Feuille de TD n° 1

Calculs algébriques

Logique

Exercice 1. Cet exercice consiste a étudier des propositions logiques. A priori on ne cherche pas à savoir si elles sont justes ou fausses sauf lorsque cela sera précisé.

1. Convertir chacun des énoncés suivants à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
   (a) Pour tout nombre réel, il existe un entier qui lui soit supérieur.
   (b) La fonction exponentielle prend la valeur 1.
   (c) La fonction carrée ne prend pas la valeur -1.
2. Transformer les énoncés suivants en énoncé n'utilisant pas de symboles mathématiques et déterminer s'ils sont justes.
   (a) $x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{Q}, x \neq q$.
   (b) $\exists q \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq q$.
   (c) $\exists n \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{R}, n^y = 81$.
   (d) $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists! a \in \mathbb{Z}, \exists! b \in \mathbb{Z}, x = \dfrac{a}{b}$.
3. Exprimer la négation des énoncés suivants.
   (a) Toutes les chauves-souris volent.
   (b) A tout étudiant de PTSI correspond un autre étudiant de la classe qui n'est pas son ami.
   (c) Tous les sacs à mains contiennent au moins un porte-feuille.

Simplifications

Exercice 2. Simplifier :

1. $A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$
2. $B = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
3. $C = \sqrt{3-2\sqrt{2}} \times \sqrt{3+2\sqrt{2}}$
4. $D = \dfrac{(\sqrt{ab})^4}{b^3a^{-1}b^{-1}}$, avec $a, b \in]0, +\infty[$.

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(e^{3x}) - e^{\ln(3x)}$
2. $\dfrac{e^{-4\ln x}e^{\ln(x^5)}}{e^{\ln(\frac{1}{2})}}$
3. $\dfrac{exp(x^2)}{(e^x)^2}$
4. $\ln(2x) - \ln(x)$

Résolution d'équations, inéquations, tableaux de signes ...

Exercice 4 (Valeur absolue)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x+1| = 2$
2. $|x-3| < 2$
3. $|x+4| \geq 5$
4. $|x+1| - |2x+1| = 0$
5. $3|2x+5| + |x+2| \geq 0$

Exercice 5 (Racine carrée)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{x-4} = 2$
2. $\sqrt{6x+19} = 3x+1$
3. $x - 2 = \sqrt{x}$

Exercice 6. Donner le tableau de signe des fonctions suivantes :

1. $P_1(x) = x^2 - x - 6$.
2. $P_2(x) = x^2 + 1$.
3. $P_3(x) = x^2 + 2x + 1$.
4. $P_4(x) = x^4 - 9$.
5. $Q_1(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{-2x^2 + 1}$.
6. $Q_2(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-3}$.

On fera attention au domaine de définition.

Exercice 7.

1. Démontrer que pour $x \neq 1$ on a
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$
2. En utilisant des inégalités, démontrer que pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$ on a
$$0 \leq \frac{x^2}{1-x} \leq 2x^2.$$
3. En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{1-x}$ sur $[-1/2, 1/2]$.

Exercice 8. Donner le signe et factoriser (si c'est possible) les quantités suivantes :

1. $(\ln(x))^2 - \ln(x) - 6$
2. $x - \frac{1}{x}$

Exercice 9. Déterminer les solutions (si il y en a) des systèmes suivants :

$(a) \begin{cases} x + y &= 2 \\ xy &= 1 \end{cases}$ $\quad (c) \begin{cases} e^{a+b} &= 3 \\ e^a + e^b &= 4 \end{cases}$

$(b) \begin{cases} x + y &= 5 \\ xy &= 10 \end{cases}$ $\quad (d) \begin{cases} x + y &= 3 \\ xy &= m \end{cases}$, en fonction de $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $(\ln(x))^2 - \ln(x) \geq 0$
2. $x = 2 - \sqrt{x}$
3. $exp\left(\frac{3x+4}{2x-5}\right) \leq 0$
4. $exp\left(\frac{3x+4}{2x-5}\right) \geq 1$
5. $\ln\left(\frac{3-x}{x+2}\right) \geq 0$

Exercice 11. Donner le domaine de définition de chaque fonction.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+5) + \ln(7-3x) + e^{-2x} \\ g(x) &= \frac{\ln(x^2 - 4x + 3)}{e^{2x} - 5} \\ h(x) &= \sqrt{x^2 - x - 6}. \end{aligned}$$

Exercice 12. Soit $m \in \mathbb{R}$.
Résoudre, en fonction de m, les équations et inéquations suivantes.

1. $(m+2)x^2 + 4mx + (4m-2) = 0$.
2. $(m+2)x^2 + 4mx + (4m-2) > 0$.
3. $(m^2 + m - 2)x + (m+2)(m-3) = 0$.

Exercice 13.

1. Résoudre l'équation $|4 + 2x| + 12 - 2x = x^2$, avec $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de
$$|4 + 2\ln(x)| + 12 - 2\ln(x) = (\ln(x))^2$$
3. Même question pour $|4e^{-x} + 2| + 12e^{-x} - 2 = e^x$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 14. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a
$$\frac{1}{3} \leq \frac{x+1}{2x+3} \leq \frac{1}{2}.$$
Trouver une deuxième façon de prouver ces inégalités.

Exercice 15. Montrer que l'équation $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=0$ possède une solution dans $\mathbb{R}\setminus 1$.
Est-ce que la solution trouvée est unique ?

Exercice 16. Soit $x\in[2,3]$. Fournir un encadrement de $\dfrac{x^3-x+1}{x^2+1}$.

Sommes et produits

Exercice 17 (Somme téléscopique)**.**

1. Déterminer des réels c, d tels que :
$$\frac{c}{k}+\frac{d}{k+1}=\frac{1}{k(k+1)} \text{ pour tout } k\in\mathbb{N}^*$$
2. Déterminer des réels a et b tels que :
$$\frac{a}{k(k+1)}+\frac{b}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k(k+1)(k+2)},\ \text{ pour tout } k\in\mathbb{N}^*.$$
3. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$.
Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ à l'aide de la méthode des sommes télescopiques vue en cours.

Exercice 18 (Simplification)**.** Écrire sans le symbole Π ou $\sum$ les expressions suivantes. On utilisera des sommes et produits usuels vus en cours.

1. $\Pi_{k=1}^{n}(2k+1)$
2. $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k(k-1)}$
3. $\Pi_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$
4. $\Pi_{k=1}^{n}\dfrac{2k}{k+1}$
5. $\Pi_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$

Sommes doubles

Exercice 19. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer une expression des sommes doubles suivantes, seulement en fonction de n.

1. $S_1=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}min(i,j)$
2. $S_2=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n}\dfrac{i}{j}$
3. $S_3=\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n}ij$

Exercice 20.

1. Soient $k,i,n\in\mathbb{N}$ tels que $k\leq i\leq n$. Montrer que l'on a :
$$\binom{n}{i}\binom{i}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$$
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. En déduire la valeur de :
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}.$$

Coefficients binomiaux

Exercice 21 (Application de la formule du binôme)**.**

1. Développer et simplifier $(2+x)^3$, $(1-1)^4$, $(x-y)^6$ et $(3a+2b)^4$.
2. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.
3. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}(1-x)^{n-k+1}$.
4. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^{k+2}$.
5. Soit $n\geq 2$. Calculer $\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 22. Soit $n>1$. Le but est de calculer $\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}$.

1. Montrer que $\forall 1\leq k\leq n$, on a $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.
En déduire une expression de $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$, et conclure.

2. (Deuxième méthode) Ecrire le développement de $f(x) = x(1+x)^n$.
   Calculer la dérivée de la fonction f de deux facons différentes.
   Calculer $f'(1)$, et conclure.

Exercice 23 (Formule d'itération de Pascal)**.** Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$
2. Soit $i \geq 1$.
   En déduire la valeur de la somme suivante seulement en fonction de n et de i :
   $$\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)\dots(k+i-1)$$