Feuille de TD n° 8

Limites, continuité

Limites de fonctions

Exercice 1. Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$ suivant la valeur de $n\in\mathbb{N}^\star$

Continuité

Exercice 2. En utilisant simplement la définition, montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+3}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Exercice 3. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $x \to \frac{1}{1+|1+x|}$
2. $x \to \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $x \to \begin{cases} \frac{e^{\arctan(x)}-1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue, et décroissante.
Montrer que f possède un point fixe, et que ce point fixe est unique.

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, telle que $f(x) > 0$ pour tout $x\in[a,b]$. Montrer qu'il existe $C>0$ tel que $f \geq C$ sur $[a,b]$.

Exercice 6. Un cycliste parcourt 10 km en 1h.
• Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru 5km.
• On suppose que le cycliste a pédalé à 4km/h pendant les 30 premières minutes.
Montrer qu'il y a un moment où le cycliste a pédalé à au moins 16km/h.

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qui possède des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
Ces bornes sont-elles toujours atteintes ?

Exercice 8 (Prolongement par continuité). Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité au point a donné :

1. $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ en $a=0$
2. $g(x) = \frac{\sqrt{2}\sin(x)-1}{\tan(x)-1}$ en $a=\frac{\pi}{4}$
3. $h(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-2x-3}$ en $a = -1$ en $a = 3$
4. $u(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ en $a=0$

Exercice 9. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f\geq 0$.
Soit $y\in[0,1]$ tel que $f(y)>0$.
Montrer qu'il existe un intervalle $[a,b]$ contenant y, tel que $f(x)>0$ pour tout $x\in[a,b]$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application bornée et $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont bornées.

Exercice 11.

1. On pose $f(x) = x^2-4x+6$.
   Etudier la fonction f (variations, points fixes).
2. Montrer que $[2,3]$, $[3,+\infty[$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles stables de f.
3. Soit $u_0\in\mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
4. On suppose que $u_0\in[2,3]$. Donner un encadrement de u_n pour tout $n\geq 0$. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_n$. Montrer si la suite est convergente ou non. Si elle est convergente, déterminer sa limite.

5. On suppose maintenant que $u_0 \in [3, +\infty[$. Donner un encadrement de u_n pour tout $n \geq 0$. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_n$. Montrer si la suite est convergente ou non. Si elle est convergente, déterminer sa limite.
6. Montrer qu'il existe C tel que pour tout $x \leq C$ on a $f(x) \geq 3$.
7. En déduire que si $u_0 \in]-\infty, C]$ la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 12.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\ldots \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}} \ldots$ (la racine carrée apparaît n fois).
   On ajoute $u_0 = 0$.
   Déterminer une fonction f telle que pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Quelles sont les limites possibles de la suite $(u_n)_n$ (si elle est convergente) ?
3. Soit ϕ le point fixe positif de la fonction f. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $u_n \leq \phi$. On pourra s'aider d'un intervalle stable.
4. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 13. Soit I un intervalle, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante sur I.
Soient $a, b \in I$ deux points fixes consécutifs de f, avec $a < b$.

1. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(x) \in [a, b]$.
2. Soit $u_0 \in [a, b]$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie, et que $u_n \in [a, b]$.
3. On suppose que $f(x) - x \geq 0$ sur $[a, b]$. Montrer alors que la suite $(u_n)_n$ est croissante. En déduire qu'elle est convergente, et déterminer sa limite.
4. On suppose que $f(x) - x \leq 0$ sur $[a, b]$. Montrer alors que la suite $(u_n)_n$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente, et déterminer sa limite.

■ *Pour aller plus loin*

Exercice 14 (Valeurs intermédiaires).

1. Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, telle que $f(I) \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que la fonction f est constante sur I.
2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(x)^2 = 1$. Montrer que la fonction f est constante sur $[0, 1]$.
3. Soient f et g deux fonctions continues sur I telles que pour tout x dans I, on a $|f(x)| = |g(x)| > 0$.
   Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 15 (Fonctions à valeurs complexes)**.** Déterminer pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{i\alpha}x - 1}{e^{-i\alpha}x - 1} \right)^n$$

Exercice 16 (**Densité**)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et s'annulant en tout point de $\mathbb{Q}$. Montrer que f est identiquement nulle.
On pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 17 (**Suites récurrentes**)**.** Soit k un réel dans $[0, 1[$ et f une fonction de $[a, b]$ dans lui même vérifiant $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[a, b]$ notée λ.
3. Soit u une suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite u est bien définie.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \lambda| \leq k|u_n - \lambda|$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \lambda| \leq k^n |u_0 - \lambda|$.
   (d) En déduire que u converge vers λ.

Exercice 18 (Une fonction sans limite aux bords)**.**

1. Rappeler que pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$\frac{1}{2n\pi} < \epsilon \quad et \quad \frac{1}{(2n+1)\pi} < \epsilon$$
2. Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in]-\epsilon, +\epsilon[$ tel que :
$$|\sin \frac{1}{x} - l| > \frac{1}{2}$$
3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$.
4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0.