Feuille de TD n° 3

Fonctions

Inégalités

Exercice 1. Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ des réels tels que $a, a' \in [1; 2]$ et $b, b' \in [-3; -2]$.
Donner un encadrement de $\dfrac{a+b}{a'b'}$. (une majoration et une minoration qui soient vraies pour toutes les valeurs possibles de a, b, a', b')

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, $|a| \leq \epsilon$.
Montrer que l'on a $a = 0$.
Quel raisonnement utiliser ?

Exercice 3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$.
Montrer que pour tous a, b, c réels appartenant à $[0; 1]$, au moins un des réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ ou $c(1-a)$ est inférieur à $\dfrac{1}{4}$.
Quel raisonnement utiliser ?

Exercice 4.

1. Montrer que $\forall a, b > 0$, on a $\dfrac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln(\frac{a+b}{2})$.
   Indication : On pourra fixer b et faire une étude de fonction en faisant varier a.
2. Montrer que $\ln(1+x) \leq x$, $\forall x > 0$.
3. Montrer que $\exp(x) \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, on a $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e$.
   Indication : On pourra utiliser la fonction ln pour simplifier l'inégalité à étudier, et utiliser une question précédente.

Domaines de définition

Exercice 5. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x-1}{5-3x}}$
2. $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 5}$
3. $x \mapsto \ln(x^2 - 2x - 5)$

Exercice 6. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \longmapsto \dfrac{\ln(|x|)}{\sqrt{3 - e^x}}$,
2. $f_2 : x \longmapsto \sqrt{\ln(2 - \sqrt{x})}$,
3. $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{\ln(4x - x^2)}$.

Exercice 7.

1. Déterminer l'image par la fonction $x \longmapsto |x|$ de l'intervalle $]-1, 3]$.
2. Déterminer l'image par la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ de l'ensemble $]-2, 4] \setminus \{0\}$.
3. Déterminer l'image par la fonction $x \longmapsto (x-1)^2$ de l'intervalle $]-1, 2]$.

Exercice 8. Soient $0 < a < b < 1$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2 - bx + 1}$ (domaine de définition, signe, dérivée, variations).
2. En utilisant la méthode $+1 - 1 = 0$, trouver une expression de $f(x)$ de la forme $f(x) = \alpha + \frac{\beta x}{x^2 - bx + 1}$, pour α, β des réels (qui ne dépendent pas de x).
3. Soient r_1, r_2 les racines de $x^2 - bx + 1 = 0$. Déterminer deux réels γ, δ tels que $\frac{x}{x^2 - bx + 1} = \frac{\gamma}{x - r_1} + \frac{\delta}{x - r_2}$.
   A nouveau, γ, δ sont des réels qui ne dépendent pas de x.

Exercice 9. Montrer que le produit de deux fonctions croissantes et positives est une fonction croissante.

Exercice 10. Étudier la parité des fonctions suivantes (dire si les fonctions sont paires, impaires ou aucun des deux) :

1. $f_1(x) = \sin(2x)\cos(x)$,
2. $f_2(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$,
3. $f_3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$,

Exercice 11. Étudier et représenter la fonction $U : x \mapsto \dfrac{x\ln(x) - x}{x+1}$:

1. Donner le domaine de définition et la dérivée de U.
2. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que U soit décroissante à gauche de α et croissante à droite de α.
   Donner les limites de U aux extrémités du domaine de définition.
3. Donner les points où la fonction U s'annule.
4. En déduire l'allure de la courbe représentant u.

Exercice 12. (*) On considère la fonction f définie par $f(x) = x^{\frac{x^2}{x^2-1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
   Indication : On utilisera les propriétés de exp et de ln.
2. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Préciser les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Tracer la courbe de f.

Fonctions trigonométriques

Exercice 13. 1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\sin(x) \leq x$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 14. Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\sin(x) = \dfrac{1}{2}$
2. $\cos(x) = \dfrac{-1}{2}$
3. $\tan(x) = -1$

Exercice 15. Montrer que la fonction $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{1+x^2} \end{array}$ est bornée, et déterminer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Bijections et composition

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $f \circ f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'on a alors $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Le résultat reste-t-il vrai si f n'est pas supposée croissante ?
Si on pense que le résultat est faux, on cherchera un contre-exemple.

Exercice 17.

1. Montrer que pour tous a, b réels strictement positifs,
   on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. Montrer que la fonction $\begin{array}{rccc} f : &]-1;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$ est bijective, et donner une expression de sa réciproque f^{-1}.

Exercice 18. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3 + x - 8$.

1. Montrer que f est strictement croissante et bijective.
   On note f^{-1} sa réciproque.
2. Calculer $f(2)$ et $f^{-1}(2)$.
3. Résoudre l'équation $2f(x) + 3f^{-1}(x) = 10$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Continuité

Exercice 19. 1. Soit $y \in [0,1]$. Déterminer $\epsilon > 0$ tel que $]y-\epsilon, y+\epsilon[\subset [0,1]$.

2. Soient $l, l' \in \mathbb{R}$ avec $l \neq l'$. Déterminer $\epsilon > 0$ tel que $]l-\epsilon, l+\epsilon[\cap]l'-\epsilon, l'+\epsilon[= \emptyset$.
   On fera un dessin.
3. Soit $\epsilon > 0$. On pose $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer $M > 0$ tel que pour tout $x > M$ on a $|f(x) - 0| < \epsilon$.