Feuille de TD n° 10

Dérivation

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et étudier l'existence de tangentes (éventuellement verticales) aux points posant problème.

- $f_1(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$
- $f_2(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
- $f_3(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
- $f_4(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
- $f_5(x) = x\sqrt{x+x^2}$
- $f_6(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$

Exercice 2. Soient $n \geq 0$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2n}$.
Calculer la dérivée n-ème de f de deux façons différentes (directement, puis à l'aide de la formule de Leibniz en écrivant f sous forme de produit).
En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 3. Soit $f : [0;a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0;a[$.
2. En déduire que la courbe de f admet une tangente passant par l'origine autre que celle en 0.

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$.
Montrer qu'il existe $x \in]a;b[$ tel que $f'(x)(g(b) - g(a)) = g'(x)(f(b) - f(a))$.

Exercice 5. Donner le domaine de définition, puis le domaine de dérivabilité de la fonction suivante : $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}$.

Exercice 6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1;2]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$, et que $f([1;2]) \subset [1;2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right[\cup \left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudier les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Déterminer les points fixes de f.
4. On définit une suite $(x_n)_n$ par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$, en déduire que $\forall x \in]1;+\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{4}|x_n - 1|$, puis que $|x_n - 1| \leq \dfrac{1}{4^n}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (x_n).