Feuille de TD n° 0

Logique et raisonnement

Exercice 1.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère les propositions suivantes.

— P_1 : « La fonction f est minorée par 1 ».
— P_2 : « Il existe un nombre réel positif x tel que $f(x)$ est positif ».
— P_3 : « La fonction f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut ».
— P_4 : « Pour tous réels x et y, la distance entre $f(x)$ et $f(y)$ est plus petite que la distance entre x et y.

1. Ecrire chacune des propositions avec des quantificateurs. Ecrire leur négation.
2. Pour chacune des propositions, donner des exemples de fonctions telles que la proposition soit vraie, puis des exemples de fonctions telles que la proposition soit fausse.

Exercice 3. Soient x, a et b des nombres réels. Compléter les pointillés avec $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ou $\Leftarrow$ pour que les propositions suivantes soient vraies :

1. $x < 1 \quad \dots \quad \ln(x) < 0$,
2. $x \in \{2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} \quad \dots \quad \sin(x) = 1$,
3. $x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \quad \dots \quad \sin(x) = 0$,
4. $x = \frac{\pi}{3} \quad \dots \quad \cos(x) = \frac{1}{2}$,
5. $|x| \leq 3 \quad \dots \quad 0 \leq x \leq 3$,
6. $\frac{1}{x} > 0 \quad \dots \quad x > 0$,
7. $a^2 = b^2 \quad \dots \quad a = b$,
8. $ab > 0 \quad \dots \quad a > 0$ et $b > 0$.

Exercice 4.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.
2. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 - n$ n'est pas un multiple de 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $P(n)$ la proposition « n est un multiple de 2 » et $Q(n)$ la proposition « $n^2 + n$ est un multiple de 3 ».

1. Déterminer les valeurs de vérité de « $(P \;\, et \;\, Q)(n)$ » (qui signifie « $P(n)$ *et* $Q(n)$ ») pour tous les entiers n entre 5 et 15.
2. Quels sont tous les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que $Q(n)$ est vraie ?
   On pourra utiliser la division euclidienne par 3.
3. Quels sont tous les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que $(P \; et \; Q)(n)$ est vraie ?

Exercice 5. On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est ouvert si :

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \big(|x - y| < \varepsilon \Longrightarrow y \in A\big).$$

1. Montrer que $]0, 1[$ est ouvert.
2. $[0, 1[$ est-il ouvert ?

Exercice 6. Démontrer les propositions suivantes, en précisant le type de raisonnement utilisé.

1. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique fonction paire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x \neq y$ alors $(x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
4. Si n est le carré d'un nombre entier m non nul, alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a 4 divise n^2 ou 4 divise $n^2 - 1$.
8. Pour tous $a < b$ réels, on a $[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$.
9. Soit x un réel. Si, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|x| < \varepsilon$, alors $x = 0$.

Exercice 7 (Formulations différentes)**.** On considère les deux propositions suivantes :

- P : Le quadrilatère est un parallélogramme
- Q : Les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu.

Indiquer pour chaque phrase la construction logique $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$, $P \Leftrightarrow Q$.

1. Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il est nécessaire que ses diagonales se coupent en leur milieu.
2. Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.
3. Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme est que ses diagonales se coupent en leur milieu.
4. Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

Exercice 8. Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.

1. Pour qu'un quadrilatère soit un carré, il est nécessaire qu'il ait 3 angles droits.
2. Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle.
3. Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme.
4. Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un losange est que ses diagonales se coupent orthogonalement en leur milieu.
5. Pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il est nécessaire et suffisant qu'il ait 3 angles droits.
6. Un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles et de même longueur est un rectangle.
7. Pour qu'un rectangle soit un carré, il est suffisant que ses diagonales soient orthogonales.

Exercice 9 (Conditions nécessaires, suffisantes, nécessaires et suffisantes)**.**

1. Relire le point du cours sur les conditions nécessaires et suffisantes.
   Si $x = 0$, est-ce une condition nécessaire ou suffisante pour que $x^2 = x$?
2. Si $x \geq 0$, est-ce une condition nécessaire ou suffisante pour que $x^2 = x$?
   Indication : A chaque fois, il faut se demander s'il y a une implication, et si oui dans quel sens elle est (éventuellement une équivalence).
3. Montrer que $x = 2\ln(2)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $2\exp(\frac{1}{2}x) + 3 = 7$.
4. Donner une condition suffisante et non nécessaire pour qu'un entier naturel n soit strictement plus grand que 10.
5. Donner une condition nécessaire et non suffisante pour qu'un entier naturel n soit divisible par 6.

Exercice 10. Soit $\mathcal{C}$ un carré.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ un entier, on dit qu'on peut découper $\mathcal{C}$ en n carrés si on peut trouver une partition de $\mathcal{C}$ en n carrés, qui ne sont pas forcément de la même taille.

1. Montrer qu'on peut découper le carré $\mathcal{C}$ en 4 carrés, en 6 carrés, en 7 carrés et en 8 carrés.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que si on peut découper le carré $\mathcal{C}$ en n carrés, alors on peut découper $\mathcal{C}$ en $n + 3$ carrés.
3. Montrer que pour tout $n \geq 6$, on peut découper $\mathcal{C}$ en n carrés.
4. On ne peut pas découper $\mathcal{C}$ en 2, 3 ou 5 carrés.
   Démontrer cela, en essayant d'être le plus rigoureux possible.
   Quel type de raisonnement utiliser ?

Exercice 11. Une personne en vélo parcourt 30 kilomètres en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes où cette personne a parcouru exactement 5 kilomètres.
Est-ce qu'il existe nécessairement un intervalle de temps de 40 minutes où elle a parcouru 20 kilomètres ?

Exercice 12. On a $i^2 = -1$. On peut donc noter $i = \sqrt{-1}$.
On a $i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$. Donc, on a $-1 = i^2 = 1$.
Cette preuve est fausse. Où est l'erreur ?