

FEUILLE DE TD N° 12

Espaces vectoriels

Exercice 1.

Soit $T > 0$ fixé et $a \in \mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- $F_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(2) = 0\}$
- $F_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 2\}$
- $F_3 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ croissante}\}$
- $F_4 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ monotone}\}$
- $F_5 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ } T\text{-périodique}\}$, pour $T \in \mathbb{R}$ fixé.
- $F_6 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ périodique}\}$
- $F_7 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + a\}$, en fonction de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Le complémentaire $F^c = E \setminus F$ de F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 3. Déterminer des vecteurs x_1, \dots, x_n pour écrire les ensembles suivants sous la forme $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

- $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$
- $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0, z + 2t = 0\}$
- $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(5) = 0\}$
- $F_4 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^t A = A\}$
- $F_5 = \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f'' - 5f' + f = 0\}$

Exercice 4.

- Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .
- Soit $\tilde{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $\tilde{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0\}$. La somme $\tilde{F} + \tilde{G}$ est-elle directe ?

Exercice 5.

- La famille $((1, 2, 1), (1, 1, 3), (3, -2, 1))$ est-elle libre dans \mathbb{R}^3 ?
- La famille $((1, 0, 3), (0, 1, 2), (2, -3, 0))$ est-elle libre dans \mathbb{R}^3 ?

Exercice 6. Montrer que, les deux vecteurs $\vec{x} = (1, 1, 0)$ et $\vec{y} = (1, 0, 1)$ de \mathbb{R}^3 engendrent le même sous-ev que les deux vecteurs $\vec{u} = (1, 3, -2)$ et $\vec{v} = (1, 4, -3)$.

Exercice 7. Les familles suivantes sont-elles libres ?

- $(\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 2, 2), \vec{v}_3 = (3, 7, 1))$ dans \mathbb{R}^3 .
- $(\vec{v}_1 = (1, 2, 1, 2, 1), \vec{v}_2 = (2, 1, 2, 1, 2), \vec{v}_3 = (1, 0, 1, 1, 0), \vec{v}_4 = (0, 1, 0, 0, 1))$ dans \mathbb{R}^5 .

Exercice 8.

- Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et donner une base de E . Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} E$?
- Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x\}$. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} F$?

Exercice 9. On se place dans E l'espace des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de sa structure classique de \mathbb{R} espace vectoriel.

On pose $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = e^{-x}$$

Déterminer $\dim(F)$ où $F = \text{Vect}(f, g, h)$.

Exercice 10.

Dans \mathbb{R}^3 , déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

- $F_1 = \text{vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (2, 1, 1)$.
- $F_2 = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (-1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.
- $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.
- $F_4 = \text{vect}(x_1, x_2, x_3)$ où $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1)$ et $x_3 = (1, 0, 1)$.

5. $F_5 = \text{vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ où $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 1, 1)$ et $x_4 = (0, 2, -1, 1)$.

Quelle est la dimension de $F_1 + F_2$ et de $F_1 \cap F_2$?

Exercice 11. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim E = n$.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$.
Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E . Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 12. Soit $n \geq 0$. Montrer que $B = (1, (X - a), (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, donner la décomposition de P dans la base B .

Exercice 13. On note dans $\mathbb{R}[X]$: $P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = (X - 1)X(X + 1), P_3(X) = X^2(X + 1), P_4(X) = (X - 1)X(X + 1)^2$.

Montrer que $\beta = (P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $R_4[X]$.

Exercice 14. On note $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto x^2$.

Calculer le rang de la famille $\mathcal{A} = (f, g, f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g)$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien vaut $\dim(\mathbb{C}^n)$?

L'ensemble \mathbb{C}^n n'est pas seulement un \mathbb{C} -espace vectoriel, c'est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel.

En tant que \mathbb{R} -e.v., combien vaut $\dim(\mathbb{C}^n)$?

Exercice 16. On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_k: x \mapsto \sin(kx)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille (f_1, \dots, f_n) est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Indication : Quelle méthode de raisonnement utiliser ?

Exercice 17.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_{a,b}: x \mapsto a \cos(x + b)$. Soit $E = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 18. Soient (e_1, \dots, e_n) et (e'_1, \dots, e'_n) deux bases d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E . Montrer qu'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E .

Indication : Quelle méthode de raisonnement utiliser ?