Feuille de TD n° 13

Géométrie plane

Exercice 1. Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.

1. Pour qu'un quadrilatère soit un carré, il est nécessaire qu'il ait 3 angles droits.
2. Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle.
3. Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles, c'est un parallélogramme.
4. Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un losange est que ses diagonales se coupent orthogonalement en leur milieu.
5. Pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il est nécessaire et suffisant qu'il ait 3 angles droits.
6. Un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles et de même longueur est un rectangle.
7. Pour qu'un rectangle soit un carré, il est suffisant que ses diagonales soient orthogonales.

Exercice 2. Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère du plan. On considère les points $A(-2,-3)$, $B(3,3)$ et $C(4,-1)$. On note K le milieu de $[AC]$. Soit P le point défini par la relation

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Démontrer que les droites (OP) et (KB) sont parallèles.

Exercice 3 (Hauteurs d'un triangle)**.** Soit ABC un triangle. On note :

- A' le projeté orthogonal de A sur (BC).
- B' le projeté orthogonal de B sur (AC).
- C' le projeté orthogonal de C sur (AB).
- H le point d'intersection de (AA') et (BB').

1. Montrer que $\vec{AH}.\vec{BC} = 0$ et que
   $\vec{BH}.\vec{CA} = 0$.
2. À l'aide d'une relation de Chasles en C, sur les deux égalités précédentes, montrer que $\vec{CH}.\vec{BA} = 0$.
3. En conclure que les trois hauteurs de ABC sont concourantes.

Exercice 4.

1. Déterminer un vecteur v orthogonal à $u = (5,-2)$ et unitaire.
2. La famille $((3,1),(-2,5))$ est-elle une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer $p_b(a)$ le projeté orthogonal de $a = (-2,5)$ sur $b = (3,1)$.
4. Déterminer $\|p_b(a)\|$.
5. Déterminer deux vecteurs a', b' qui forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et tels que a' est colinéaire à a.
6. Déterminer l'aire d'un parallélogramme engendré par a et b.

Exercice 5.

1. Soit D la droite d'équation $3x - 4y = 2$. Déterminer l'ensemble des points de D, u un vecteur directeur, n un vecteur normal, M un point de D.s
2. Soit $A = (1,5)$. Est-ce que $A \in D$?
3. Déterminer $p_D(A)$ et $dist(A, D)$.
4. Soit D' la droite d'équation $5x - 2y = 1$. Les droites D et D' sont-elles parallèles ?
   Si non, déterminer $D \cap D'$.
5. Soit D'' la droite passant par $A = (1,5)$ et $B = (-1,1)$. Déterminer une équation cartésienne de D''.
6. Soit $A' = (-5,7)$. Les points A, B, A' sont-ils alignés ?
7. Soit C le cercle de centre $A = (1,5)$ et de rayon 3. Déterminer une équation cartésienne de C, ainsi qu'un paramétrage de C.
8. La droite D' est-elle tangente à C ?

Exercice 6.

1. Déterminer les vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$ tels que $\langle u, v\rangle = 0$ et $det(u,v) = 0$.
2. Montrer que $B = ((2,3),(1,-1))$ est une base du plan $\mathbb{R}^2$.
   Ecrire M la matrice de la base B dans la base canonique.
3. Soit $u = (5,8)$. Déterminer les coordonnées de u dans la base B en résolvant un système linéaire.
4. Ecrire les vecteurs de la base canonique comme des combinaisons linéaires de $(2,3)$ et de $(1,-1)$.

5. Déterminer M' la matrice de la base canonique dans la base B.
6. Soit $v = (5, a)$, avec $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les coordonnées de v dans la base B à l'aide d'un produit de matrices.

Exercice 7.

1. Soit $t \in [0, 2\pi[$. Montrer que la famille $B = ((\cos(t), \sin(t)), (-\sin(t), \cos(t))$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. On note f_1, f_2 les vecteurs de B.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On note $u = af_1 + bf_2$ la décomposition de u dans la base B. Montrer que l'on a $\langle u, f_1\rangle = a$ et $\langle u, f_2\rangle = b$.
3. Pour $u = (5, 4)$, déterminer a et b.
   Vérifier que $\|u\|^2 = a^2 + b^2$.

Exercice 8.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes des vecteurs de coordonnées polaires $(3, \pi)$, $(1, 0)$, $(1, \frac{\pi}{2})$, $(4, \frac{\pi}{6})$, $(1, 1)$.
2. Déterminer les coordonnées polaires des vecteurs $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, \sqrt{3})$, $(5, 7)$.

Exercice 9 (Formule d'Al-Kashi)**.** Soit ABC un triangle du plan. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Démontrer que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC}).$$

Exercice 10. Soit ABC un triangle. Considérons les points D et E définis par

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB}.$$

Démontrer que les points B, D et E sont alignés.

Exercice 11. Soit ABC un triangle.

1. (a) Montrer qu'il existe un unique point G tel que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0.$$

   (b) Une **médiane** est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé. Montrer que G est sur les 3 médianes.
2. Une **bissectrice** est une droite passant par un sommet et divisant l'angle en ce sommet en deux angles égaux. Montrer que les 3 bissectrices se coupent en un même point.
3. (a) Montrer que les 3 **médiatrices** des côtés du triangle se coupent en un même point O.

   (b) En déduire que si $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ sont 3 cercles centrés en A, B et C de même rayon r, il existe un cercle $\mathcal{C}$ tangent aux trois cercles.

Exercice 12. Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Soit I le milieu de $[AD]$, O le symétrique de I par rapport à A et R le point défini par $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Montrer que O, R et C sont alignés.
2. Soient J le milieu de $[CD]$, K le milieu de $[BC]$ et L le milieu de $[AB]$. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 13 (**Cercles d'Apollonius**)**.** Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ des points distincts du plan. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $S_\lambda = \{M \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |AM| = \lambda|BM|\}$.

1. Montrer que S_1 est une droite, dont on précisera un point I et un vecteur directeur $\vec{u}$.
2. On suppose $\lambda \neq 1$. Montrer que S_λ est un cercle, dont on précisera le centre Ω et le rayon r.
3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda' \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \neq \lambda'$.
   Montrer que $S_\lambda \cap S_{\lambda'} = \emptyset$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B\} = \bigcup_{\lambda \in]0,+\infty[} S_\lambda$.

Exercice 14 (**Parallélogramme et repère astucieux**)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Montrer que les diagonales (AC) et (BD) se coupent en leur milieu si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.
Indice : on pourra introduire le repère $\mathcal{R} = (A, \vec{AB}, \vec{AD})$.

Exercice 15 (**Théorème de l'angle au centre**)**.** Soit A, B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Soit M un point distinct de A et B. Montrer l'équivalence suivante :

$$M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \quad [2\pi]$$

On se placera dans un repère orthonormé centré en Ω tel que A ait pour affixe $Re^{-i\theta_0}$ et B ait pour affixe $Re^{i\theta_0}$.