FEUILLE DE TD Nº 12

Espaces vectoriels

Exercice 1.
Soit $T > 0$ fixé et $a \in \mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(2) = 0\}$
2. $F_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 2\}$
3. $F_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ croissante}\}$
4. $F_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ monotone}\}$
5. $F_5 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f\ T-\text{périodique}\}$, pour $T \in \mathbb{R}$ fixé.
6. $F_6 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ périodique}\}$
7. $F_7 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + a\}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Le complémentaire $F^c = E \setminus F$ de F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 3. Déterminer des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ pour écrire les ensembles suivants sous la forme $Vect(x_1, \dots, x_n)$.

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 2x - y = 0\}$
2. $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } x + y + z + t = 0,\ z + 2t = 0\}$
3. $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ t.q. } P(5) = 0\}$
4. $F_4 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \text{ t.q. } {}^tA = A\}$
5. $F_5 = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \text{ t.q. } f'' - 5f' + f = 0\}$

Exercice 4.

1. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\widetilde{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $\widetilde{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0\}$. La somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 5.

1. La famille $((1, 2, 1), (1, 1, 3), (3, -2, 1))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. La famille $((1, 0, 3), (0, 1, 2), (2, -3, 0))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 6. Montrer que, les deux vecteurs $\vec{x} = (1, 1, 0)$ et $\vec{y} = (1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ engendrent le même sous-ev que les deux vecteurs $\vec{u} = (1, 3, -2)$ et $\vec{v} = (1, 4, -3)$.

Exercice 7. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 2, 2), \vec{v}_3 = (3, 7, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $(\vec{v}_1 = (1, 2, 1, 2, 1), \vec{v}_2 = (2, 1, 2, 1, 2), \vec{v}_3 = (1, 0, 1, 1, 0), \vec{v}_4 = (0, 1, 0, 0, 1))$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 8.

1. Soit $E = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\big\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et donner une base de E. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} E$?
2. Soit $F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x\big\}$.
   Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} F$?

Exercice 9. On se place dans E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure classique de $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
On pose $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = e^{-x}$$

Déterminer $dim(F)$ où $F = Vect(f, g, h)$.

Exercice 10.
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F_1 = \text{vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (2, 1, 1)$.
2. $F_2 = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (2, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.
3. $F_3 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\big\}$.
4. $F_4 = \text{vect}(x_1, x_2, x_3)$ où $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $x_3 = (1, 0, 1, 1)$.

5. $F_5 = \mathrm{vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ où $x_1 = (1,1,0,1)$, $x_2 = (1,-1,1,0)$, $x_3 = (2,0,1,1)$ et $x_4 = (0,2,-1,1)$.

Quelle est la dimension de $F_1 + F_2$ et de $F_1 \cap F_2$?

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim E = n$.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 12. Soit $n \geq 0$. Montrer que $B = (1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, donner la décomposition de P dans la base B.

Exercice 13. On note dans $\mathbb{R}[X]$: $P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = (X-1)X(X+1), P_3(X) = X^2(X+1), P_4(X) = (X-1)X(X+1)^2$.

Montrer que $\beta = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $R_4[X]$.

Exercice 14. On note $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.
Calculer le rang de la famille $\mathcal{A} = (f, g, f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g)$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien vaut $\dim(\mathbb{C}^n)$?
L'ensemble $\mathbb{C}^n$ n'est pas seulement un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, c'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
En tant que $\mathbb{R}$-e.v., combien vaut $\dim(\mathbb{C}^n)$?

Exercice 16. On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_k : x \mapsto \sin(kx)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Indication : Quelle méthode de raisonnement utiliser ?

Exercice 17.
Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_{a,b} : x \mapsto a\cos(x+b)$. Soit $E = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 18. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.
Indication : Quelle méthode de raisonnement utiliser ?