Feuille de TD n° 3

Fonctions

Inégalités

Exercice 1.
Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ des réels tels que $a, a' \in [1;2]$ et $b, b' \in [-3;-2]$.
Donner un encadrement de $\dfrac{a+b}{a'b'}$. (une majoration et une minoration qui soient vraies pour toutes les valeurs possibles de a, b, a', b')

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, $|a| \leq \epsilon$.
Montrer que l'on a $a = 0$.
Quel raisonnement utiliser ?

Exercice 3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$.
Montrer que pour tous a, b, c réels appartenant à $[0;1]$, au moins un des réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ ou $c(1-a)$ est inférieur à $\dfrac{1}{4}$.
Quel raisonnement utiliser ?

Exercice 4.

1. Montrer que $\forall a, b > 0$, on a $\dfrac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln(\frac{a+b}{2})$.
   Indication : On pourra fixer b et faire une étude de fonction en faisant varier a.
2. Montrer que $\ln(1+x) \leq x$, $\forall x > 0$.
3. Montrer que $\exp(x) \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, on a $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e$.
   Indication : On pourra utiliser la fonction ln pour simplifier l'inégalité à étudier, et utiliser une question précédente.

Domaines de définition

Exercice 5. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x-1}{5-3x}}$
2. $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 5}$
3. $x \mapsto \ln(x^2 - 2x - 5)$

Exercice 6. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{\ln(|x|)}{\sqrt{3 - e^x}}$,
2. $f_2 : x \longmapsto \sqrt{\ln(2 - \sqrt{x})}$,
3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{\ln(4x - x^2)}$.

Exercice 7.

1. Déterminer l'image par la fonction $x \longmapsto |x|$ de l'intervalle $]-1,3]$.
2. Déterminer l'image par la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ de l'ensemble $]-2,4] \setminus \{0\}$.
3. Déterminer l'image par la fonction $x \longmapsto (x-1)^2$ de l'intervalle $]-1,2]$.

Exercice 8. Soient $0 < a < b < 1$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2 - bx + 1}$ (domaine de définition, signe, dérivée, variations).
2. En utilisant la méthode $+1-1=0$, trouver une expression de $f(x)$ de la forme $f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2 - bx + 1}$, pour α, β des réels (qui ne dépendent pas de x).
3. Soient r_1, r_2 les racines de $x^2 - bx + 1 = 0$. Déterminer deux réels γ, δ tels que $\frac{x}{x^2 - bx + 1} = \frac{\gamma}{x - r_1} + \frac{\delta}{x - r_2}$.
   A nouveau, γ, δ sont des réels qui ne dépendent pas de x.

Exercice 9. Montrer que le produit de deux fonctions croissantes et positives est une fonction croissante.
Est-ce vrai si l'une des deux fonctions n'est pas toujours positive ?
Montrer que la composée de fonctions monotones est une fonction monotone.

Exercice 10. Étudier la parité des fonctions suivantes (dire si les fonctions sont paires, impaires ou aucun des deux) :

1. $f_1(x) = \sin(2x)\cos(x)$,

2. $f_2(x) = e^x - e^{-x}$,
3. $f_3(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$,

Exercice 11. Étudier et représenter la fonction $U : x \mapsto \dfrac{x\ln(x) - x}{x+1}$:

1. Donner le domaine de définition et la dérivée de U.
2. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que U soit décroissante à gauche de α et croissante à droite de α.
   Donner les limites de U aux extrémités du domaine de définition.
3. Donner les points où la fonction U s'annule.
4. En déduire l'allure de la courbe représentant u.

Exercice 12. (*) On considère la fonction f définie par $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
   Indication : On utilisera les propriétés de exp et de ln.
2. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Préciser les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Tracer la courbe de f.

Fonctions trigonométriques

Exercice 13.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\sin(x) \leq x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 14. Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$	2. $\cos(x) = \dfrac{-1}{2}$	3. $\tan(x) = -1$

Exercice 15. Montrer que la fonction $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{1+x^2} \end{array}$ est bornée, et déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Bijections et composition

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $f \circ f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'on a alors $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Le résultat reste-t-il vrai si f n'est pas supposée croissante ?
Si on pense que le résultat est faux, on cherchera un contre-exemple.

Exercice 17.

1. Montrer que pour tous a, b réels strictement positifs,
   on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Montrer que la fonction $\begin{array}{rccc} f: &]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$ est bijective, et donner une expression de sa réciproque f^{-1}.

Exercice 18. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3 + x - 8$.

1. Montrer que f est strictement croissante et bijective.
   On note f^{-1} sa réciproque.
2. Calculer $f(2)$ et $f^{-1}(2)$.
3. Résoudre l'équation $2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \arcsin(x) - \arccos(-x)$.
Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 20. On pose $ch : x \mapsto \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$ et $sh : x \mapsto \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$.

1. Montrer que sh est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et que ch est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $[1, +\infty[$.
   On note $argsh$ et $argch$ leurs bijections réciproques.
2. Pour $y \in [1, +\infty[$, déterminer une expression de $argch(y)$ à l'aide des fonctions usuelles.
3. Pour $y \in \mathbb{R}$, déterminer une expression de $argsh(y)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Continuité

Exercice 21.

1. Soit $y \in]0, 1[$. Déterminer un $\epsilon > 0$ tel que $]y - \epsilon, y + \epsilon[\subset [0, 1]$.
2. Soient $l, l' \in \mathbb{R}$ avec $l \neq l'$. Déterminer $\epsilon > 0$ tel que $]l - \epsilon, l + \epsilon[\cap]l' - \epsilon, l' + \epsilon[= \emptyset$.
   On fera un dessin.
3. Soit $\epsilon > 0$. On pose $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer $M > 0$ tel que pour tout $x > M$ on a $|f(x) - 0| < \epsilon$.