait un sens.*

Exemple 14 — *La suite de terme général $\dfrac{1}{n}$ ne peut pas se définir sur tout $n \in \mathbb{N}$ mais seulement à partir du rang $n_0 = 1$. On notera donc cette suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$*

Définition 15
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite et k un entier supérieur à n_0.
On appelle ***k-ième terme*** *de la suite $(u_n)_n$ le nombre réel u_{n_0+k-1}.*
Le premier terme est u_{n_0}, le deuxième terme est u_{n_0+1}, ...

Exercice 3 — *Déterminer à partir de quel indice n_0 on peut définir la suite $(\frac{2n}{1-\frac{n^2}{7,5}})_n$.*
Puis, calculer les 3 premiers termes de cette suite.

2.2 Variations d'une suite

Tout comme les fonctions au chapitre 2, les suites réelles possèdent aussi une notion de variation (suites croissantes, décroissantes, strictement croissantes, strictement décroissantes).

Exemple 16 — *On peut vérifier la croissance et la décroissance des suites suivantes comme sur les fonctions.*

- *La suite (n^2) est croissante, car pour tout $0 \leq n \leq m$ on a $n^2 \leq m^2$.*
- *La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est décroissante. En effet, pour tout $1 \leq n \leq m \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{n}$.*

Pour définir correctement la variation d'une suite, il suffit de comparer deux termes consécutifs (u_n et u_{n+1}) pour toutes les valeurs de n possibles. Pour les fonction $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle, il n'y a pas de notion de réel "juste après" x. C'est pour cela que la défition suivante est un peu différente de celle vue au Chapitre 2.

Définition 17 (**Variations**)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. Alors :

- *La suite $(u_n)_n$ est* ***croissante*** *si pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq u_{n+1}$.*
- *La suite $(u_n)_n$ est* ***décroissante*** *si pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n+1}$.*
- *La suite $(u_n)_n$ est* ***constante*** *si pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n = u_{n+1}$.*
- *La suite $(u_n)_n$ est* ***strictement croissante*** *si pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n < u_{n+1}$.*

- *La suite $(u_n)_n$ est **strictement décroissante** si pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n > u_{n+1}$.*

*Quand $(u_n)_n$ vérifie l'une de ces conditions, on dit qu'elle est **monotone**.*

Exemple 18 —

— *La suite $(\frac{1+n}{1+n^2})_{n\geq 0}$ est décroissante.*
En effet, soit $n \geq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+(n+1)}{1+(n+1)^2} - \frac{1+n}{1+n^2} \\ &\underbrace{=}_{\text{réduction au même dénominateur}} \frac{(2+n)(1+n^2)-(1+n)(1+(n+1)^2)}{(1+(n+1)^2)(1+n^2)} \\ &= \frac{-3n-n^2}{(1+(n+1)^2)(1+n^2)} \leq 0 \end{aligned}$$

— *La suite $(v_n)_n$ définie pour tout entier $n \geq 0$ par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + 2$ est croissante.*
En effet, pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_{n+1} - u_n = 2 \geq 0$.

— *La suite $(e)_{n\geq 0}$ est constante.*

Proposition 19

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite.
Alors, la suite $(u_n)_n$ est constante si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = k$.

Démonstration —*Admis.*

Il existe plusieurs moyens généraux de montrer qu'une suite est monotone. Examinons-en trois différents.

Méthode 20 (**Monotonie par différence**)

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante/décroissante, on peut étudier le signe de $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Par définition, trois cas se présentent :

— *Soit pour tout $n \geq n_0$, on a $v_n \geq 0$. Dans ce cas là, $(u_n)_n$ est croissante.*

— *Soit pour tout $n \geq n_0$, on a $v_n \leq 0$. Dans ce cas là, $(u_n)_n$ est décroissante.*

— *Soit il existe deux entiers $n_1, n_2 \geq n_0$ tels que v_{n_1} et v_{n_2} sont de signes opposés. Dans ce cas, la suite $(u_n)_n$ n'est pas monotone.*

Exemple 21 — *Montrons que la suite $(n^3 - 2n)_{n\geq 1}$ est croissante par la méthode des différences. On pose*

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= ((n+1)^3 - 2(n+1)) - (n^3 - 2n) \\ &= n^3 + 3n^3 + 3n + 1 - 2n - 2 - n^3 + 2n \\ &= 3n^2 + 3n - 1 \underbrace{\geq}_{n\geq 1} 3n^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cela démontre bien que cette suite est croissante.

Méthode 22 (**Monotonie par quotient**)

*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite dont **tous les termes sont strictement positifs**.*
Pour montrer que $(u_n)_n$ est monotone, on peut comparer la quantité $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
Trois cas se présentent :

— *Soit pour tout $n \geq n_0$, on a $v_n \geq 1$. Dans ce cas, $(u_n)_n$ est croissante.*

— *Soit pour tout $n \geq n_0$, on a $v_n \leq 1$. Dans ce cas, $(u_n)_n$ est décroissante.*

— *Soit il existe deux entiers $n_1, n_2 \geq n_0$ tels que $v_{n_1} > 1$ et $v_{n_2} < 1$.*
Alors la suite $(u_n)_n$ n'est pas monotone.

EXEMPLE 23 — *Montrons que la suite $(\frac{(n+1)!}{2^n})_{n\geq 1}$ est strictement croissante.*
On pose :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= \frac{\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{2^n}} \\ &= \frac{2^n \times (n+2)!}{(n+1)! \times 2^{n+1}} \\ &= \frac{n+2}{2} \\ &= \frac{n}{2} + 1 \underbrace{>}_{n\geq 1} 1 \end{aligned}$$

Cela démontre bien que cette suite est strictement croissante.

<u>MÉTHODE</u> 24 (**Monotonie par récurrence**)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.
— *On calcule les premiers termes de la suite.*
— *Si il n'y a pas de régularité dans l'ordre des premiers termes on en conclut que la suite n'est pas monotone.*
— *Si la suite semble être croissance/décroissante, on pose la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$" (ou $(u_n \leq u_{n+1})$.*
Et, on essaie de prouver par récurrence sur $n \geq n_0$ que les propriétés $\mathcal{P}(n)$ sont vraies.

EXEMPLE 25 — *Soit $(u_n)_n$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_n)^2}$.*

1. *Calculons les premiers termes de la suite : $u_0 =$, $u_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$, $u_3 = \sqrt{1+3} = 2$.*
2. *On obtient $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$.*
   Ainsi, on conjecture que $(u_n)_n$ est croissante.
3. *On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}$: "$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$".*
   — *<u>Initialisation</u> : La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque nous avons calculé les premiers termes et constaté que $u_0 \leq u_1$.*
   — *<u>Hérédité</u> : Supposons que la propriété $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Montrons alors que $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.*
   On remarque que par hypothèse de récurrence, les m premiers termes de la suite $(u_n)_n$ sont strictement positifs.

$$\begin{aligned} u_{m+1} - u_m &= \sqrt{1 + (u_m)^2} - u_m \\ &= \sqrt{1 + (u_m)^2} - \sqrt{1 + (u_{m-1})^2} \\ &= (\sqrt{1 + (u_m)^2} - \sqrt{1 + (u_{m-1})^2}) \times \frac{(\sqrt{1 + (u_m)^2} + \sqrt{1 + (u_{m-1})^2})}{(\sqrt{1 + (u_m)^2} + \sqrt{1 + (u_{m-1})^2})} \\ &= \frac{(u_m)^2 - (u_{m-1})^2}{(\sqrt{1 + (u_m)^2} + \sqrt{1 + (u_{m-1})^2})} \\ &= \frac{(u_m - u_{m-1}) \times (u_m + u_{m-1})}{(\sqrt{1 + (u_m)^2} + \sqrt{1 + (u_{m-1})^2})} \underbrace{\geq}_{\text{par hypothèse de récurrence}} 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie. L'hérédité est vérifiée. Cela termine la récurrence, ce qui démontre le résultat.

REMARQUE 26 — *Quand le terme général de la suite $(u_n)_n$ a une forme particulière, on préfère souvent utiliser une méthode plutôt qu'une autre.*

- *Si u_n s'écrit comme une somme, on préfèrera utiliser la méthode par différence.*
- *Si u_n s'écrit comme un produit ou un quotient, on emploiera souvent la méthode par quotient* ***lorsque cela est permis*** *(u_n de signe constant).*
  La méthode par différence peut parfois très bien fonctionner aussi.
- *Si u_n est défini par récurrence, on utilisera la méthode par récurrence si l'on n'est pas dans le cas des suites vues en cours.*

2.3 Encadrement d'une suite

Comme une suite réelle est une fonction (de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$), on peut lui appliquer la notion de majoration et de minoration.

DÉFINITION 27 (**Suites majorées/minorées**)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. Alors :

- *La suite $(u_n)_n$ est* ***majorée*** *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \leq M$.*
  On dit que M est un ***majorant*** *de $(u_n)_n$.*
- *La suite $(u_n)_n$ est* ***minorée*** *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $m \leq u_n$.*
  On dit que m est un ***minorant*** *de $(u_n)_n$.*
- *La suite $(u_n)_n$ est* ***bornée*** *si elle minorée et majorée.*

EXEMPLE 28 —

- *La suite $(u_n)_n = (n^2)_{n\geq 0}$ est minorée mais pas majorée.*
  La suite $(n^2)_{n\geq 0}$ est minorée par 0, son premier terme, car elle est croissante.
  Démontrons par l'absurde que $(n^2)_{n\geq 0}$ n'est pas majorée. Supposons que cette suite est majorée, par un certain réel M. On a donc $\forall n \geq 0,\ u_n \leq M$. Cela donne $M > 0$.
  Posons $n_0 = \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1$. Par définition de la partie entière, on a :

$$\begin{aligned} & 0 \leq \sqrt{M} < \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1 \\ \text{donc} \quad & (\sqrt{M})^2 \underbrace{<}_{\text{par croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}_+} (\lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1)^2 \\ \text{donc} \quad & M < (\lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1)^2 = u_{n_0}. \end{aligned}$$

  Cela contredit le fait que M est un majorant de $(u_n)_n$. Contradiction.
  Cela démontre que la suite $(n^2)_{n\geq 0}$ n'est pas majorée.
- *La suite $(v_n)_n = (\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est bornée.*
  En effet, elle est décroissante donc majorée par son premier terme $M = 1$. Et elle est positive donc minorée par $m = 0$.

REMARQUE 29 — *Attention ! L'ordre des quantificateurs est absolument important dans la définition de suite majorée/minorée.*
En effet, soit $(u_n)_n$ une suite.
La proposition "$\forall n \geq n_0,\ \exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq u_n \leq M$" est alors forcément vraie. Il suffit de considérer $M = m = u_n$.
Le minorant m ou le majorant M de la suite $(u_n)_n$ ***ne dépendent pas*** *de n.*

PROPOSITION 30
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

— *Si $(u_n)_n$ est croissante, alors elle est minorée par u_{n_0}.*
— *Si $(u_n)_n$ est décroissante, alors elle est majorée par u_{n_0}.*

Démonstration — *On procède par récurrence sur n.*

Remarque 31 — *Une suite peut être croissante et majorée (par exemple $(1-\dfrac{1}{n})_n$) ou bien croissante et non majorée (par exemple $(n^2)_n$).*

Méthode 32 (**Encadrer une suite**)
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

— *Si on sait que $(u_n)_n$ est monotone, on peut appliquer la proposition précédente en la majorant ou minorant par son premier terme.*
— *Si la suie n'est pas monotone, on peut conjecturer un encadrement et le démontrer par récurrence.*
— *Dans certains cas, on utilise des comparaisons entre fonctions, ainsi que le signe, pour trouver un majorant et un minorant de u_n.*
Ex : $u_n = \frac{2+n}{1+n^2}$, minorée par 0 car positive, majorée par 1 pour $n \geq 2$, donc majorée par $\max(u_0, u_1, 1) = 2$.

3 Formes explicites

Les suites dites explicites ($u_n = f(n)$, pour f une fonction connue) sont des suites dont les termes peuvent se calculer indépendamment, ce qui rend leur calcul pratique. Cela est différent dessuites définies par récurrence (ex : $u_{n+1} = g(u_n)$).

Définition 33 (**Suite récurrente**)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.
*On dit que est $(u_n)_{n\geq n_0}$ **récurrente** ou **définie par récurrence** si, pour tout entier $n > n_0$, le terme général u_n se définit en fonction des termes $u_{n_0}, \dots, u_{n-1}$.*

Exemple 34 —

1. *La suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = (u_n)^2 + 4$ est une suite récurrente.*
2. *La suite $(u_n) = (n^2)_n$ n'est pas définie comme une suite récurrente. Cependant, si l'on cherche une relation entre u_{n+1} et u_n, on obtient : $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$.*
On peut donc aussi écrire cette suite avec une relation de récurrence.
3. *La suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, est une suite récurrente. (C'est en fait une suite géométrique)*
4. *La suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = n^2.u_n + u_{n-1}^2$, est une suite récurrente.*

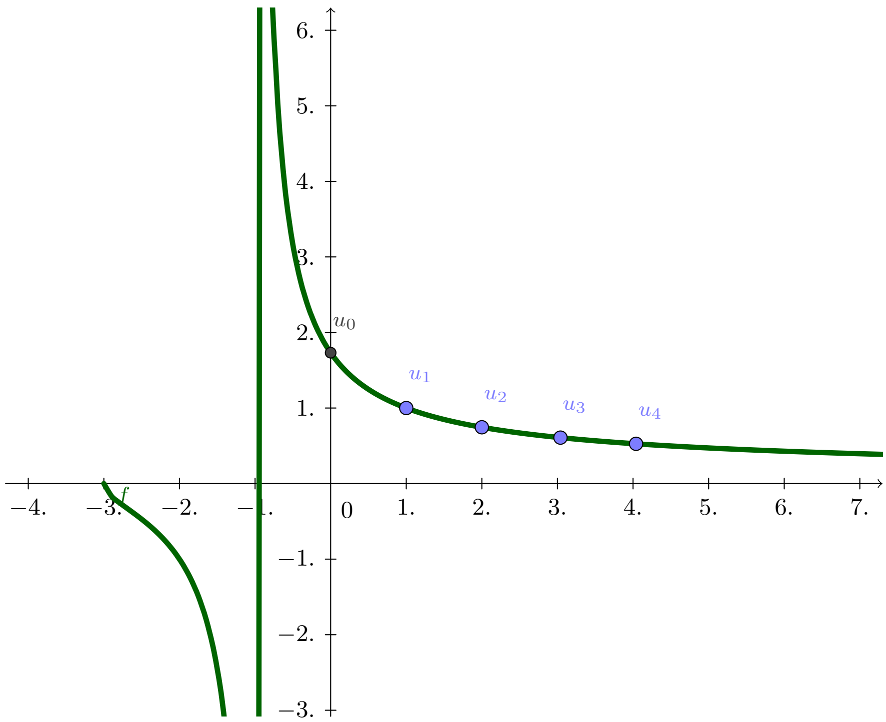
Définition 35 (**Suite explicite**)
Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est explicite s'il existe une fonction $f : [n_0, +\infty[$ telle que pour tout entier $n \geq n_0$, on ait $u_n = f(n)$.
*On dit que f est la **fonction associée** à la suite $(u_n)_n$.*

Exemple 36 — *La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n+3}}{1+n}$ est une suite explicite définie par la fonction $f : [0, +\infty[$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{1+x}$.*

Il existe un lien entre la monotonie de la fonction associée à une suite explicite $(u_n)_n$ et la monotonie de la fonction associée.

Proposition 37
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle qui est explicite, de fonction associée f. Alors :
- *Si f est croissante sur $[n_0, +\infty[$, $(u_n)_n$ est croissante.*
- *Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$, $(u_n)_n$ est décroissante.*

Démonstration —
En utilisant un graphique, on peut représenter une suite explicite via le graphe de sa fonction associée.



Premiers termes de $(\frac{\sqrt{n+3}}{1+n})$

Exemple 38 — *On pose $(u_n)_n = (\frac{2+n}{1+n})_n$.*
Cette suite est explicite, de fonction associée $f : x \in [0, \infty[\mapsto \frac{2+x}{1+x}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{-1}{(1+x)^2}$. Comme $f' < 0$, on en déduit que f est décroissante et donc que $(u_n)_n$ est une suite décroissante.

3.1 Suites arithmétiques et géométriques

Parmi les suites les plus classiques, nous avons les suites arithmétiques et géométriques.

Définition 39 (**Suite arithmétique**)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.
La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***arithmétique*** *s'il existe un réel r tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la* ***raison*** *de la suite arithmétique.*

Exemple 40 — *La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = 3 + 5(n-2)$ est arithmétique, de premier terme $u_{n_0} = 3$ et de raison $r = 5$.*

Proposition 41
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r.
Alors on a : $u_n = (n - n_0) \times r + u_{n_0}$.
Cette suite est explicite, de fonction associée $f : x \mapsto (x - n_0) \times r + u_{n_0}$.

Démonstration — *On démontre cela par récurrence sur n.*

Proposition 42 (**Monotonie d'une suite arithmétique**)
Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. Alors :
- *Si $r > 0$, la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.*
- *Si $r = 0$, la suite $(u_n)_n$ est constante.*
- *Si $r < 0$, la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.*

Démonstration — *On regarde le signe de $u_{n+1} - u_n$.*

Définition 43 (**Suite géométrique**)
Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.
*On dit que $(u_n)_n$ est une suite **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} = q \times u_n$.*
*Le réel q est appelé la **raison** de la suite géométrique.*

Exemple 44 — *Pour $u_n = 3 \times 5^{n-2}$, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est une suite géométrique de premier terme $u_{n_0} = 3$ et de raison $q = 5$.*

Proposition 45
Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q.
Alors on a : $u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$. Cette suite est explicite, de fonction associée $f : x \mapsto u_{n_0} \times q^{x-n_0}$.
Démonstration — *On démontre cela par récurrence sur n.*

Proposition 46 (**Monotonie d'une suite géométrique**)
Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_{n_0} > 0$. Alors :
- *Si $q < 0$, la suite $(u_n)_n$ n'est pas monotone.*
- *Si $0 < q < 1$, la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.*
- *Si $q = 1$, la suite $(u_n)_n$ est constante.*
- *Si $q = 0$, la suite $(u_n)_n$ est constante à partir du rang $n_0 + 1$.*
- *Si $1 < q$, la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.*

Démonstration — *On étudie chacun des cas, en regardant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (si $u_n \neq 0$).*

Remarque 47 — *Si on suppose $u_{n_0} < 0$ on inverse le sens de la monotonie (croissant/décroissant) dans la proposition précédente.*

3.2 Suites arithmético-géométriques

Un peu plus élaboré que les suites arithmétiques ou géométriques, les suites arithmético-géométriques.

Définition 48
Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.
*La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **arithmético-géométrique** s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} = a \times u_n + b$.*

Exemple 49 — *La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = 3 \times 2^n + 1$ est arithmético-géométrique.*

En effet, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3 \times 2^{n+1} + 1 \\ &= 2 \times (3 \times 2^n) + 1 \\ &= 2 \times (3 \times 2^n + 1) + 1 - 2 \\ &= 2 \times u_n - 1. \end{aligned}$$

Cela montre que $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique, avec $a = 2$ et $b = -1$.

PROPOSITION 50
Soit $(u_n)_n$ une suite arithmético-géométrique avec pour tout $n \geq n_0$ $u_{n+1} = a \times u_n + b$, et avec $a \neq 1$.
On pose $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.
Alors la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.
Démonstration — *On écrit v_{n+1} en fonction de v_n.*

REMARQUE 51 — *Dans l'énoncé de la proposition précédente, $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$ existe bien car on suppose toujours pour une suite arithmético-géométrique que $a \neq 1$.*
Sinon, on a seulement une suite arithmétique.

COROLLAIRE 52
Soit $(u_n)_n$ une suite arithmético-géométrique avec, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$. On pose $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.
Alors, pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n = (u_{n_0} - \alpha) \times a^{n-n_0} + \alpha$,.

<u>MÉTHODE</u> 53 (**Calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique**)
Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmético-géométrique avec, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$.
- <u>*Étape 1*</u> *: Calculer u_{n_0}.*
- <u>*Étape 2*</u> *: Calculer $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.*
- <u>*Étape 3*</u> *: On obtient le terme général : $u_n = (u_{n_0} - \alpha) \times a^{n-n_0} + \alpha$.*

EXERCICE 4 — *Soit $(u_n)_n$ la suite de premier terme $u_0 = 1$ et telle que pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} - u_n = \pi \times (1 - u_n)_n$.*
Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_n$.

3.3 Sommes

Les termes d'une suite sont des nombres réels/complexes. On peut donc les sommer. Cela donne un lien entre suites arithmétiques/géométriques et sommes arithmétiques/géométriques

PROPOSITION 54
Soit $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite réelle et $n \in \mathbb{N}$.
- *Si $u_k = k$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. (Somme arithmétique)*
- *Si $u_k = k^2$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.*
- *Si $u_k = a^k$ avec $a \neq 1$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$. (Somme géométrique)*

Les techniques de sommation comme le télescopage peuvent être utilisées pour déterminer explicitement certaines suites définies par récurrence.

Méthode 55 (**Calcul du terme général à l'aide d'une somme télescopique**)
Soit $(u_n)_n$ une suite admettant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + \alpha_n$ et de premier terme u_0.

- *On vérifie que le terme α_n ne dépend pas des u_k.*
  Par exemple, $\alpha_n = \exp(u_{n-1})$ ne convient pas pour cette méthode.
- *On calcule si possible $\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k)$.*
  D'autre part, on a : $\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$.
- *On obtient alors $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k$, ce qui donne une expression explicite de u_n.*

Exemple 56 — *Calculons le terme général de la suite $(u_n)_n$ telle que $u_0 = 1$, et définie par récurrence pour tout $n \geq 0$ par $2u_{n+1} = 2u_n - \frac{6\pi n}{4} + e^n$.*

- *Remarquons que :*

$$2u_{n+1} = 2u_n - \frac{6\pi n}{4} + e^n \iff u_{n+1} = u_n - \frac{3\pi n}{4} + \frac{e^n}{2}$$

- *Pour tout $n \geq 0$, le terme $u_{n+1} - u_n = \frac{3\pi n}{4} - \frac{e^n}{2}$ ne dépend pas des valeurs de u_{n+1} et u_n.*
- *On calcule :*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3\pi k}{4} - \frac{e^k}{2}\right) \\ = & \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3\pi k}{4}\right) + \sum_{k=0}^{n}\frac{e^k}{2} \\ = & \frac{3\pi}{4} \times \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + \frac{1}{2} \times \sum_{k=0}^{n} e^k \end{aligned}$$

- *Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \frac{3\pi}{4} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{e^{n+1}-1}{e-1} + 1$*

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

4.1 Définition

Les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques appartiennent à ce qu'on appelle les suites récurrentes affines d'ordre 1. Ce sont les suites définies par récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Allons un peu plus loin.

Définition 57 (**Suite récurrente linéaire d'ordre 2**)
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.
*On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $a, b \in \mathbb{R}^\star$ tels que pour tout $n \geq 0$, on ait $u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n$.*

Remarque 58 — *Lorsque l'on veut définir une unique suite récurrente linéaire d'ordre 2, il est nécessaire de fixer les deux premiers termes u_0 et u_1.*

L'exemple principal de suite récurrente linéaire d'ordre 2 est la suite dite de Fibonacci.

EXEMPLE 59 — ***(Suite de Fibonacci)*** *La suite de Fibonacci est définie pour tout entier* $n \geq 0$ *par :* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ *et* $u_0 = 1, u_1 = 1$.
Le calcul manuel donne : $u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 8, \ldots$.

4.2 Mise sous forme explicite

Les suites récurrentes linéaires d'ordre deux peuvent se mettre sous forme explicite. Tout comme les EDL2, ll faut pour cela étudier un polynôme de degré 2 associé à la suite $(u_n)_n$.

DÉFINITION 60 (**Equation caractéristique**)
Soit $(u_n)_n$ *une suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec pour tout* $n \geq 0$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
On définit ***l'équation caractéristique*** *associée à* $(u_n)_n$ *par :*

$$x^2 - ax - b = 0$$

EXEMPLE 61 — *Avec* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, *l'équation caractéristique de la suite de Fibonacci est :*

$$x^2 - x - 1 = 0$$

.

THÉORÈME 62
Soit $(u_n)_n$ *une suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec pour tout* $n \geq 0$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
Soit $\Delta = a^2 + 4b$ *le discriminant de son équation caractéristique* $x^2 - ax - b = 0$ *associée. Alors :*

— *Cas 1 :* $\Delta > 0$
Soient x_1, x_2 *les deux racines réelles de* $x^2 - ax - b = 0$.
Il existe deux réels α, β *tels que*

$$\forall n \geq 0,\, u_n = \alpha \times (x_1)^n + \beta \times (x_2)^n.$$

— *Cas 2 :* $\Delta = 0$
Soit x_0 *la racine doube de* $x^2 - ax - b = 0$.
Il existe deux réels α, β *tels que*

$$\forall n \geq 0,\, u_n = (\alpha + n\beta) \times (x_0)^n.$$

— *Cas 3 :* $\Delta < 0$
Soient x_1, x_2 *les deux racines complexes conjuguées de* $x^2 - ax - b = 0$. *Soit* $x_1 = \rho e^{i\theta}$ *l'écriture exponentielle de* x_1.
Il existe deux réels A, B *tels que*

$$\forall n \geq 0,\, u_n = \rho^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)).$$

Démonstration —*Admise.*

EXEMPLE 63 — *Reprenons l'exemple de la suite de Fibonacci* ($u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$).
L'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ *a pour discriminant* $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$.
Cette équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *et* $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On en déduit que le terme général de la suite $(u_n)_n$ *est de la forme :*

$$u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n,$$

pour α, β deux réels qu'il faut déterminer.
Pour ce faire, on utilise le fait que $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Cela fournit un système linéaire 2×2 d'inconnues α et β :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha x_1^0 + \beta x_2^0 & = & u_0 = 1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = & u_1 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & 1 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \beta & = & 1 - \alpha \\ \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \beta & = & 1 - \alpha \\ \alpha(x_1 - x_2) & = & 1 - x_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \beta & = & 1 - \alpha \\ \alpha & = & \dfrac{1 - x_2}{x_1 - x_2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \beta & = & 1 - \dfrac{1 - x_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{1 - x_1}{x_1 - x_2} \\ \alpha & = & \dfrac{1 - x_2}{x_1 - x_2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \beta & = & \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \alpha & = & \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

Ainsi, le terme général de la suite de Fibonacci est :

$$u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}) \times (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}) \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n.$$

Cette nouvelle expression des termes de la suite de Fibonacci apporte beaucoup d'information pour leur étude.
Déjà, une suite constituée uniquement de nombres entiers s'écrit avec des sommes et puissances de nombres qui ne sont pas entiers du tout.
On a $\sqrt{5} \sim 2.2$, donc $x_1 \sim -0.6$ et $x_2 \sim 1.6$. Avec les résultats que nous verrons sur les limites de suites géométriques, on peut montrer que $u_n \sim \beta x_2^n$. C'est-à-dire que la suite de Fibonacci est croissante, et que sa vitesse de croissance est "géométrique" (elle augmente "de façon similaire" à une suite géométrique).

<u>MÉTHODE</u> 64 (**Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2**)
Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On pose $x^2 - ax - b = 0$ son équation caractéristique.

- *<u>Étape 1</u> : On détermine le signe du discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.*
- *<u>Étape 2</u> : On détermine les racines de $x^2 - ax - b = 0$.*
  Puis, on applique le théorème qui fournit une forme explicite.

— *Étape 3 : On détermine les coefficients α, β (ou A, B) en écrivant la valeur de u_0 et u_1 de deux façons différentes.*
Cela donne un système 2×2 que l'on peut résoudre avec la méthode du Pivot.

Exercice 5 — *Mettre sous forme explicite les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 suivantes :*

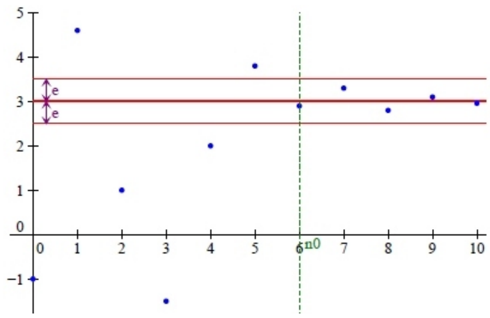
1. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
2. $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

5 Limite d'une suite réelle

Définition 65 (**Limite d'une suite**)
Soit $(u_n)_n$ d'une suite réelle, et soit $l \in \mathbb{R}$ un réel.
*On dit que la suite $(u_n)_n$ **converge vers l**, ce que l'on note $u_n \rightarrow_{n \to +\infty} l$, si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \text{ on a } u_n \in]l - \epsilon, l + \epsilon[.$$

*Moins formellement, on a $u_n \rightarrow_{n \to +\infty} l$ si tout intervalle I contenant l, aussi petit que l'on veut, contient aussi tous les termes de la suite $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang n_0. Le nombre $l \in \mathbb{R}$ est appelé **la limite** de la suite $(u_n)_n$.*



Une suite convergente vers 3.

Méthode 66 (**Raisonnement par analyse-synthèse**)
Lorsque l'on souhaite démontrer une propriété de la forme "$\exists a \in E$ telle que $\mathcal{P}(a)$ est vraie", on peut raisonner en deux étapes.

1. ***Analyse** : On suppose qu'un tel élément a existe. On utilise le fait que $\mathcal{P}(a)$ est vraie pour chercher à déterminer une expression de a.*
2. ***Synthèse** : On reprend l'expression de a obtenue par analyse.*
   On essaie alors de montrer que la propriété $\mathcal{P}(a)$ est vraie.

Définition 67 (**Suite divergente**)
Soit $(u_n)_n$ d'une suite réelle.
*Si la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.*

Exemple 68 — *La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ converge vers 0 en $+\infty$. Montrons-le.*

— *Soit $\epsilon > 0$.*
— ***Analyse** : On a $\frac{1}{n} \in]0 - \epsilon, 0 + \epsilon[\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} < n$.*
On remarque que $N_\epsilon = (\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1)$ est entier et est supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$.
— ***Synthèse** Pour tout $n \geq N_\epsilon$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$.*

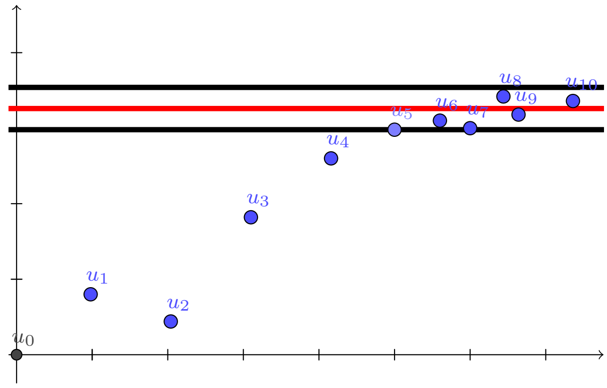


FIGURE 1 – Convergence d'une suite $(u_n)_n$

— *Donc, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$ on a $\frac{1}{n} \in]-\epsilon, \epsilon[$.*
Comme cela est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que la suite converge vers 0.

EXERCICE 6 — *Montrer que $(1 + \frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$ converge vers 1.*

Dans la définition précédente, on a employé le terme "**la limite**" et pas "**une limite**". Ceci est dû à la proposition suivante :

PROPOSITION 69 (**Unicité de la limite**)
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Soient l_1, l_2 deux réels tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2$.
Alors on a $l_1 = l_1$.
Une suite qui est convergente possède une unique limite.
Démonstration — *On démontre cela par l'absurde en supposant avoir deux limites différentes.*

DÉFINITION 70
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle qui est convergente.
*On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **la limite** de la suite $(u_n)_n$.*

EXEMPLE 71 — *Il existe des suites qui ne sont pas convergentes.*

1. *La suite des $(-1)^n$ n'est pas convergente. Elle alterne entre les valeurs -1 et 1.*
2. *La suite des n^2 n'est pas convergente*

Pour les suites réelles, une autre notion de limite est assez pratique : la limite en $+\infty/-\infty$.

DÉFINITION 72 (**Limite infinie**)
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.
*On dit que $(u_n)_n$ **tend vers** $+\infty$, noté $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$, si :*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \geq 0 \textit{ tel que } \forall n \geq n_0 \textit{ on a } u_n > M.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
*On dit que $(u_n)_n$ **tend vers** $-\infty$, noté $u_n \to_{n\to+\infty} -\infty$, si :*

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \geq 0 \textit{ tel que } \forall n \geq n_0 \textit{ on a } u_n < m.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Moins formellement, on a $u_n \to_{n\to+\infty} +\infty$ si tout intervalle de la forme $]M, +\infty[$, avec M

aussi grand que l'on veut, contient tous les termes de la suite $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang n_0.

On parle aussi de suite $(u_n)_n$ qui **diverge** vers $+\infty/-\infty$ (en opposition aux suites qui convergent vers un nombre réel l).

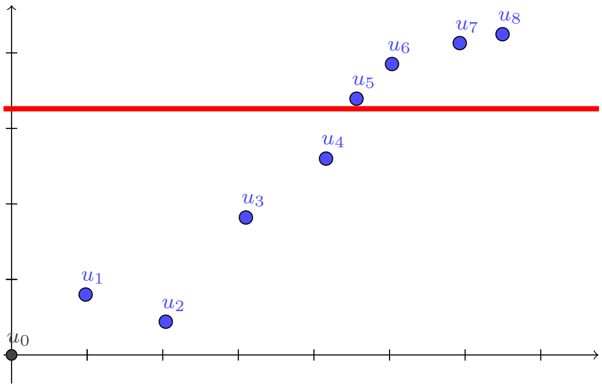
Exemple 73 — *La suite $(\sqrt{n})_n$ tend vers $+\infty$.*
En effet, soit $M \in \mathbb{R}$. On recherche un entier n_0, tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\sqrt{n} > a$.
On distingue deux cas :

1. *Si $M < 0$ l'inégalité $\sqrt{n} > M$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc choisir $n_0 = 0$.*
2. *Si $M \geq 0$, on prend $n_0 = \lfloor M^2 \rfloor + 1$. Alors, pour tout $n \geq n_0$ la croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$ nous dit que $\sqrt{n} \geq n_0 > M$.*

Dans tous les cas, on a montré que l'entier n_0 qui convient existait. Ainsi, on en conclut que $(\sqrt{n})_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 7 — *Montrer que la suite $(1 + n - n^2)_n$ tend vers $-\infty$.*

Exercice 8 — *Soit $(u_n)_n$ la suite de Fibonacci ($u_0 = 1, u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$).*
Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq n$. (Indication : Quelle méthode de démonstration faut-il utiliser ?)
En déduire que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.



Une suite $(u_n)_n$ qui diverge vers $+\infty$.

Quand on connaît la limites de certaines suites, on peut calculer la limite (si elle existe) de nouvelles suites plus compliquées.

5.1 Cas des limites finies

Proposition 74 (**Opérations sur les limites**)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suites convergentes, de limites $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = l_1 - l_2$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = l_1 \times l_2$
4. *Si $l_2 \neq 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l_1}{l_2}$

Démonstration —*Admise.*

Exemple 75 — *On considère les suites $(2 + \frac{1}{n})_{n\geq 1}$ et $(3 + (\frac{1}{2})^n)$. Alors :*

1. $\lim_{n\to+\infty}(2+\frac{1}{n}+3+(\frac{1}{2})^n) = 2+3=5$
2. $\lim_{n\to+\infty}((2+\frac{1}{n})-(3+(\frac{1}{2})^n)) = 2-3=-1$
3. $\lim_{n\to+\infty}((2+\frac{1}{n})\times(3+(\frac{1}{2})^n)) = 2\times 3=6$
4. $\lim_{n\to+\infty}(\dfrac{2+\frac{1}{n}}{3+(\frac{1}{2})^n}) = \dfrac{2}{3}$

On sait que si un réel $x>0$ est très proche de 0, alors $\frac{1}{x}$ est très grand. Cela fait apparaître un cas particulier dont il faut faire attention.

Remarque 76 — *Attention ! Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites convergentes dont la limite est* 0.
Alors la suite $(\dfrac{u_n}{v_n})$, si elle est définie, n'a pas forcément de limite.
Elle peut même converger vers n'importe quel réel a, ou diverger en l'infini.
Penser à $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{a}{n}$, ou $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 9 — *Déterminer si les suites suivantes sont convergentes. Si oui, déterminer leur limite :*

1. $\left(\dfrac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right)_{n\geq 1}$
2. $\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$
3. $\left(\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right)_{n\geq 1}$
4. $\left(\dfrac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$

5.2 Cas des limites infinies

Remarque 77 — *Attention ! L'infini ∞ n'est pas un nombre.*
Cependant, on adopte la convention suivante pour les calculs de limites :
- *Pour $\lambda>0$, on pose $\lambda\times+\infty=+\infty$ et $\lambda\times-\infty=-\infty$.*
- *Pour $\lambda<0$, on pose $\lambda\times+\infty=-\infty$ et $\lambda\times-\infty=+\infty$.*
- $+\infty\times+\infty=+\infty$ *et* $-\infty\times+\infty=-\infty$.
- $0\times+\infty$ *et* $0\times-\infty$ *ne sont pas définis (ils n'ont pas de sens).*

Remarque 78 (**Formes indéterminées**) — *Les cas de produits/quotients/sommes de limites qui ne sont pas définis sont :*
1. $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
2. $0\times+\infty$ *et* $0\times-\infty$.
3. $+\infty+(-\infty)$.

Ces cas sont appelés ***formes indéterminées*** *(FI).*
Pour déterminer la limite de $\frac{u_n}{v_n}$, $u_n.v_n$, u_n+v_n dans un cas de forme indéterminée, il faut aller plus loin dans les calculs.

On se sert de cette convention pour formaliser les opérations sur les limites infinies de suites.

Proposition 79 (**Opérations entre limite finie et limite infinie**)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites, telle que $(u_n)_n$ converge vers $l\in\mathbb{R}$ et $(v_n)_n$ diverge vers $+\infty$. On a les propriétés suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$
2. $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=-\infty$
3. *Si $l\neq 0$, alors* $\lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=l\times\infty$
4. $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$

Exemple 80 — *Les limites suivantes illustrent la précédente proposition.*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}+n)=+\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-3n^2)=-\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}((3-\frac{1}{n})\times n^2)=3\times\infty=+\infty$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2}{1+n}=0$

Proposition 81 (**Opérations entre limites finies**)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites qui divergent vers $+\infty$. On a les propriétés suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=+\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n-v_n)=-\infty$

Pour $\frac{u_n}{v_n}$ et u_n-v_n, on ne peut rien dire en général (formes indéterminées).

Exercice 10 — *Déterminer deux suites $(u_n)_n, (v_n)_n$ qui tendent vers $+\infty$, à termes strictement positifs, et telles que :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=-\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$
4. $\dfrac{u_n}{v_n}$ *n'a pas de limite.*

5.3 Relations d'ordre et limites

Proposition 82 (**Majorants/minorants et limite**)
Soit $(u_n)_n$ une suite convergente, de limite $l\in\mathbb{R}$. Alors :

- *Si $(u_n)_n$ est majorée par $M\in\mathbb{R}$, alors $l\leq M$.*
- *Si $(u_n)_n$ est minorée par $m\in\mathbb{R}$, alors $m\leq l$.*

Exemple 83 —

- *La suite $(4+3^{-n})_n$ est majorée par 6, et converge vers 4.*
- *la suite $(1-\frac{3}{n})_n$ est minorée par -2, et converge vers 1.*

6 Théorèmes d'existence de limite

Nous avons rencontré dans les précédentes sections la notion de suite convergente, et divergente en l'infini. Certaines suites ne sont pas dans ce cas comme la suite $((-1)^n)_n$.
Lorsqu'on étudie une suite il faut donc d'abord déterminer si elle admet une limite avant d'en parler.
On examine dans cette section certains cas dans lesquels on sait qu'une suite donnée admet une limite.

6.1 Théorème de la limite monotone

Théorème 84
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Alors :

- *Si $(u_n)_n$ est croissante et majorée, alors elle est convergente.*
- *Si $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, alors elle est convergente.*
- *Si $(u_n)_n$ est croissante et non-majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.*
- *Si $(u_n)_n$ est décroissante et non-minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.*

Démonstration —*Admis.*

EXEMPLE 85 —

1. $(1-\frac{1}{n})_n$ *est croissante et majorée, donc converge.*
2. $(e^{-n}\times n)_n$ *est décroissante minorée par* 0*, donc converge.*
3. $(2\times n!)_n$ *est croissante non-majorée, donc diverge par* $+\infty$.
4. $(-n^3)_n$ *est décroissante non-minorée, donc diverge vers* $-\infty$.

6.2 Suites adjacentes

DÉFINITION 86 (**Suites adjacentes**)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ *deux suites réelles.*
On dit que $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont* ***adjacentes*** *si :*
- *La suite* $(v_n)_n$ *est croissante.*
- *La suite* $(u_n)_n$ *est décroissante.*
- *La suite* $(u_n-v_n)_n$ *converge vers* 0. *(*$\lim_n(u_n-v_n)=0$*)*

THÉORÈME 87
Soient $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites adjacentes.*
Alors, les suites $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont convergentes, et elles ont la même limite. (*$\lim_n(u_n)=\lim_n(v_n)$*)*
Démonstration — *On utilise les propriétés des suites croissantes majorées et décroissantes minorées.*

EXEMPLE 88 — *Les suites* $(u_n)=(1-\frac{1}{n})$ *et* $(v_n)=(1+\frac{1}{n})$ *sont adjacentes. En effet, on a :*
- $(u_n)_n$ *est croissante.*
- $(v_n)_n$ *est décroissante.*
- *Pour tout* $n\in\mathbb{N}^\star$, $1-\frac{1}{n}-(1+\frac{1}{n})=\frac{-2}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

<u>MÉTHODE</u> 89 (Montrer que deux suites sont adjacentes)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ *deux suites réelles.*
On procède en 3 *étapes pour montrer qu'elles sont adjacentes.*

1. *On montre que la suite* $(u_n)_n$ *est décroissante.*
2. *On montre que la suite* $(v_n)_n$ *est croissante.*
3. *On montre que la suite* $(u_n-v_n)_n$ *converge vers* 0.

EXERCICE 11 (Deux suites adjacentes) — *Soient* $(u_n)_n, (v_n)_n$ *les suites définies pour tout* $n\geq 1$ *par* $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ *et* $v_n=u_n+\frac{1}{n}$.
Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
En déduire que $(u_n)_n$ *est convergente.*

6.3 Théorèmes d'encadrements

THÉORÈME 90 (**Théorème des gendarmes**)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ *trois suites réelles, telles que :*
- $(u_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *convergent, et one la même limite* l.
- *Il existe* $n_0\in\mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n\geq n_0$*, on a* $u_n\leq v_n\leq w_n$.
  La suite $(v_n)_n$ *est encadrée, à partir d'un certain rang, par* $(u_n)_n$ *et* $(w_n)_n$.

Alors $(v_n)_n$ *est une suite convergente, et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Démonstration —*Admis.*

THÉORÈME 91 (**Comparaison et divergence**)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ *deux suites réelles.*
Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$*, on ait* $u_n \leq v_n$*. On a :*

— *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
— *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration —*Admis.*

EXERCICE 12 — *On rappelle, avec les propriétés de la partie entière, que pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a* $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \leq \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$.
Montrer que la suite $(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n})_{n\geq 1}$ *converge, et montrer que sa limite est* $l = x$.

Avec les résultats sur les limites de suites et les comparaisons (suites adjacentes, théorème des gendarmes, comparaison et limites infinies), on peut déterminer la convergence des suites géométriques.

THÉORÈME 92 (**Limite de suite géométrique**)
Soient $q \in \mathbb{R}$ *et* $(u_n)_n$ *la suite géométrique :* $u_n = q^n$*. Alors :*

1. *Si* $q > 1$*, alors* $\lim_n(u_n) = +\infty$.
2. *Si* $q = 1$*, alors* $\lim_n(u_n) = 1$.
3. *Si* $-1 < q < 1$*, alors* $\lim_n(u_n) = 0$.
4. *Si* $q \leq -1$ *alors* $(u_n)_n$ *n'a pas de limite.*

Démonstration —Admis. (On pourra le démontrer de façon pratique avec les fonctions continues.)

Ces suites apparaissent souvent en mathématiques. La valeur de ces limites est à connaître.

6.4 Croissances comparées

Chez les suites, on trouve plusieurs familles de qui tendent vers $+\infty$ (logarithme, puissance, exponentielle, factorielle). On donne dans cette section des comparaisons de "vitesses de croissance/décroissance" entre ces différentes familles. Ce sont les **croissances comparées**.

THÉORÈME 93 (**Croissances comparées**)

1. $\forall q \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.
La factorielle croit "bien plus vite" que les fonctions exponentielles.
2. $\forall q \in]1, +\infty[$ *et* $\forall a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty$.
Les fonctions exponentielles croissent "bien plus vite" que les fonctions puissance.
3. $\forall q \in]-1;1[$ *et* $\forall a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^a} = 0$.
4. $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$.
Les fonctions puissance croissent "bien plus vite" que la fonction logarithme.
5. $\forall a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^a} = +\infty$.

Démonstration —*Admis.*

On retrouve dans ce résultat les croissances comparées que vous avez vues en terminale. On rappelle pour cela que pour $q > 0$, on a $q^n = \exp(n.\ln(q))$ (la suite géométrique $(q^n)_n$ est en fait une suite associée à une exponentielle).

Exercice 13 — *Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2} + n^2 \times (\dfrac{1}{2})^n + 1$.*

7 Suites extraites

Une suite extraite d'une suite $(u_n)_n$ est une suite $(v_n)_n$ composée d'une infinité de termes de la suite $(u_n)_n$. Plus précisément on a la définition suivante :

Définition 94 (**Suite extraite**)
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.
*La suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est appelée une **suite extraite de** $(u_n)_n$. On parle aussi de **sous-suite** de $(u_n)_n$.*
*La fonction φ est appelée **l'extractrice** de la suite $(u_{\varphi(n)})_n$.*

Exemple 95 —
- *La suite constante égale à 1 est une suite extraite de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
- *La suite $\big(\exp(n^2+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\exp(n))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposition 96
*Soit $(u_n)_n$ une suite **convergente**. Soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite de $(u_n)_n$.*
Alors la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est convergente, et sa limite est celle de $(u_n)_n$.
Démonstration — *On utilise la définition de la convergence.*

Risque d'erreur
Attention ! Le contraire est faux. Une suite qui n'est pas convergente peut avoir une suite extraite convergente. On pensera à $((-1)^n)_n$.

La contraposée de la proposition précédente permet de montrer qu'une suite est divergente.

Corollaire 97
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.
S'il existe $(v_n)_n, (w_n)_n$ deux suites extraites de $(u_n)_n$ qui convergent et qui ont des limites différentes ($\lim_n(v_n) \neq \lim_n(w_n)$), alors la suite $(u_n)_n$ est divergente.

Exemple 98 — *La suite $(-1)^n$ n'est pas convergente car les suites extraites de terme général $(-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$ sont convergentes de limites respectives 1 et -1 qui sont différentes.*

Exercice 14 — *Montrer que la suite de terme général $(\cos(\frac{\pi n}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.*

8 Extension brève aux suites complexes

On peut aussi définir la convergence d'une suite à valeurs complexes, avec les notions définies pour les suites réelles. Cela utilise la partie réelle et la partie imaginaire.
Pour une suite $(u_n)_n$ à valeurs complexes, on notera en général son terme général $u_n = R_n + i.I_n$, avec $R_n = Re(u_n)_n$ et $I_n = Im(u_n)_n$.
L'ensemble des suites à valeurs complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition 99 (**Suite bornée**)
Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs complexes.
*On dit que $(u_n)_n$ est **bornée** si la suite réelle $(|u_n|)$ des modules de u_n est bornée (majorée et minorée).*

Définition 100 (**Convergence d'une suite à valeurs complexes**)
Soient $(u_n)_n$ une suite à valeurs complexes, et $l \in \mathbb{C}$.
*On dit que $(u_n)_n$ **converge vers** l, noté $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, si la suite réelle $(|u_n - l|)_n$ converge vers 0.*

Exercice 15 — *Donner une définition à l'aide de quantificateurs $(\exists, \forall)$ et de $\epsilon, n_0, |.|$ le fait u'une suite complexe soit convergente.*

Proposition 101
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
La suite $(u_n = R_n + i.I_n)_n$ est convergente si et seulement si les suites réelles $(R_n)_n$ et $(I_n)_n$ sont convergentes.
On a alors $\lim_n(u_n) = \lim_n(R_n) + i.\lim_n(I_n)$.
Démonstration —*Admis.*

Proposition 102
Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On a :

1. *Si $(u_n)_n$ est convergente, alors sa limite est unique.*
2. *Si $(u_n)_n$ est convergente, alors elle est bornée.*
3. *Si $(u_n)_n$ est convergente, alors toutes ses suites extraites sont convergentes.*
4. *Si $(u_n)_n, (v_n)_n$ sont convergentes, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(u_n.v_n)_n$ est convergente et $\lambda.u_n + \mu.v_n$ est convergente.*

Démonstration —*Admis.*

Risque d'erreur
Il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ comme $\leq$ sur $\mathbb{R}$.
Pour une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, il faut donc prendre garde à ne pas parler de suite croissante/décroissante, de suite majorée/minorée, ni de suite divergente vers $+\infty/-\infty$. Cela n'a pas de sens.
On ne peut pas appliquer le théorème de la limite monotone, celui suites adjacentes, ou celui des gendarmes à une suite à valeurs complexes.

Exercice 16 — *Montrer que la suite de terme général $u_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ est convergente, et déterminer sa limite.*

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

— *Définition de borne supérieure et inférieure d'un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ (lorsqu'elle existe).*

— *Définition de suite, suite majorée, minorée, bornée, monotone, convergente, divergente. Savoir montrer qu'une suite $(u_n)_n$ vérifie l'une de ces propriétés.*

— *Savoir calculer le terme général d'une suite arithmétique ($u_{n+1} = u_n + b$), géométrique, arithmético-géométrique ($u_{n+1} = au_n + b$), et récurrente linéaire d'ordre 2.*

— *Limite d'une suite $(u_n)_n$. Limite finie, limite infinie. Limite d'une somme, d'un produit de suites convergentes.*
On fera attention aux formes indéterminées ($+\infty.0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}, \ldots$).

— *Une suite croissante majorée est convergente. Une suite décroissante minorée est convergente.*

— *Convergence et limite de la suite géométrique $u_n = q^n$.*

— *Comparaison de suites $u_n \leq v_n$, et convergence/divergence.*

— *Suites adjacentes, définition. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*
Savoir utiliser le Théorème des gendarmes pour déterminer la limite d'une suite $(u_n)_n$.

— *Croissances comparées entre $\ln(n)$, n^a ($a > 0$), et $e^n|a^n$.*

— *Suite extraite $(u_{\phi(n)})_n$. Cas $(u_{2n})_n, (u_{2n+1})_n$. Savoir utiliser des suites extraites pour montrer que $(u_n)_n$ diverge.*

— *Suites récurrentes. Savoir déterminer le comportement d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est monotone.*

— *Savoir manipuler les suites à valeurs complexes.*