FEUILLE DE TD N° 2

Trigonométrie

Exercice 1.

1. Donner la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, puis celle de $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$.
2. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ tel que $\cos(x) = -\frac{4}{5}$. Calculer $\sin(x)$.
3. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   (a) $\tan(x) = \sqrt{3}$,

   (b) $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4}$.

   (c) $\cos(2x) = \cos^2(x)$,

   (d) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$,

   (e) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

2. Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m$ admet-elle des solutions ? Déterminer ces solutions lorsque $m = \sqrt{2}$.
   On pourra s'aider d'une formule trigonométrique.

Exercice 3. Calculer les valeurs des nombres suivants :

- $\cos(\frac{\pi}{8}),\ \sin(\frac{\pi}{8})$.
- $\cos(\frac{5\pi}{12}),\ \sin(\frac{5\pi}{12})$.
- $\cos(\frac{\pi}{12}),\ \sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 4. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $x \leq \tan(x)$.
Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(x) \leq x$.
Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$. (*)

Exercice 5. En réalisant une étude de fonction, montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a :

$$2x < \sin(x) + \tan(x).$$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(2x) = \frac{1}{2}$
2. $\cos(3x) - \sin(3x) = 0$
3. $\cos(4x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$
4. $\sin^2(x) - \sin(x) - 2 = 0$

Exercice 7.

1. Soient a et b deux nombres réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
   Montrer qu'il existe un nombre réel φ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x + \varphi).$$
2. Écrire sous la forme $A\cos(x - \varphi)$ l'expression $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$.

Exercice 8.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\tan(a + b)$ et $\tan(a - b)$ uniquement en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$.
   Montrer que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
3. Exprimer $\sin(x)$ en fonction de t, puis $\tan(x)$ en fonction de t.
   Ces relations sont les **formules de l'arc moitié**. Elles permettent d'exprimer $\cos(x), \sin(x), \tan(x)$ comme des quotients de polynômes en t, ce qui est utile dans les situations de trigonométrie les plus complexes.
4. Exprimer la dérivée de $\tan(\frac{x}{2})$ en fonction de t.