Feuille de TD n° 6

Arithmétique dans $\mathbb{N}$, Dénombrement

Exercice 1.
Déterminer la division euclidienne de 154 par 12.
En déduire que 12 ne divise pas 154.
Est-ce que 13 divise 151 ? Est-ce que 7 divise 2024 ?

Exercice 2.

1. Calculer $\text{pgcd}(33, 28)$ avec l'algorithme d'Euclide.
2. Calculer $\text{pgcd}(12, 15)$ et $\text{ppcm}(12, 15)$.
3. Calculer $\text{pgcd}(238, 1520)$, $\text{pgcd}(55, 1243)$, $\text{pgcd}(21, 857)$, $\text{pgcd}(136, 248)$, $\text{pgcd}(568, 1024)$.
   On pourra utiliser la décomposition en produits de facteurs premiers pour certains pgcd.
4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\text{pgcd}(n^2, n^5+1) = 1$. On posera d un diviseur commun de ces deux nombres.

Exercice 3. Déterminer le nombre d'entiers naturels n tels que leur quotient dans la division euclidienne par 23 est égal à leur reste.

Exercice 4.

1. Décomposer 1260 en produit de facteurs premiers.
   En déduire $\text{pgcd}(1260, 55)$ et $\text{ppcm}(1260, 55)$.
2. Décomposer en produit de facteurs premiers : 67, 144, 5555.
3. Déterminer tous les nombres premiers inférieurs à 100. On pourra s'aider d'un tableau 10×10 en éliminant tous les nombres qui ne sont pas premiers (méthode du Crible d'Eratosthène).

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit (q, r) la division euclidienne de n par 3.
Quelles sont les valeurs possibles de r ?
Montrer alors que 3 ne divise pas $n^2 + 1$.

Exercice 6. Déterminer si les nombres suivants sont premiers ou non : $351, 141, 143, 179, 189, 2023$.

Exercice 7 (Divisibilité d'un coefficient binomial)**.** Soit p un nombre premier.
Montrer que p divise $\binom{p}{k}$, pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$.
Montrer, à l'aide d'une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p - n$ est divisible par p.

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ un entier.
Trouver un entier $m \geq 0$ tel que $m, m+1, \dots, m+n$ ne sont pas premiers.
On pourra regarder autour de $n!$.

Exercice 9.
• Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n+2 \mid n^2+5$. Montrer que l'on a alors $n+2 \mid 9$.
• Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+2 \mid n^2+5$.

Exercice 10.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a $4 \mid 5^n + 3$.
On cherchera une relation de récurrence entre $5^n + 3$ et $5^{n+1} + 3$.

Exercice 11. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

1. Soit (p, q) la division euclidienne de n par 4. Si n est impair, quelles sont les valeurs possibles de r ?
2. Si n est impair, montrer qu'il existe alors $q' \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 4q' + 1$.
3. Montrer que $n + m$ et $n^2 + m^2$ ont la même parité.
4. Montrer que $4 \mid n^2 + m^2$ ssi $2 \mid n$ et $2 \mid m$.

Exercice 12.

1. Déterminer $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ telle que $10u + 7v = 1$.
2. Déterminer $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ telle que $134u + 7v = 1$.
3. Soit $(u', v') \in \mathbb{Z}^2$ telle que $134u' + 7v' = 1$.
   Montrer que $134(u' - u) = 7(v - v')$.
4. Montrer que $7 \mid u' - u$. On pose $u' - u = 7k$.
5. Montrer que $(u', v') = (u + 7k, v - 134k)$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}*$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $a \equiv b \, mod(n)$ si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
On dit alors que **a et b sont congrus modulo n**.

1. Montrer que $136 \equiv 25 \, mod(3)$ et que $1000 \equiv 13 \bmod (7)$.
2. Démontrer que l'on a $a \equiv b \, mod(n)$ ssi $n \mid b - a$.
3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b \, mod(n)$ et $c \equiv d \, mod(n)$.
   Démontrer que $a + c \equiv b + d \, mod(n)$ et que $ac \equiv bd \, mod(n)$.
   On pourra procéder en deux étapes.
4. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $4n$ par 3, en fonction de $n \in \mathbb{N}$. On fera une disjonction de cas.

5. En utilisant la relation $10 \equiv 3\, mod(7)$, montrer que $1000000 \equiv 1\, mod(7)$.
6. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 3^n par 5, en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
7. Montrer que $7^{7^7} \equiv 3\, mod(10)$.

Exercice 14. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n^2 - nm - 2m^2 = 340$.
Déterminer les valeurs possibles de (n, m).
On pourra regarder un polynôme en n et essayer de le factoriser.

Exercice 15 (Nombre de Fermat)**.** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = 2^m + 1$. On dit que n est un nombre de Fermat si n est un nombre premier.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x^{2k+1} + 1 = (x+1)(\sum_{j=0}^{2} k(-x)^j)$.
Montrer que si n est un nombre de Fermat, alors m est de la forme $m = 2^r$, pour $r \in N$. On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

■ *Dénombrement . . .*

Exercice 16. Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(\emptyset)$? et de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$?
2. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E \setminus A)$?
3. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Exercice 17. On lance deux dés, de couleurs différentes, à 6 faces.

1. Combien de résultats sont possibles ?
2. Quelles valeurs sont possibles pour la somme des deux faces obtenues ?
3. On lance maintenant deux dés à 6 faces qui sont identiques.
   Combien de résultats sont possibles ?

Exercice 18. On tire 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien de tirages sont possibles ?
2. Combien de tirages ne contiennent que des coeurs ?
3. Combien de tirages donnent un carré d'as ?
4. Combien de tirages donnent un brelan (3 cartes identiques et 2 cartes différentes) ?
5. Combien de tirages donnent une quinte floche royale (5 cartes qui se suivent, de 10 à l'as, de la même couleur) ?
6. Combien de tirages donnent une quinte floche (5 cartes qui se suivent, de la même couleur) ?
7. Combien de tirages donnent une quinte (5 cartes qui se suivent) ?

Exercice 19.

1. Combien de tirages de 5 boules au loto parmi 50 boules sont possibles ?
   Combien de ces tirages ne contiennent que des numéros pairs ?
   Combien contiennent au moins un numéro pair ?
2. Combien de combinaisons de cadenas de 4 chiffres, à valeurs entre 1 et 7, sont possibles ?
   Combien de ces combinaisons commencent par 17.. ?
   Combien de ces combinaisons n'ont que des chiffres pairs ?
   Combien de ces combinaisons sont symétriques (de la forme *abba*) ?
   Combien de ces combinaisons contiennent 4 chiffres distincts ?
3. Un glacier propose des coupes de $2, 3$ ou 4 boules de glace, avec 6 parfums disponibles.
   Combien de coupes de glace différentes peut-on acheter ?

Exercice 20.
Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).

1. Combien vaut $Card(\Omega)$?
2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre).
   Calculer $Card(A)$.
   On pourra faire des exemples pour de petites valeurs de n ($n = 3, 4, 5$), pour s'aider.
3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3).
   Calculer $Card(A)$.

Exercice 21.

1. Pour $k \geq 0$ on définit $A_k = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \text{ t.q. } n + m = k\}$.
   Calculer $Card(A_k)$.
2. On pose $B_k = \{(n, m, l) \in \mathbb{N}^3 \text{ t.q. } n + m + l = k\}$.
   Montrer que $B_k = \cup_{j=0}^{k} \{(n, m, j), \text{ t.q. } (n, m) \in A_{k-j}\}$.
   Puis, calculer $Card(B_k)$.
3. Soit $n \geq 0$. On prend k cailloux, que l'on range en ligne. On sépare ces cailloux avec des bâtons pour former n tas.
   Combien de bâtons faut-il pour former n tas ?
4. Combien de dispositions des bâtons sont possibles pour former n tas de cailloux ? (un tas peut être vide s'il n'y a pas de cailloux entre 2 bâtons)
   On fera des exemples pour $k = 4, 5$ et $n = 2, 3$.
5. On pose $C_{n,k} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n \text{ t.q. } a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k\}$.
   Calculer $Card(C_{n,k})$.