Feuille de TD n° 13

Géométrie plane

Exercice 1. Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.

1. Pour qu'un quadrilatère soit un carré, il est nécessaire qu'il ait 3 angles droits.
2. Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle.
3. Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme.
4. Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un losange est que ses diagonales se coupent orthogonalement en leur milieu.
5. Pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il est nécessaire et suffisant qu'il ait 3 angles droits.
6. Un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles et de même longueur est un rectangle.
7. Pour qu'un rectangle soit un carré, il est suffisant que ses diagonales soient orthogonales.

Exercice 2. Soit $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ un repère du plan. On considère les points $A(-2,-3)$, $B(3,3)$ et $C(4,-1)$. On note K le milieu de $[AC]$. Soit P le point défini par la relation
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Démontrer que les droites (OP) et (KB) sont parallèles.

Exercice 3 (Hauteurs d'un triangle)**.** Soit ABC un triangle. On note :

- A' le projeté orthogonal de A sur (BC).
- B' le projeté orthogonal de B sur (AC).
- C' le projeté orthogonal de C sur (AB).
- H le point d'intersection de (AA') et (BB').

1. Montrer que $\vec{AH}.\vec{BC}=0$ et que $\vec{BH}.\vec{CA}=0$.
2. À l'aide d'une relation de Chasles en C, sur les deux égalités précédentes, montrer que $\vec{CH}.\vec{BA}=0$.
3. En conclure que les trois hauteurs de ABC sont concourantes.

Exercice 4 (Formule d'Al-Kashi)**.** Soit ABC un triangle du plan. On note $a=BC$, $b=CA$ et $c=AB$. Démontrer que
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{BAC}).$$

Exercice 5. Soit ABC un triangle. Considérons les points D et E définis par
$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\ \text{ et }\ \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}.$$

Démontrer que les points B, D et E sont alignés.

Exercice 6. Soit ABC un triangle.

1. (a) Montrer qu'il existe un unique point G tel que
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0.$$
   (b) Une **médiane** est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé. Montrer que G est sur les 3 médianes.
2. Une **bissectrice** est une droite passant par un sommet et divisant l'angle en ce sommet en deux angles égaux. Montrer que les 3 bissectrices se coupent en un même point.
3. (a) Montrer que les 3 **médiatrices** des côtés du triangle se coupent en un même point O.
   (b) En déduire que si $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ sont 3 cercles centrés en A, B et C de même rayon r, il existe un cercle $\mathcal{C}$ tangent aux trois cercles.

Exercice 7. 1. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct. Déterminer une équation cartésienne (de la forme $ax+by+cz+d=0$) du plan passant par les points $A(1,0,-2)$, $B(0,2,1)$ et $C(-1,1,0)$.

2. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M(a,b)$ sur la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x-2y-1=0$.

Exercice 8. Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Soit I le milieu de $[AD]$, O le symétrique de I par rapport à A et R le point défini par $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Montrer que O, R et C sont alignés.
2. Soient J le milieu de $[CD]$, K le milieu de $[BC]$ et L le milieu de $[AB]$. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 9 (Parallélogramme et repère astucieux). Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Montrer que les diagonales (AC) et (BD) se coupent en leur milieu si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.
Indice : on pourra introduire le repère $\mathcal{R}=(A,\vec{AB},\vec{AD})$.

Exercice 10 (Théorème de l'angle au centre). Soit A, B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $R>0$. Soit M un point distinct de A et B. Montrer l'équivalence suivante :

$$M\in\mathcal{C}\iff\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\quad[2\pi]$$

On se placera dans un repère orthonormé centré en Ω tel que A ait pour affixe $Re^{-i\theta_0}$ et B ait pour affixe $Re^{i\theta_0}$.

Exercice 11 (Invariance de la somme de 3 longueurs dans un triangle équilatéral). Soit ABC un triangle équilatéral, un point M intérieur à (ABC) se projette orthogonalement en A' sur (BC), B' se projete orthogonalement sur (AC) et C' sur (AB). Montrer que $S=MA'+MB'+MC'$ est indépendant de M et donner sa valeur en fonction du côté a de ABC.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 12. Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. Notons I le milieu du segment $[AC]$ et J celui de $[BD]$. Posons, pour tout point M de l'espace,

$$\vec{u}_M=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}.$$

1. Démontrer que, pour tout point M, le vecteur $\vec{u}_M$ ne dépend pas de M.
2. Pour tout point M, exprimer $\vec{u}_M$ en fonction des points I et J.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le quadrilatère $ABCD$ (ou $ACBD$) pour que, pour tout point M, $\vec{u}_M$ soit égal au vecteur nul.