Feuille de TD n° 14

Intégration

Révisions : calculs de primitives

Exercice 1. Rappeler les différentes techniques de calcul de primitives.
Puis, déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \sin(3t)$
2. $t \mapsto \cos(t)\sin^2(t)$
3. $t \mapsto \sin^3(t)$
4. $t \mapsto \arctan(t)$
5. $t \mapsto t\sin^2 t$
6. $t \mapsto te^{-t^2}$
7. $t \mapsto (t^2+t+1)\sin(t)$
8. $t \mapsto e^{2t}\sin(t)$
9. $t \mapsto \frac{1}{1+5.t^2}$
10. $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$
11. $t \mapsto \dfrac{1}{e^t+1}$
12. $t \to \frac{1}{t^2+3t+1}$
13. $t \to \frac{1}{t^2-3t+2}$
14. $t \to \cos(t)(\sin^4(t)+3)$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \sin(3t)dt$
2. $\int_0^\pi \cos(t)\sin^2(t)dt$
3. $\int_{-10}^{10} \sin^3(t)dt$
4. $\int_{-e^2}^{e^2} \arctan(t)dt$
5. $\int_0^n x^n dx$
6. $\int_0^n e^{-t}dt$
7. $\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t}dt$
8. $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(t)dt$
9. $\int_1^n x^a dx$, $a \in \mathbb{R}$

Pour toutes les intégrales dépendant de $n \in \mathbb{N}^*$, étudier le comportement de l'intégrale quand $n \to +\infty$ (convergente ? valeur de la limite ?)

Exercice 3. Pour tous entiers naturels p et q, on définit $I_{p,q}$ par : $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $I_{p,0}$. Calculer $I_{1,1}$.
2. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1,q-1}$.
3. En déduire une expression explicite de $I_{p,q}$ en fonction de p et q. On pourra faire un dessin similaire au triangle de Pascal, en positionnant les intégrales indiquées dans les questions précédentes.
4. Montrer que $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$, $\forall t \in [0,1]$.
5. Montrer que $I_{p,p} \leq \frac{1}{2^{2p}}$.
6. Montrer que $I_{p,p} \to_{p\to+\infty} 0$.

Encadrements et propriétés des intégrales

Exercice 4. Montrer que $\int_0^1 x^n dx \to_n 0$.
Montrer que $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \to_{n\to+\infty} 0$.
Montrer que $\int_0^1 x^n \sin(nx)dx \to_n 0$.
Montrer que $\int_1^3 x^n e^{-nx}dx \to_n 0$.

Exercice 5. Soit f continue sur $[a,b]$.
On veut montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.
• En raisonnant par l'absurde, démontrer le résultat.
• En utilisant le théorème des bornes, démontrer le résultat.

Exercice 6. Calculer les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

(a) $(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt)_n$ (b) $(\int_0^{\pi/2} \sin(t)e^{-nt}dt)_n$

Exercice 7. • Montrer que la suite $(\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt)_n$ est décroissante strictement (bien justifier le caractère strict).
• Montrer que cette suite est convergente. Quelle sera à priori sa limite l ?
• Pour $k \geq 1$, encadrer la fonction sin sur $[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}]$ et sur $[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}, \frac{\pi}{2}]$.
• A l'aide de cet encadrement, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt < \epsilon$.
• En déduire la limite de $(\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt)_n$

Exercice 8. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{t^n e^t}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
2. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{e}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}(1-t)^2e^t}{(1+t^2)^2}dt$. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Sommes de Riemann

Exercice 9. Rappeler le résultat principal sur les sommes de Riemann. Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$;
2. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$;
3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$;
4. $\left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$;
5. $\left(\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$;
6. $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Intégrale d'une fonction continue de signe constant

Exercice 10. Quel résultat de cours relie fonction continue et intégrale nulle ?
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec $a<b$. On suppose que $\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4$.
Comment obtenir des intégrales nulles avec ces hypothèses ?
Les fonctions dont les intégrales sont nulles sont-elles forcément positives ?
Quel fait très simple permet de dire immédiatement qu'un nombre réel $g(x)$ est positif ?
Trouver g une combinaison linéaire de f^2, f^3, f^4 qui est comme un multiple de $(1-f)^2$.
Montrer que cette fonction g est continue, d'intégrale nulle, et de signe constant sur $[a,b]$.
En déduire que f est constante sur $[a,b]$.

Exercice 11. Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans $]0,1[$.
On suppose maintenant qu'on a en plus $\int_0^1 t.f(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois dans $]0,1[$.

Fonctions définies à l'aide d'une intégrale

Exercice 12. Soit φ la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ et $\varphi(0)=1$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x}\varphi(t)dt$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 13. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, déterminer $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = ax+b$.

Inégalité de Taylor Lagrange

Exercice 14. Etablir que pour tout $x \in [0,\pi/2]$, $x - \frac{x^3}{6} \le \sin(x) \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 15. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right| \le \frac{|x|^{n+1}\max(e^x,1)}{(n+1)!}.$$

En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ (à x fixé).

Exercice 16. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \to \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \to_{n\to+\infty} \ln(2).$$