Chapitre 20
Séries numériques

Table des matières

Vidal AGNIEL

Introduction

Pour une suite $(v_n)_n$, la notion qui nous intéresse le plus est la convergence : quand on prend n aussi grand que l'on veut, comment se comporte le terme v_n ?
C'est cette notion de convergence qui donne beaucoup de résultats mathématiques, et qui est aussi utilisée dans certaines structures en analyse (continuité, dérivabilité).
Les séries sont des suites.
Pour une série, au lieu de prendre des nombres u_n et de regarder leur comportement, on considère les sommes $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et on regarde leur comportement.
Une série est une suite de sommes, où pour chaque indice suivant on rajoute un terme à la somme.

1 Série, convergence, somme infinie

DÉFINITION 1
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

*On définit la **série de terme général** u_n comme la suite $(S_n)_n$, avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.*

*Le nomtre S_n est appelé **somme partielle** de la suite (u_n).*
En général, on note la série $\sum_n u_n$.

REMARQUE 2 — *On peut construire des séries à partir de suites qui ne sont pas définies à partir de $n = 0$. Dans ce cas, on changera la valeur de départ dans la somme : si $(u_n)_n$ est définie pour $n \geq n_0$, alors la série associée sera définie pour tout $n \geq n_0$, avec $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.*
***Attention !** L'expression $\sum_n u_n$ désigne la série de terme général u_n, cela désigne une suite. (et pas un nombre réel). Nous définirons par la suite le nombre réel $\sum_{n\geq 0} u_n$ (s'il existe), et il ne faudra pas confondre les deux notations.*

EXEMPLE 3 — *La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ (pour $n \geq 1$) est définie par $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.*
Attention à ne pas confondre u_n et S_n.
Les premiers termes de la suite $(u_n)_n$ sont $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{1}{9}$.
Ceux de la série $(S_n)_n$ sont $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$.

DÉFINITION 4 (**Convergence de séries, somme**)
Soit $(S_n)_n$ la série de terme général u_n.
*On dit que la série $\sum_n u_n$ est **convergente** si la suite $(S_n)_n$ est convergente.*
*Dans ce cas, on appelle **somme de la série** $\sum_n u_n$ la limite de la suite $(S_n)_n$, notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ou $\sum_{k\geq 0} u_k$.*
*Si la série n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.*
*On définit la **nature** d'une série comme l'information sur sa convergence ou divergence.*

REMARQUE 5 — ***Attention !** La convergence de la suite $(u_n)_n$ et celle de la série $\sum u_n$ ne sont pas du tout la même chose !*
Ces deux suites ont des liens entre elles (on le verra par la suite), mais il faut bien voir que ce sont deux suites différentes.
***Attention !** La somme $\sum_{n\geq 0} u_n$ d'une série convergente est définie comme la limite d'une suite. Une somme infinie est définie comme la limite d'une suite.*

Nous verrons comment manipuler ces sommes infinies, mais cela ne se fait pas aussi facilement que les sommes finies. Principalement car il faut vérifier à chaque fois que la série associée est convergente.
Quand vous êtes en face d'une série $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$, il faut toujours commencer par étudier la convergence de celle-ci (voir si la suite des sommes partielles convege ou non).

Exemple 6 — *Posons $u_n = \dfrac{1}{10^n}$, et étudions la série $\sum u_n$.*
On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1}$.
On remarque que quand n tend vers $+\infty$, la somme partielle S_n tend vers $\dfrac{-1}{\frac{1}{10} - 1} = \dfrac{10}{9}$.
On en déduit que la série $\sum_n u_n$ est convergente, et sa somme vaut $\dfrac{10}{9}$.
Ainsi : $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{10^n} = \frac{10}{9}$.

Exemple 7 — *Posons $v_n = 2 - \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$. Alors la suite v_n est convergente vers 2.*
Regardons la nature de la série $\sum_n v_n$.
Pour tout $k \geq 1$ on a $v_k \geq 1$, donc $\sum_{k=1}^{n} v_k \geq \sum_{k=1}^{n} 1 = n$.
Par conséquent, la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^{n} v_k)_n$ diverge vers $+\infty$.
La série $\sum_n v_n$ est divergente vers $+\infty$.
On écrira parfois : $\sum_{n\geq 1} v_n = +\infty$.

Exemple 8 — *Il est bien plus facile de montrer qu'une série est convergente que de calculer sa limite. Souvent, on saura que la série $\sum_n u_n$ est convergente, mais sans pouvoir calculer autrement la valeur de cette série.*
Par exemple, pour $u_n = \frac{1}{10^n}(1 - \frac{1}{1+n^{15}})$, on a $0 < u_n$.
Comme $\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} u_k$, la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$ est donc une suite croissante.
De plus, on a $u_n < \frac{1}{10^n}$, donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{\frac{1}{10^{n+1}} - 1}{\frac{1}{10} - 1} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$.
La suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_n$ est donc majorée.
Une suite croissante majorée est convergente, donc la série $\sum_n u_n$ est convergente.
Mais, on ne sait pas calculer la valeur de sa somme, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. (on sait seulement que c'est un réel compris entre 0 et $\frac{10}{9}$)

Remarque 9 — *Pour une série $\sum_n u_n$ convergente, on pourra abréger cela en CV.*
Pour une série $\sum_n v_n$ divergente, on pourra abréger cela en DV.

En analyse, les équivalents et les DL sont des outils qui permettent d'étudier la "vitesse" à laquelle une fonction/suite varie.
Nous allons faire de même pour les séries. Si une série $\sum_n u_n$ converge, à quelle "vitesse" converge-t-elle vers sa limite (sa somme) ?

Définition 10 (**Reste d'une série convergente**)
Soit $\sum_n u_n$ une série convergente.
*Pour tout $n \geq 0$, on définit le **reste d'indice** n de la série, noté $\sum_{k>n} u_k$ ou R_n, comme le réel $R_n = \sum_{k>n} u_k = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$.*
Le reste d'indice n de la série est la différence entre la somme de la série et la somme partielle S_n.

Proposition 11
Soit $\sum_n u_n$ une série convergente.
Alors la suite $(R_n)_n$ des restes de la série converge vers 0.

Démonstration — On a $R_n = \sum_{k\geq 0} u_k - S_n$. Comme la somme partielle S_n tend vers la somme de la série $\sum_n u_n$, la différence entre ces deux quantités tend vers 0. □

Pour trouver la "vitesse de convergence" de la série $\sum_n u_n$, il faut trouver un équivalent des restes R_n.

Exemple 12 — *Pour la série des $\frac{1}{10^n}$, qui est convergente, le reste d'indice n vaut $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k}$.*
On peut calculer la valeur de R_n :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n+1}} \frac{1}{10^{k-n+1}} = \frac{1}{10^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k-n+1}} = \frac{1}{10^{n+1}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{10^m} = \frac{10}{9} \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Ainsi, on connaît la "vitesse" à laquelle la série converge vers sa somme.
Ici, la vitesse de convergence est extrêmement rapide. Pour $n = 9$, l'écart entre la somme partielle et la somme de la série est de l'ordre de $\frac{1}{10^{10}}$. En calculant la somme des 9 premiers termes de la série, on a une approximation de sa somme (de sa limite) à 10^{-10} près.

Dans ce cours, nous allons voir deux grandes familles de suites : les séries à termes positifs, et les séries absolument convergentes.

Définition 13 (**Série à termes positifs**)
Soit $\sum_n u_n$ une série.
*On dit que la série $\sum u_n$ est **à termes positifs** si tous les u_n sont positifs.*

Nous étudierons beaucoup des séries à termes positifs. Elles sont plus pratiques à étudier car on ne se préocuppe pas du signe de u_n.

Proposition 14 (**Convergence d'une série à termes positifs**)
Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs.
Alors, la série $\sum_n u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles S_n est majorée.

Démonstration — Pour tout $n \geq 0$, on a $S_{n+1} = u_{n+1} + S_n$.
Comme tous les u_k sont positifs, on en déduit que $S_{n+1} \geq S_n$.
La suite $(S_n)_n$ est donc croissante.
Or, une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée. □

Comme les séries à termes positifs sont plus faciles à étudier, nous les séries absolument convergentes, qui reposent sur cela.

Définition 15 (**Série absolument convergente**)
Soit $\sum_n u_n$ une série.
*On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.*
Cela s'abrège en AC.

Proposition 16
Soit $\sum_n u_n$ une série absolument convergente.
Alors, la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Démonstration — Admis pour le moment. Vous verrez en deuxième année le critère de convergence (le critère de Cauchy) qui permettent de démontrer cette propriété. □

REMARQUE 17 — ***Attention !*** *la réciproque n'est pas vraie.*
Nous verrons un contre-exemple par la suite. ($\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$)

2 Propriétés des séries et de leur somme

PROPOSITION 18
Soit $\sum_n u_n$ *une série convergente.*
Alors, le terme général u_n *converge vers* 0.

Démonstration — En effet, si la série converge, la suite des sommes partielles converge vers la somme de la série $S = \sum_{n \geq 0} u_n$.
Donc S_n et S_{n+1} tendent vers S quand n tend vers $+\infty$.
Or, on a $u_{n+1} = S_{n+1} - S_n$. Donc, u_{n+1} converge vers $S - S = 0$. □

REMARQUE 19 — ***Attention !*** *La réciproque est fausse.*
Nous verrons un contre-exemple par la suite ($\sum_n \frac{1}{n}$).

EXEMPLE 20 — *On utilise surtout la contraposée de ce critère : Si le terme général* u_n *ne tend pas vers* 0*, alors la série* $\sum_n u_n$ *est divergente.*
Par exemple, la série de terme général $(-1)^n$ *ne converge pas.*

PROPOSITION 21 (**Linéarité de la somme**)
Soient $\sum_n u_n, \sum_n v_n$ *deux séries convergentes, et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors :*

1. *La série* $\sum (u_n + v_n)_n$ *est convergente, et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k)$.
2. *La série* $\sum \lambda u_n$ *est convergente, et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Démonstration — Cela découle des propriétés des suites convergentes (la somme de suites CV est CV, le multiple d'une suite CV est CV) et de la limite (la limite de la somme est la somme des limites, la limite d'un multiple est le multiple de la limite). □

REMARQUE 22 — ***Attention !*** *On peut ajouter deux séries convergentes entre elles, mais on ne peut pas déouper une série convergente en deux morceaux sans précautions.*
Par exemple, en prenant $u_n = \frac{1}{10^n}$*, on a vu que la série* $\sum_n u_n$ *converge.*
On peut bien écrire $u_n = 2 + \frac{1}{10^n} - 2$*, mais les séries* $\sum_n (2 + \frac{1}{10^n})$ *et* $\sum_n -2$ *sont divergentes.*
(on a rajouté et soustrait un terme de série divergente)

PROPOSITION 23 (**Encadrement et convergence**)
Soient $\sum_n u_n, \sum_n v_n$ *deux séries à termes positifs, telles que* $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang* n_0.
Si la série $\sum v_n$ *converge, alors la série* $\sum u_n$ *est aussi convergente.*
De plus, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
Si la série $\sum u_n$ *diverge, alors la série* $\sum v_n$ *diverge aussi.*

Démonstration — Supposons $\sum v_n$ convergente. Pour tout $n \geq n_0$, on a alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{k=n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{k=n} v_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

La suite des sommes partielles est donc majorée à partir d'un certain rang. Donc cette suite est majorée.
Comme la série est à termes positifs, cette série est donc convergente d'après une proposition précédente.

En passant à la limite, on obtient bien l'inégalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
Supposons maintenant $\sum u_n$ convergente. Comme la série est à termes positifs, cela veut dire que la suite de ses sommes partielles est non-majorée.
Soit $M > 0$ un réel. Alors il existe $n \geq n_0$ tel que $\sum_{k=0}^{n} u_k \geq M + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$.
Cela s'écrit aussi $\sum_{k=n_0}^{n} u_k \geq M$. Donc, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=n_0}^{k=n} v_k \geq \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=n_0}^{k=n} u_k \geq \sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + M \geq M.$$

La suite des sommes partielles est donc non-majorée, donc la série à termes positifs $\sum v_n$ est divergente. □

Nous avons utilisé implicitement ce résultat pour démontrer que la série des $\frac{1}{10^n}(1 - \frac{1}{1+n^{15}})$ est convergente. Son terme général est positif et est majoré par $\frac{1}{10^n}$, qui est le terme général d'une série convergente.

Théorème 24 (**Critère de comparaison série-intégrale**)
Soient $a \in \mathbb{R}$, et $f : [a, +\infty[$ une fonction positive, continue, et décroissante. Pour tout $n \geq a$, on pose $u_n = f(n)$.
Alors, pour tout $n \geq a+1$, on a :

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(t)dt \quad \textbf{(Méthode des rectangles)}$$

De plus, la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
On a :

$$\int_{a-1}^{b} f(t)dt \geq \sum_{k=a}^{b} f(k) \geq \int_{a}^{b+1} f(t)dt.$$

Démonstration — On utilise les propriétés de l'intégrale.
Comme la fonction f est décroissante sur $[a, +\infty[$, pour tout $t \leq n$ on a $f(t) \geq f(n)$. D'où $\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq \int_{n-1}^{n} f(n).dt = f(n).1$.
Aussi, pour tout $t \geq n$, on a $f(t) \leq f(n)$. D'où $\int_{n}^{n+1} f(t)dt \leq \int_{n}^{n+1} f(n).dt = f(n).1$.
Une fois l'encadrement par la méthode des rectangles démontré, utilisons-le.
Notons n_0 le premier indice de la suite (le premier entier n tel que $n \geq a$).
On a alors :

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = f(n_0) + \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k).$$

Or,

$$\int_{n_0}^{n} f(t)dt = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt \geq \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)dt = \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)dt.$$

Ainsi :

$$f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt \geq \sum_{k=n_0}^{n} u_k \geq f(n_0) + \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)dt.$$

On peut alors démontrer que si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ a une limite finie L en $+\infty$, la série $\sum u_n$ est majorée par $f(n_0) + L$, donc est convergente (série à termes positifs majorée).
Et réciproquement, si la série $\sum u_n$ est CV, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est croissante majorée sur $[a, +\infty[$, donc admet une limite finie en $+\infty$. □

Exemple 25 — *La série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$ (pour $n \geq 2$) vérifie les hypothèses de ce théorème. Elle a donc la même nature que $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)}\ dt$.*
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(t) = \ln(t)$. Une primitive est donc $t \mapsto \ln(\ln(t))$.
Ainsi, on a $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)}\ dt = [\ln(\ln(t))]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))$.
Comme $\lim_{x \to +\infty} \ln(\ln(x)) = +\infty$, la série est divergente.

THÉORÈME 26 (**Séries à termes généraux équivalents**)
Soient $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n \sim v_n$.
Alors $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\sum v_n$ est convergente.
Si $\sum u_n, \sum v_n$ sont convergentes, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$. Les suites des restes de ces séries sont équivalentes.
Si $\sum u_n, \sum v_n$ sont divergentes, on a $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$. Les suites des sommes partielles de ces séries sont équivalentes.

Démonstration — Ce théorème sera revu et démontré en deuxième année. Il est extrêmement utile car il permet d'étudier plus facilement la convergence d'une série, en s'aidant de séries "de référence" que nous allons étudier ensuite. □

EXEMPLE 27 — *Pour la série des $\frac{1}{10^n}(1-\frac{1}{1+n^{15}})$, cette série est à termes positifs, et on a $\frac{1}{10^n}(1-\frac{1}{1+n^{15}}) \sim \frac{1}{10^n}$.*
Comme la série des $\frac{1}{10^n}$ est convergente, cette série est convergente.
De plus (par rapport au théorème d'encadrement de séries), on sait que les suites des restes sont équivalentes.
Pour la série des $\frac{1}{10^n}$, on a vu que le reste d'indice n, R_n vaut :

$$R_n = \frac{10}{9}\frac{1}{10^{n+1}}.$$

On en déduit donc que $\sum_{k>n} \frac{1}{10^k}(1-\frac{1}{1+k^{15}}) \sim \frac{10}{9}\frac{1}{10^{n+1}}$.
Cette suite a elle aussi une vitesse de convergence extrêmement rapide. Il suffit de calculer la somme des premiers termes pour avoir une bonne approximation de la somme de la série (de sa limite).

MÉTHODE 28 (**Montrer qu'une série est convergente via les croissances comparées**)
Cette méthode s'applique aux séries à termes positifs, dont le terme général est de la forme $\frac{a_n}{b_n}$. Il faut de plus que b_n soit un terme qui domine a_n d'après les croissances comparées ($\ln(n)^a << n^a << a^n << n!$), et que la série $\sum_n \frac{1}{b_n}$ soit convergente.
Alors, la série $\sum_n \frac{a_n}{b_n}$ est convergente.
En effet :

— *Si b_n est de la forme a^n avec $a > 1$ ou $n!$, alors on aura $\frac{n^2.a_n}{b_n} \to_n 0$ d'après les croissances comparées.*
  Donc, pour n assez grand, on aura $\frac{n^2.a_n}{b_n} < 1$, c'est-à-dire $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{1}{n^2}$.
— *Si b_n est de la forme n^a avec $a > 1$, alors on aura $\frac{n^{1+\frac{a}{2}}.a_n}{b_n} \to_n 0$ d'après les croissances comparées.*
  Donc, pour n assez grand, on aura $\frac{n^{1+\frac{a}{2}}.a_n}{b_n} < 1$, c'est-à-dire $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{1}{n^{1+\frac{a}{2}}}$.

Cette méthode, au programme de PT, demande plus de précision pour être utilisée mais permet de montrer facilement que d'autres séries convergent. Un exemple est la série exponentielle (voir plus bas).

3 Séries classiques

DÉFINITION 29 (**Séries télescopiques**)
Soit $\sum u_n$ une série.
*On dit que $\sum u_n$ est une **série télescopique** s'il existe une suite $(v_n)_n$ telle que $u_n = v_{n+1} - v_n$, pour tout $n \geq 0$.*
On l'écrit aussi $\sum(v_{n+1} - v_n)$.

Proposition 30 (**Convergence des séries télescopiques**)
Soit $\sum u_n$ *une série télescopique, avec* $u_n = v_{n+1} - v_n$.
Alors, la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ *est convergente si et seulement si la suite* $(v_n)_n$ *est convergente.*
De plus, si la suite $(v_n)_n$ *converge, on a* $\sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n) = \lim_n(v_n) - v_0$.

Démonstration — La somme partielle est une somme télescopique. On a donc : $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_0$.
Cela permet d'obtenir tous les résultats de l'énoncé. □

Exemple 31 — *On veut étudier (nature, somme) la série de terme général* $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, *pour* $n \geq 2$.
C'est une série à termes négatifs. Transformons l'expression :
$u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2}) = \ln(\frac{n^2-1}{n^2}) = \ln(\frac{(n-1)(n+1)}{n.n}) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n) = (\ln(n-1) - \ln(n)) + (\ln(n+1) - \ln(n))$ *On reconnaît la somme de deux séries télescopiques.*
On a $\sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1) - \ln(k)) = \ln(1) - \ln(n) = 0 - \ln(n)$.
Et, $\sum_{k=2}^{n}(\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(n+1) - \ln(2)$.
Donc, $\sum_{k=2}^{n} u_k = -\ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = \ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(2) = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(2)$.
Cette suite est convergente, vers $-\ln(2)$.
Ainsi, la série est convergente, et $\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2)$.

Définition 32 (**Séries géométriques**)
Soit $q \in \mathbb{R}$.
La série $\sum q^n$ *est appelée* ***série géométrique*** *de raison* q.

Proposition 33 (**Convergence des séries géométriques**)
Soit $q \in \mathbb{R}$.
La série géométrique $\sum q^n$ *est convergente si et seulement si* $|q| < 1$.
Dans ce cas, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Démonstration — Si $q = 1$ la série est divergente car les sommes paritlles valent $S_n = n + 1$.
Si $q \neq 1$, les sommes partielles sont des sommes géométriques : $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
En utilisant les résultats sur la convergence de q^n, on en déduit que si $|q| < 1$ la suite des sommes partielles converge vers $\frac{1}{1-q}$.
Si $q = -1$ ou si $|q| > 1$, les sommes partielles ne convergent pas. □

Définition 34 (**Série harmonique**)
La série $\sum \frac{1}{n}$ *(avec* $n \geq 1$*) est appelée* ***série harmonique***.
Son terme général est $\frac{1}{n}$.

Proposition 35
La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ *est divergente.*
Plus précisément, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

Démonstration — Pour démontrer cela on utilise le théorème de comparaison série-intégrale, avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Pour tout $k \geq 2$, on a $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_k^{k-1} \frac{1}{t}\, dt$.

Ainsi, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k-1} \frac{1}{t}\, dt$$

$$\int_{2}^{n+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n-1} \frac{1}{t}\, dt$$

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n-1) - \ln(1)$$

Le membre de gauche est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$, et le membre de droite aussi. Donc, on obtient $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$, ce qui permet d'obtenir le résultat. □

La série harmonique est divergente, mais très lentement (à vitesse logarithmique). Pour $n = 1.000.000 = 10^6$, la somme partielle est équivalente à $\ln(10^6) = 6\ln(10) \simeq 13,8$.

Définition 36 (**Séries de Riemann**)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
*La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(n \geq 1)$ est appelée **série de Riemann** de paramètre α.*
Son terme général est $\frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 37 (**Convergence des séries de Riemann**)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si $\alpha \leq 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente.
Si $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
De plus, on a un équivalent de son reste : $R_n = \sum_{k>n} \dfrac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Démonstration — Si $\alpha \leq 1$, pour $n \geq 1$ on a $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$.
Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (c'est la série harmonique), on obtient le résultat.
Si $\alpha > 1$, on refait une comparaison série-intégrale, avec $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.
Pour tout $k \geq 2$, on a $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k}^{k-1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$.
On a $\int_a^x \frac{1}{t^\alpha} = [\frac{1}{-(\alpha-1)} \frac{1}{t^{\alpha-1}}]_a^x == \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$.
Comme $\alpha - 1 > 0$, on trouve que $\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$, donc l'intégrale en question est convergente quand $x \to +\infty$.
Avec la même méthode que pour la série harmonique, on encadre le reste $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k^\alpha}$ par deux intégrales, qui sont toutes deux équivalentes à $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. □

Les séries de Riemann sont un exemple fondamental de séries convergentes/divergentes. Dans beaucoup de cas, on se contente de comparer une série de terme u_n à une série de Riemann, pour conclure sur sa convergence ou non.
En particulier, on trouve que la série des $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Des théorèmes d'analyse en PT montreront que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Pour le moment, on sait que cette série converge vers sa somme à la vitesse de $\frac{1}{n}$ (son reste R_n est équivalent à $\frac{1}{n}$). La série des $\frac{1}{n^3}$ est convergente, et converge vers sa somme à la vitesse de $\frac{1}{2n^2}$.

Exemple 38 — ***(Série alternée)***
Voici un exemple de série convergente, mais pas absolument convergente.
On pose $u_n = \sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ (pour $n \geq 1$).
On remarque que le signe de u_n alterne entre positif et négatif, alors que la valeur de $|u_n|$ décroit vers 0.
Pour montrer que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est convergente, on va séparer l'étude des termes d'indices pairs et impairs, et utiliser le critère des suites adjacentes.
La suite $(S_{2n})_n$ des termes d'indices pairs est croissante car $S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} +$

$\dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} > 0.$
De même la $(S_{2n+1})_n$ des termes impairs est décroissante (on a $S_{2n+3} - S_{2n+1} > 0$).
De plus, la différene $S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$ tend vers 0.
Les deux suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes, et convergent donc vers une limite commune. Ainsi la suite $(S_n)_n$ est convergente.
En fait, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.
Par contre, la série des $|u_n|$ est la série de $\frac{1}{n}$, qui n'est pas convergente.
La série des $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente.

Proposition 39 (**Série exponentielle**)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ est convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Démonstration — Pour montrer que cette série est convergente, on montre qu'elle est absolument convergente (on regarde les $\dfrac{|x|^n}{n!}$, c'est plus pratique).
Il faut alors montrer que la série des $\dfrac{|x|^n}{n!}$ est majorée.
Prenons n_0 un entier tel que $n_0 \geq 2|x|$.
Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{n_0}.|x|^{n-n_0)}}{(n_0)!.(n_0+1).\dots.n} = \frac{|x|^{n_0}}{(n_0)!}\frac{|x|^{n-n_0}}{(n_0+1).\dots.n} \leq \frac{|x|^{n_0}}{(n_0)!}\frac{|x|^{n-n_0}}{(2|x|)^{n-n_0}} \leq \frac{|x|^{n_0}}{(n_0)!}\frac{1}{2^{n-n_0}}.$$

Avec cette inégalité, on peut montrer qu'à partir du rang n_0, le terme $\dfrac{|x|^n}{n!}$ est majoré par le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ (à un facteur multiplicatif près).
On a vu que la série géométrique en question est convergente, donc la série des $\dfrac{|x|^n}{n!}$ est convergente par critère de comparaison des séries à termes positifs. □

Exemple 40 — *Quand on choisit $x = 1$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.*
On peut donc calculer une valeur approchée de e de cette façon, et retrouver que $e \simeq 2,7$.
De même, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \simeq 0,36$.

Proposition 41 (**Série logarithme**)
Soit $x \in]-1,1[$. Alors, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ est convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^k}{k} = \ln(1+x).$$

Démonstration — Cette série est une série alternée. Montrer sa convergence se fait comme dans l'exemple précédent. L'égalité entre la somme et $\ln(1+x)$ est hors-programme. □

Remarque 42 — *Les sommes de séries géométrique, exponentielle, logarithme donnent les fonctions $\frac{1}{1-x}, \exp(x), \ln(1+x)$.*
Les termes de ces séries sont exactement les termes des développements limités de leurs sommes (x^n, $\frac{x^n}{n!}$, $\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$).
Ces séries font partie de la famille des séries entières ($\sum a_n x^n$). Ces séries définissent des

fonctions qui vont pouvoir être décomposées avec la formule de Taylor tout comme les polynômes : le coefficient devant x^n *est* $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
Ce lien très fort entre DL et séries entières est développé en 2e année et en L3.

4 Bilan des méthodes

Lorsque l'on est face à une série $\sum_n u_n$, on regardera plus ou moins dans l'ordre :

— Le terme de départ de la série.
Cela permet d'écrire les sommes partielles S_n sans erreurs.

— Les premières valeurs des sommes partielles S_n.
Cela permet parfois de constater des valeurs particulières, une croissance, des oscillations, une divergence.

— Le signe de u_n quand n tend vers $+\infty$.
Si le signe de u_n est constant à partir d'un certain rang, on pourra utiliser les résultats du cours sur les séries à termes positifs.
Sinon, on ne peut pas utiliser ces résultats (les appliquer serait totalement faux).

— La limite de u_n quand $n \to +\infty$.
Si $u_n \to 0$ la série peut être convergente.
Sinon, elle est divergente.

— L'expression de u_n par rapport aux séries classiques.
Si u_n s'écrit comme une combinaison linéaire de séries classiques (ex : $u_n = \frac{3}{2^n} - \frac{4}{n^2}$, on peut obtenir la nature de la série à partir des séries classiques.
Attention, cela ne fonctionne pas pour les produits de termes généraux (la série de terme $\frac{1}{n}.\frac{1}{n}$ est CV)

— Si u_n s'écrit de la forme $v_{n+1} - v_n$.
Cela donne une série télescopique, qui se calcule alors très facilement.

— Un équivalent de u_n. (Pour séries à termes positifs)
Pour obtenir un équivalent on pourra utiliser une factorisation par le terme dominant ou des DL (mais pas les croissances comparées).
Il n'est pas toujours possible d'obtenir un équivalent plus simple.
En général, quand on obtient $u_n \sim v_n$, le terme v_n est un terme général de série usuelle (à une constante près).
Alors la nature de $\sum_n u_n$ est la même que celle de $\sum_n v_n$.

— Une majoration/minoration de u_n. (Pour série à termes positifs)
Il suffit que la majoration soit vraie à partir d'un certain rang.
En général une majoration est plus technique à obtenir qu'un équivalent. On peut utiliser les croissances comparées pour avoir une majoration.
Si $u_n \leq v_n$ avec $\sum_n v_n$ CV, alors $\sum_n u_n$ est CV.
Si $v_n \leq u_n$ avec $\sum_n v_n$ DV, alors $\sum_n u_n$ est DV.

— Un encadrement série-intégral. (Pour séries à termes positifs)
On écrit u_n comme $f(n)$, avec f une fonction continue, positive, décroissante.
Il faut pouvoir calculer une primitive F de f, sinon la méthode n'est pas utile.
On fait un dessin au brouillon de la courbe de f, des valeurs de u_n, et des intégrales de f entre $n-1$ et n et entre n et $n+1$.
On a alors $\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq u_n \geq \int_{n}^{n+1} f(t)dt$. Si $F(n)$ est majorée quand $n \to +\infty$, alors la série $\sum_n u_n$ est CV. Si $F(n) \to +\infty$ alors la série $\sum_n u_n$ est DV.

Ces éléments permettent d'étudier la majorité des séries que vous rencontrerez. Les premières informations ne sont pas suffisantes pour montrer la CV/DV d'une série, mais permettent de mieux comprendre comment se comporte la série et ainsi trouver le résultat/le calcul qui permet de trouver la nature de $\sum_n u_n$.
Pour les exemples et contre-exemples classiques, il faut se référer aux séries usuelles ($\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{2^n}$, $\frac{(-1)^n}{n}$, $\frac{1}{n!}$).

Pour le calcul de la somme d'une série, les approximations (équivalent, DL, croissances comparées, majoration/minoration) sont inutiles.
En général il faut réécrire le terme u_n comme une somme de termes de séries usuelles dont on connaît la somme (séries géométriques/exponentiennes/de Riemann), ou bien observer un télescopage.
Calculer la somme d'une série est bien plus compliqué en général que déterminer sa convergence/divergence.

5 Developpement décimal d'un réel

L'application des séries que nous voyons dans ce chapitre est le développement décimal d'un nombre réel.

Théorème 43
Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.
Alors il existe une suite d'entiers $(a_n)_n$, avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ pour $n \geq 1$, telle que :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

De plus, si on impose que la suite $(a_n)_n$ n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang, celle-ci est unique.
Les nombres de la suite $(a_n)_n$ forment le ***développement décimal*** *du nombre réel x.*

Démonstration — Avec la définition donnée, les chiffres constituant la suite (à part a_0 qui est la partie entière de x) sont simplement les décimales du nombre x, écrit sous forme décimale usuelle.
Une série de la forme $\sum \frac{a_n}{10^n}$ avec $a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ (et $a_0 \in \mathbb{Z}$) est convergente : En effet, à part a_0 elle est à termes positifs, et pour $n \geq 1$ on a $\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$.
Les termes de la série sont majorés, à partir de $n = 1$, par ceux d'une série géométrique (de raison $\frac{1}{10}$). Comme cette série géométrique est convergente, on en déduit par critère de comparaison que la série $\sum \frac{a_n}{10^n}$ est convergente.
Pour montrer que la suite des commes partielles converge vers x, il faut utiliser les propriétés de la valeur absolue. Cette partie est admise. $\square$

Théorème 44
Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel.
Alors x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration —
• Si $x = \dfrac{p}{q}$ est un nombre rationnel, on peut obtenir les chiffres de la suite $(a_n)_n$ en effectuant la division euclidienne de p par q. Le nombre de restes possibles à chacune des étapes de cette division étant fini, on finira par obtenir à une certaine étape un reste déjà obtenu précédemment. Alors, les étapes suivantes vont répéter exactement les mêmes opérations que précédemment. A partir d'un certain rang, la suite des décimales de x est périodique.
• Réciproquement, supposons que la suite $(a_n)_n$ des décimales de x est périodique à partir d'un certain rang. Posons $n_0 + 1$ le rang à partir duquel la périodicité apparaît, et posons r la longueur de la période. Notons $b_1, \ldots, b_r$ les entiers qui composent la période.
On pose $y = (x - a_0, a_1 \ldots a_{n_0}).10^{n_0}$. (On retire à x sa partie entière et ses n_0 premières décimales, et on multiplie le tout par 10^{n_0}.
On a alors : $y = \sum_{k \geq 1} \frac{a_{n_0+k}}{10^k} = 0, a_{n_0+1} a_{n_0+2} \ldots$.
Autrement dit, on a $y = 0, b_1 b_2 \ldots b_r b_1 b_2 \ldots b_r \ldots$.
Le nombre y est un nombre dont les décimales sont périodiques, dès la première décimale (période r, et le motif est $b_1 \ldots b_r$).

Alors, $10^r.y = b_1b_2\dots b_r, b_1b_2\dots b_r\dots$.
Et donc,

$$10^r y - y = (b_1b_2\dots b_r, b_1b_2\dots b_r\dots) - 0, b_1b_2\dots b_r\dots = b_1b_2\dots b_r = b_1.10^r + b_2.10^{r-1} + \dots + b_{r-1}.10 + b_r.$$

On en déduit donc que $(10^r - 1).y$ est un entier. Donc y est un rationnel.
Comme on a $y = (x - a_0, a_1\dots a_{n_0}).10^{n_0}$, on a $x = \frac{y}{10^{n_0}} - a_0, a_1\dots a_{n_0}$. Donc, x est un rationnel (comme quotient et somme de rationnels). □

Exemple 45 — *Prenons $x = 2,15674237813781378137813781\dots$ (les décimales répétant le motif 3781), et trouvons une forme rationnelle de x.*
On a : $(x - 2,156742).10^6 = 0,37813781\dots$.
Donc $(x - 2,156742).10^{10} = 3781,37813781\dots$.
Ainsi, on a $(x - 2,156742).10^{10} - (x - 2,156742).10^6 = 3781$.
Cela donne : $(x - 2,156742).10^6.(10^4 - 1) = 3781$.
D'où : $x - 2,156742 = \frac{3781}{10^6.9999}$.
Enfin : $x = \frac{3781}{10^6.9999} + 2,156742 = \frac{3781}{10^6.9999} + \frac{2156742}{10^6} = \frac{3781+2156742.9999}{10^6.9999}$.
On a bien obtenu une écriture rationnelle de x, même si cette écriture est sûrement simplifiable.

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :
— Définition d'une série $\sum u_n$, de la convergence, de la somme infinie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, de son reste.
— Connaître les propriétés des séries convergentes : Le terme général u_n tend vers 0, le reste tend vers 0, somme et multiples de séries CV.
— Savoir prouver correctement la convergence d'une série : Critère de convergence des séries à termes positifs. Propriété des séries absolument convergentes. Encadrement de séries à termes positifs. Critère de comparaison série-intégrale. Séries à termes généraux équivalents.
— Connaître les exemples de référence (déf, nature, somme) : Série géométrique $\sum q^n$, série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$, série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^a}$, série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$.
— Savoir utiliser les exemples de référence pour montrer qu'une série $\sum u_n$ est convergente ou divergente (comparaison, équivalent)
— Savoir effectuer un calcul de somme de série dans un cas simple ou classique.