Feuille de TD n° 6

Arithmétique dans $\mathbb{N}$, Dénombrement

Exercice 1. Déterminer le nombre d'entiers naturels n tels que leur quotient dans la division euclidienne par 23 est égal à leur reste.

Exercice 2.
Déterminer la division euclidienne de 154 par 12.
En déduire que 12 ne divise pas 154.

Exercice 3.

1. Calculer $\text{pgcd}(33, 28)$ avec l'algorithme d'Euclide.
2. Calculer $\text{pgcd}(12, 15)$ et $\text{ppcm}(12, 15)$. Calculer $\text{pgcd}(12, 15)\text{ppcm}(12, 15)$. Que trouve-t-on ?
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\text{pgcd}(n^2, n^5 + 1) = 1$.

Exercice 4.

1. Décomposer 1260 en produit de facteurs premiers. En déduire $\text{pgcd}(1260, 55)$ et $\text{ppcm}(1260, 55)$.
2. Décomposer en produit de facteurs premiers : 67,144, 5555.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer, en utilisant la division euclidienne par 3, que 3 ne divise pas $n^2 + 1$.

Exercice 6 (Divisibilité d'un coefficient binomial)**.** Soit p un nombre premier.
Montrer que p divise $\binom{p}{k}$, pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$.
Montrer, à l'aide d'une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p - n$ est divisible par p.

Exercice 7. Soit $n \geq 1$ un entier.
Trouver un entier $m \geq 0$ tel que $m, m+1, \dots, m+n$ ne sont pas premiers.
On pourra regarder autour de $n!$.

Exercice 8.
• Soit $n \geq 0$, tel que $n + 2 \mid n^2 + 5$. Montrer que l'on a alors $n + 2 \mid 9$.
• Trouver les $n \geq 0$ tels que $n + 2 \mid n^2 + 5$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}*$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $a \equiv b\, mod(n)$ si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
On dit alors que **a et b sont congrus modulo n**.

1. Montrer que $136 \equiv 25\, mod(3)$ et que $1000 \equiv 13 \mod (7)$.
2. Démontrer que l'on a $a \equiv b\, mod(n)$ ssi $n \mid b - a$.
3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b\, mod(n)$ et $c \equiv d\, mod(n)$.
   Démontrer que $a + c \equiv b + d\, mod(n)$ et que $ac \equiv bd\, mod(n)$.
   On pourra procéder en deux étapes.
4. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $4n$ par 3, en fonction de $n \in \mathbb{N}$. On fera une disjonction de cas.
5. En utilisant la relation $10 \equiv 3\, mod(7)$, montrer que $1000000 \equiv 1\, mod(7)$.
6. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 3^n par 5, en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
7. Montrer que $7^{(7^7)} \equiv 3\, mod(10)$.

Exercice 10. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n^2 - nm - 2m^2 = 340$.
Déterminer les valeurs possibles de (n, m).
On pourra regarder un polynôme en n et essayer de le factoriser.

Exercice 11 (Nombre de Fermat)**.** Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m + 1$ soit premier.
Montrer que m est de la forme 2^n où $n \in N$.
On pourra utiliser une identité remarquable.

■ *Dénombrement . . .*

Exercice 12. Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E \setminus A)$?
2. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 13.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).

1. Combien vaut $Card(\Omega)$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
   Calculer $Card(A)$.
   On pourra faire des exemples pour de petites valeurs de n ($n = 3, 4, 5$), pour s'aider.
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
   Calculer $Card(A)$.

Exercice 14.

1. Pour $k \geq 0$ on définit $A_k = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \text{ t.q. } n + m = k\}$.
   Calculer $Card(A_k)$.
2. On pose $B_k = \{(n, m, l) \in \mathbb{N}^3 \text{ t.q. } n + m + l = k\}$.
   Exprimer B_k comme une réunion disjointe de $k + 1$ sous-ensembles.
   Puis, calculer $Card(B_k)$.
3. Soit $n \geq 0$. On prend k cailloux, que l'on range en ligne. On sépare ces cailloux avec des bâtons pour former n tas.
   Combien de bâtons faut-il pour former n tas ?
4. Combien de dispositions des bâtons sont possibles pour former n tas de cailloux ? (un tas peut être vide s'il n'y a pas de cailloux entre 2 bâtons)
   On fera des exemples pour $k = 4, 5$ et $n = 2, 3$.
5. On pose $C_k = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n \text{ t.q. } a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k\}$.
   Calculer $Card(C_k)$.

Exercice 15. On lance deux dés à 6 faces.

1. Combien de résultats sont possibles ?
2. Quelles valeurs possibles peut-on avoir pour la somme des deux faces obtenues ?
3. Combien de résultats donnent une somme qui est un nombre pair ?

Exercice 16. On tire 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien de tirages sont possibles ?
2. Combien de tirages donnent un carré d'as ?
3. Combien de tirages donnent un brelan ?
4. Combien de tirages donnent une quinte ?
5. Combien de tirages donnent une double paire ?

Exercice 17. Soit $N \geq 1$. Une urne contient $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$. On tire N boules successivement sans les remettre.

1. Combien de tirages sont possibles ?
2. On note A l'ensemble des cas où toutes les boules tirées ont un numéro strictement supérieur à N. Calculer $Card(A)$.
3. On note B l'ensemble des cas où au moins une des boules tirées a un numéro entre 1 et N. Calculer $Card(B)$.