

FEUILLE DE TD N° 15

Analyse asymptotique

Exercice 1. Déterminer un équivalent simple de la suite dont le terme général est :

1. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$
2. $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
3. $w_n = n^{\frac{1}{n}}$
4. $z_n = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
5. $t_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n}$ (on pourra mettre au même dénominateur)
6. $s_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ (on pourra utiliser $x = \exp(\ln(x))$)

Exercice 2. Calculer les développements limités suivants :

- $DL_4(0); f(x) = \frac{1}{1+x} - 2\ln(1+x)$
- $DL_5(0); f(x) = \exp(x^2) - (5x^3 + 2x + 3)$
- $DL_2(0); f(x) = (2+x)^{\frac{2}{3}}$
- $DL_3(2); f(x) = \exp(5+3x)$
- $DL_4(0); f(x) = (1 + \sin(x))^x$
- $DL_3(0); f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$
- $DL_2(0); f(x) = \frac{xe^{-x}}{2x+1}$
- $DL_4(0); f(x) = \sin(x)^2 \cos(x)$
- $DL_4(0); f(x) = \tan(2x)$
- $DL_5(0); f(x) = \ln(5+x^2)$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{\cos(x)}$
- $DL_2(1); f(x) = \arctan(2x)$
- $DL_2(0); f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$
- $DL_2(2); f(x) = x^x$

Exercice 3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la suite dont le terme général est :

1. $u_n = (1 + \frac{a}{n})^n$, pour $a \in \mathbb{R}$.
On pourra utiliser le fait que $x = \exp(\ln(x))$, $\forall x > 0$.

$$2. v_n = \frac{(n+1)^{1/2} - n^{1/2}}{n}$$

On pourra faire apparaître une fraction et utiliser l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$3. w_n = (n^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$4. z_n = (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$$

$$5. y_n = \left(\frac{3n+3}{7n+1}\right)^n$$

On pourra utiliser la question 1).

Exercice 4. Étudier le comportement des fonctions suivantes (prolongement, continuité, existence de tangente, et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ au voisinage de 0.
2. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.
3. $f(x) = \frac{\sin(\cos(3x)) - 1}{x}$ au voisinage de 0.

Exercice 5. Déterminer la limite des suites $(u_n)_n$ suivantes :

1. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}$
2. $u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
3. $u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Exercice 6. Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3}$
2. $u_n = (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)}$
3. $u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}\right)$
4. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

Donner, si elle existe, leur limite pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 7. Calculer à l'aide de développements limités les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{x^2}$

Exercice 8. Soient $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_n$ par :

$$u_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} + \frac{1}{n}(\alpha n^2 + \beta n + \gamma)$$

A l'aide d'un DL_3 en $\frac{1}{n}$, calculer un développement asymptotique de $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$.

En déduire les valeurs de α telles que la suite $(u_n)_n$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 9. Soit $(u_n)_n$ une suite décroissante de réels vérifiant $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

Montrer que les u_n sont positifs. (On raisonnera par l'absurde)

Montrer que la suite converge, et que sa limite vaut 0.

Donner un équivalent simple de u_n .

Le résultat reste-t-il vrai si la suite n'est pas supposée décroissante ? (Si non, on pourra chercher un contre-exemple)

Exercice 10. Déterminer des équivalents des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ en 0
2. $x \mapsto (x+1)^x - x^x$ en 0
3. $x \mapsto \sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)}$ en $+\infty$
4. $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)} - \tan(x)$ en $\frac{\pi}{2}$ (poser $x = \frac{\pi}{2} + u$)

On pourra s'aider de DL (à l'ordre 1, 2 ou 3) pour trouver les équivalents.

Exercice 11. Calculer les développements limités suivants :

- $DL_2(0); f(x) = \sqrt{3 + \cos(x)}$
- $DL_5(0); f(x) = \tan(x)$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{\cos(x)} - \cos(\sqrt{x})$
- $DL_3(0); f(x) = e^{\sin(x)}$

Exercice 12. On considère, pour tout entier naturel n , la fonction $f_n : x \mapsto x^3 + nx + n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède toujours une unique solution u_n sur \mathbb{R} .

2. Montrer que $-1 \leq u_n \leq 0$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

4. Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

5. A l'aide de la question précédente, montrer que $u_n + 1 = -1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

6. Puis, montrer que $u_n = -1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.