FEUILLE DE TD N° 4

Nombres complexes

Généralités

Exercice 1. Calculer $(1-i)^{2005}$.
Donner une première expression avec la formule du binôme. Puis, une seconde expression en utilisant la forme exponentielle. Enfin, une troisième expression en revenant à la forme algébrique.

Exercice 2.

1. Forme algébrique et forme exponentielle de $3e^{i\pi}.(-4e^{i\frac{\pi}{2}})$.
2. Forme algébrique de $(5-4i)^2$, $(5-4i)^3$.
3. Forme algébrique et exponentielle de $\frac{1}{5-4i}$.
4. Forme algébrique de $\sqrt{2}\exp(i\frac{\pi}{6})$.
5. Forme algébrique de $\pi\exp(i)$ et de $\frac{1}{\pi e^i}$.
6. Forme exponentielle de $5\exp(i\frac{\pi}{4}) + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.
7. Forme algébrique et forme exponentielle de $e^{ia} + e^{ib}$.
8. Forme algébrique et forme exponentielle de $\frac{1}{e^{ia}}$.
9. Forme exponentielle de $\frac{1}{e^{ia}+e^{ib}}$.
10. Déterminer z_1, z_2 les racines de $z^2 + z + 5 = 0$. Montrer que $\bar{z_1} = z_2$.
    Pour $z_1 = re^{it}$, déterminer r, $\cos(t)$, $\sin(t)$.
    Montrer que z_1 est solution de $z^2 - 2Re(z_1).z + |z_1|^2 = 0$.
11. Forme algébrique et exponentielle de e^{3-4i}.

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ de module 1. Soit z de module 1 et différent de b.
Montrer que l'on a $\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 4. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$	$1 + i\tan(\theta)$	$(1+i)^n$	$\frac{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)-i\sin(\theta)}$

Trigonométrie

Exercice 5.

1. On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
   Calculer $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.
2. En déduire la valeur de $1 + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{6\pi}{5}) + \cos(\frac{8\pi}{5})$.
3. Montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{8\pi}{5}) = 4\cos^2(\frac{\pi}{5}) - 2$.
   Puis, montrer que $\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{6\pi}{5}) = -2\cos(\frac{\pi}{5})$.
4. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

Exercice 6. Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{5} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{13}\right).$$

Donner une expression simplifiée de

$$T = \sum_{k=0}^{5} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{13}\right).$$

Équations complexes/Racines n-ièmes

Exercice 7. Déterminer les racines carrées de $(1+i)$.
En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8}), \sin(\frac{\pi}{8})$ et $\tan(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 8. Déterminer :

les racines 2-iemes de $2i$;
les racines 3-iemes de $\frac{-1-4}{2}$;
les racines 4-iemes de -4 ;
les racines 2-iemes de $8-6i$;
les racines 3-iemes de $-i$;
les racines 2-iemes de $1+\sqrt{3}i$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

2. $z^2 - (1+i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$
3. $z^4 - 15(1+2i)z^2 - 88 + 234i = 0$
4. $2z^3 - (1-i)z^2 + (1+i)z + 2i = 0$, en sachant que l'une des solutions est un imaginaire pur. (de la forme ia)

Exercice 10. Linéariser les fonctions suivantes.
Puis, leur trouver une primitive.

1. $f(x) = \cos(x)^2$
2. $g(x) = \cos(x)^3$
3. $h(x) = \cos(2x)\sin(3x)$
4. $k(x) = x\cos(x)^2$

Exercice 11. On note $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ une racine septième de 1.
On pose $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $u+v$ et uv.
2. En déduire les valeurs de u et de v.

Exercice 12. Trouver tous les couples (u,v) de complexes solutions du système :
$$\begin{cases} u^2 + v^2 &= -1 \\ uv &= 1 \end{cases}$$

Exercice 13. Soit $E = \{n^2 + m^2,\, n, m \in \mathbb{N}\}$.
Montrer que E est stable par multiplication : Si $a, b \in E$ alors $a \times b \in E$.

Exercice 14. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.
Résoudre l'équation $e^z = \alpha$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Géométrie et nombres complexes

Exercice 15. Est-ce que les points A, B, C du plan associés aux nombres complexes $-10 - 7i, 2 + 13i$ et $11 + 28i$ sont alignés ?

Exercice 16. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie :
$$|(1+i)z - 2i| = 2$$

Exercice 17. On identifie les points de $\mathbb{C}$ à leur affixe.
Déterminer l'ensemble E des nombres complexes$z$ tels que 1, z et z^3 soient alignés.

Exercice 18. Déterminer dans le plan complexe, l'ensemble E des points M d'affixe z telle que :

1. $z^3 \in \mathbb{R}$
2. $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$
3. $\dfrac{1 - iz}{1 + iz} \in \mathbb{R}$
4. $\dfrac{z - i\sqrt{3}}{z - 1} \in i\mathbb{R}$
5. $z^2 - (1-2i)^2 = \bar{z}^2 - (1+2i)^2$

Exercice 19. Soient A et B deux points distincts du plan. Soit M un point du plan.
En utilisant les nombres complexes, retrouver le résultat suivant :
$$M \text{ est sur le cercle de diamètre [AB]} \iff (MA) \perp (MB).$$

Exercice 20. Pour $z \in \mathbb{C}^\star$, on note u, v les racines carrées complexes de z.
Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^\star$ tels que les points A, B, C d'affixes z, u, v forment un triangle qui est rectangle en A.