

## FEUILLE DE TD N° 4

## Nombres complexes

## ■ Généralités

**Exercice 1.** Calculer  $(1 - i)^{2005}$ .

Donner une première expression avec la formule du binôme. Puis, une seconde expression en utilisant la forme exponentielle. Enfin, une troisième expression en revenant à la forme algébrique.

**Exercice 2.** 1. Forme algébrique et forme exponentielle de  $3e^{i\pi} \cdot (-4e^{i\frac{\pi}{2}})$ .

2. Forme algébrique de  $(5 - 4i)^2$ ,  $(5 - 4i)^3$ .

3. Forme algébrique et exponentielle de  $\frac{1}{5-4i}$ .

4. Forme algébrique de  $\sqrt{2} \exp(i\frac{\pi}{6})$ .

5. Forme algébrique de  $\pi \exp(i)$  et de  $\frac{1}{\pi e^i}$ .

6. Forme exponentielle de  $5 \exp(i\frac{\pi}{4}) + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

7. Forme algébrique et forme exponentielle de  $e^{ia} + e^{ib}$ .

8. Forme algébrique et forme exponentielle de  $\frac{1}{e^{ia}}$ .

9. Forme exponentielle de  $\frac{1}{e^{ia} + e^{ib}}$ .

10. Déterminer  $z_1, z_2$  les racines de  $z^2 + z + 5 = 0$ . Montrer que  $\bar{z}_1 = z_2$ .

Pour  $z_1 = re^{it}$ , déterminer  $r$ ,  $\cos(t)$ ,  $\sin(t)$ .

Montrer que  $z_1$  est solution de  $z^2 - 2\operatorname{Re}(z_1) \cdot z + |z_1|^2 = 0$ .

11. Forme algébrique et exponentielle de  $e^{3-4i}$ .

**Exercice 3.** Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  de module 1. Soit  $z$  de module 1 et différent de  $b$ .

Montrer que l'on a  $\frac{b}{a} \left( \frac{z-a}{z-b} \right)^2 \in \mathbb{R}_+$ .

**Exercice 4.** Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$\frac{1+i}{\sqrt{3-i}} \quad \left| \quad 1 + i \tan(\theta) \quad \right| \quad (1+i)^n \quad \left| \quad \frac{1+\cos(\theta)+i \sin(\theta)}{1-\cos(\theta)-i \sin(\theta)} \right.$$

## ■ Trigonométrie

**Exercice 5.**

1. On pose  $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ .

Calculer  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$ .

2. En déduire la valeur de  $1 + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{6\pi}{5}) + \cos(\frac{8\pi}{5})$ .

3. Montrer que  $\cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{8\pi}{5}) = 4 \cos^2(\frac{\pi}{5}) - 2$ .

Puis, montrer que  $\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{6\pi}{5}) = -2 \cos(\frac{\pi}{5})$ .

4. En déduire la valeur de  $\cos(\frac{\pi}{5})$ .

**Exercice 6.** Calculer

$$S = \sum_{k=0}^5 \cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{13} \right).$$

Donner une expression simplifiée de

$$T = \sum_{k=0}^5 \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{13} \right).$$

■ Équations complexes/Racines  $n$ -ièmes

**Exercice 7.** Déterminer les racines carrées de  $(1+i)$ .

En déduire les valeurs de  $\cos(\frac{\pi}{8})$ ,  $\sin(\frac{\pi}{8})$  et  $\tan(\frac{\pi}{8})$ .

**Exercice 8.** Déterminer :

les racines 2-ièmes de  $2i$  ;  
 les racines 3-ièmes de  $\frac{-1-4}{2}$  ;  
 les racines 4-ièmes de  $-4$  ;  
 les racines 2-ièmes de  $8 - 6i$  ;

les racines 3-ièmes de  $-i$  ;  
 les racines 2-ièmes de  $1 + \sqrt{3}i$ .

**Exercice 9.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

2.  $z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$
3.  $z^4 - 15(1 + 2i)z^2 - 88 + 234i = 0$
4.  $2z^3 - (1 - i)z^2 + (1 + i)z + 2i = 0$ , en sachant que l'une des solutions est un imaginaire pur. (de la forme  $ia$ )

**Exercice 10.** Linéariser les fonctions suivantes.  
Puis, leur trouver une primitive.

- |                       |                              |
|-----------------------|------------------------------|
| 1. $f(x) = \cos(x)^2$ | 3. $h(x) = \cos(2x)\sin(3x)$ |
| 2. $g(x) = \cos(x)^3$ | 4. $k(x) = x \cos(x)^2$      |

**Exercice 11.** On note  $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$  une racine septième de 1.  
On pose  $u = z + z^2 + z^4$  et  $v = z^3 + z^5 + z^6$ .

1. Calculer  $u + v$  et  $uv$ .
2. En déduire les valeurs de  $u$  et de  $v$ .

**Exercice 12.** Trouver tous les couples  $(u, v)$  de complexes solutions du système :

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = -1 \\ uv = 1 \end{cases}$$

**Exercice 13.** Soit  $E = \{n^2 + m^2, n, m \in \mathbb{N}\}$ .  
Montrer que  $E$  est stable par multiplication : Si  $a, b \in E$  alors  $a \times b \in E$ .

**Exercice 14.** Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ .  
Résoudre l'équation  $e^z = \alpha$ , d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

### ■ Géométrie et nombres complexes

**Exercice 15.** Est-ce que les points  $A, B, C$  du plan associés aux nombres complexes  $-10 - 7i, 2 + 13i$  et  $11 + 28i$  sont alignés ?

**Exercice 16.** Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points dont l'affixe  $z$  vérifie :

$$|(1 + i)z - 2i| = 2$$

**Exercice 17.** On identifie les points de  $\mathbb{C}$  à leur affixe.  
Déterminer l'ensemble  $E$  des nombres complexes  $z$  tels que  $1, z$  et  $z^3$  soient alignés.

**Exercice 18.** Déterminer dans le plan complexe, l'ensemble  $E$  des points  $M$  d'affixe  $z$  telle que :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $z^3 \in \mathbb{R}$                   | 4. $\frac{z - i\sqrt{3}}{z - 1} \in i\mathbb{R}$ |
| 2. $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$       | 5. $z^2 - (1 - 2i)^2 = \bar{z}^2 - (1 + 2i)^2$   |
| 3. $\frac{1 - iz}{1 + iz} \in \mathbb{R}$ |  |

**Exercice 19.** Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. Soit  $M$  un point du plan.  
En utilisant les nombres complexes, retrouver le résultat suivant :

$$M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB] \iff (MA) \perp (MB).$$

**Exercice 20.** Pour  $z \in \mathbb{C}^*$ , on note  $u, v$  les racines carrées complexes de  $z$ .  
Déterminer l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}^*$  tels que les points  $A, B, C$  d'affixes  $z, u, v$  forment un triangle qui est rectangle en  $A$ .