FEUILLE DE TD N° 9

Calcul matriciel

Exercice 1.
Calculer :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} + 5.\begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2.
Calculer :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 3. On pose dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $AB, BA, A^2 - B^2$ et $(A+B)(A-B)$.

Exercice 4 (Equation matricielle)**.** On note $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Résoudre l'équation :

$$M^3 = A$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en remarquant que si $M^3 = A$ alors $AM = MA$.

Exercice 5 (Puissance de matrice)**.** On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Exprimer C en fonction de J et de I_3.
2. Déterminer toutes les puissances de J.
3. Calculer toutes les puissances de C.

Exercice 6. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3 et en déduire toutes les puissances positives de A.
2. On considère deux suites réelles définies par la donnée de u_0 et v_0 par les relations :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = -u_n$$
Déterminer une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 7. Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A = P^{-1}DP$.
2. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Classiques à savoir refaire

Exercice 8. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - A - 2I_3$.
- En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 9. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $N^m = 0$ pour un certain entier $m \geq 1$. (on dit que N est **nilpotente**)

1. Montrer qu'il existe $a(N) \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $N^{a(N)-1} \neq 0$ et $N^{a(N)} = 0$.
2. Montrer que N n'est pas inversible. On pourra utiliser $N^{a(N)-1}$.
3. Pour $r \in \mathbb{N}$, calculer $(I_n - N)(\sum_{k=0}^{r} N^k)$.
4. Montrer que $I_n - N$ est inversible.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 2I_3$.

- Calculer B^n pour tout $n \geq 0$.
- En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 11. On dit qu'une matrice S est positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T S X \geq 0$. On se donne dans la suite une matrice D diagonale.

1. Calculer $X^T D X$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. En déduire une CNS pour que D soit positive.

Exercice 12. Montrer que le produit de deux matrices symétriques A, B est une matrice symétrique si et seulement si les deux matrices commutent ($AB = BA$).

Exercice 13. Soit n un entier naturel non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ où $E_{i,j}$ est une matrice élementaire ayant un 1 en case (i,j) et des 0 partout ailleurs. En déduire toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(K)$ vérifiant pour tout B dans $\mathcal{M}_n(K)$, $AB = BA$.

Méthode du Pivot

Exercice 14. Echelonner les matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.
6. $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 15. Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & -3 \\ 2x_1 + x_2 & = & 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 0 + 5x_3 & = & 1 \\ -2x_1 + x_2 + 0 & = & 1 \end{cases}$

Exercice 16. Résoudre les équations suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en fonction de $a \in \mathbb{K}$.

Inversibilité

Exercice 17. Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible.
Donner une expression de A^{-1} en fonction de A, puis calculer la valeur de A^{-1}.

Exercice 18.
Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, calculer leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} a & 2a \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{K}$.

Exercice 19. Calculer l'inverse de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Exercice 20.

1. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que $AB = 0$.
   Montrer par l'absurde que A n'est pas inversible. Montrer de même que B n'est pas inversible.
2. Si B est inversible, montrer que A est inversible ssi AB est inversible.
3. On suppose B inversible. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Exprimer $AB - \lambda I_n$ en fonction de $BA - \lambda I_n$ et B^{-1}.
   En déduire que $AB - \lambda I_n$ est inversible ssi $BA - \lambda I_n$ est inversible.
4. On suppose B inversible. Soit $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Résoudre l'équation matricielle $BX = C$ d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exercice 21.

1. Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$ antisymétrique, avec $B = (b_{i,j})_{(i,j)}$.
   Montrer que l'on a $b_{i,i} = 0$ et $b_{i,j} = -b_{j,i}$, pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $j < i$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Que peut-on dire de $\frac{A - {}^tA}{2}$?
3. Montrer qu'il existe $A_1 \in M_n(\mathbb{K})$ symétrique et $A_2 \in M_n(\mathbb{K})$ antisymétrique telles que $A = A_1 + A_2$.
   On donnera une expression de A_1, A_2 en fonction de A.
4. Montrer que les matrices A_1, A_2 sont uniques.

Exercice 22.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A.{}^tA$ et ${}^tA.A$ sont symétriques.
2. Pour $A = (a_{i,j})_{(i,j)}$ déterminer les coefficients de $A.{}^tA$ et ${}^tA.A$.
3. Montrer qu'en général on a $A.{}^tA \neq^t A.A$.
4. Montrer que ${}^tAA$ est inversible ssi A est inversible.

Exercice 23.

1. Pour $A = (a_{i,j})_{(i,j)} \in M_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de A par $Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.
   Prendre deux matrices $3x3$ et calculer leur trace.
2. Si A est antisymétrique, combien vaut $Tr(A)$?
3. Soit $B = (b_{i,j})_{(i,j)} \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.
4. Exprimer $Tr(A^tA)$ en fonction des $a_{i,j}$.
5. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $Tr(A^tA) \geq 0$.
6. A-t-on $Tr(A^tA) = Tr(A^2)$?

Exercice 24.

1. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ des vecteurs colonne de $\mathbb{R}^3$, vus comme des matrices.
   Montrer que $\langle X, Y \rangle = X.{}^tY$, où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire.
2. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\langle AX, Y \rangle = \langle X, {}^t AY \rangle$.
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer les vecteurs X tels que $\langle AX, Y \rangle = 0$.

Exercice 25. Déterminer les $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $y = x + 2z$ et $x + y - 2z = 0$.

Exercice 26.

1. Soient $D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $D' = Diag(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.
   Calculer $D.D'$.
2. Montrer que D et D' commutent.
3. On suppose que $\lambda_k = 0$ pour un $1 \leq k \leq n$.
   Trouver une matrice M non-nulle telle que $D.M = 0$.
4. Montrer alors que D n'est pas inversible.
5. Montrer que la matrice D est inversible ssi $\lambda_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
   Dans ce cas, donner l'expression de D^{-1}.