Feuille de TD n° 5

Primitives et équations différentielles

Calculs directs de primitives/intégrales

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^8 x^6 dx$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)dx$
3. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2(x)dx$
5. $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$
6. $\int_1^{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$
7. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$
8. $\int_0^2 \frac{x^{2n-1}}{1+x^{2n}}dx$
9. $\int_0^3 e^{ax}\cos(bx)dx$

Exercice 2. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : t \mapsto \dfrac{t^2}{1+t^3}$
2. $f_2 : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
3. $f_3 : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^4}$

Intégration par partie

Exercice 3. En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_2^3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)dx \quad , \int_1^e x(\ln(x))^2dx \quad , \int_1^4 (x+3)\ln(x)dx$$
$$\int_0^M x^2e^{-x}dx \quad , \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t}dt \quad , \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t^2}dt$$

Exercice 4. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction *Arctan*.

Changement de variable

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes en effectuant les changements de variables suggérés.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt \text{ (poser } u=e^t) \quad , \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \text{ (poser } t=\sin(u))$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2t)}{(1+\cos(t))^2}dt \text{ (poser } u=\cos(t)) \quad , \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}dt \text{ (poser } u=\tan(\frac{t}{2})).$$

Exercice 6. L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale
$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))dx$
En posant $u = \pi/4 - x$, montrer que $I = \int_0^{\pi/4} \ln(2)dt - I$.
En déduire la valeur de I.

Résolution d'équations différentielles

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes.
Il faudra bien penser à choisir un intervalle de définition convenable avant de se lancer dans la résolution.

1. $y_t' - 3y_t = 0$.
2. $y_t' - \cos(t)y_t = 0$.
3. $y_t' + 2y_t = t^2e^t$.
4. $y'(x) - y(x) = (x+1)e^x$.
5. $2y_t' - y_t = \cos^2(t)$ avec $y_0 = 0$.
6. $y_t' - e^ty_t = 2e^t$. <u>Indice</u> : Déterminer une solution particulière constante.
7. $t^3y_t' = 2y_t$.
8. $t^2y_t' - (2t-1)y_t = t^2$.
9. $(1+t^3)y_t' + 3ty_t = 0$ avec condition initiale $y_0 = 1$.
10. $(1+t^2)y_t' + ty_t = \sqrt{1+t^2}$.
11. $y_t'' - 5y_t' + 6y_t = 0$.
12. $y_t'' - 5y_t' + 6y_t = \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}$.
13. $y_t'' + y_t = \cos(t)$.
14. $y_t'' + \omega^2y_t = \sin^3(t)$.
15. $y_t'' + 2y_t' + 2y_t = e^{-t}\cos(t)$.

Applications à la physique et aux sciences de l'ingénieur.

Exercice 8 (**Mouvement d'une particule chargée**)**.** Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel dela forme :

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où ω est une constante dépendant de la masse et de la charge de la particule ainsi que du champ magnétique. En utilisant la fonction $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Exercice 9 (**Petites oscillations d'un pendule libre**)**.** Un pendule pesant de longueur l est placé dans un champs de pesanteur d'intensité g. On suppose que l'angle θ qu'il forme avec la verticale reste à chaque instant petit de sorte que l'approximation $\sin\theta \sim \theta$ soit raisonnable. L'équation d'évolution de θ s'écrit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

1. Déterminer le coefficient d'amortissement et la pulsation propre du système.
2. Résoudre l'équation différentielle.
3. Que cela change-t-il si $\lambda > 0$?

Exercice théorique

Exercice 10 (**Une équation fonctionnelle**)**.** Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y)$$