

## F E U I L L E D E T D N° 1 6

## Applications linéaires

## ■ Repérages

**Exercice 1.**

Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que  $\ker u \subset \ker(v \circ u)$  et que  $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$ .

**Exercice 2.** On considère  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \longmapsto (x + y, x - 2z)$ .

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Déterminer l'image réciproque  $f^{-1}(\{0\})$ .  $f$  est-elle injective ?
3. Déterminer l'image  $f(\mathbb{R}^3)$  de  $f$ .  $f$  est-elle surjective ?

**Exercice 3.**

On considère l'application  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

1. Déterminer une base du noyau de  $f$ .
2. Donner le rang de  $f$ .
3. Soit  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Calculer  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ .
4. Soit  $\mathcal{B} = ((1, 2, 0), (3, 1, 0), (0, 2, 1))$ . Calculer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ .

**Exercice 4.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  et soit  $u$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associée à  $A$ . Déterminer  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im } u$ .

**Exercice 5.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $f^3 = 0$  et  $f^2 \neq 0$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker}(f^2)$ , montrer que  $(x, f(x), f^2(x))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Exprimer la matrice de  $f$  dans cette base.

**Exercice 6.**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  de degré  $n > 0$ .

On définit la fonction  $\phi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X]$ , telle que  $\phi(Q)$  est le reste de la division euclidienne de  $Q$  par  $P$ .

1. Montrer que  $\phi$  est une application linéaire.
2. Est-ce que  $\phi$  est injective ? Déterminer  $\text{Ker}(\phi)$ .
3. Est-ce que  $\phi$  est surjective ? Déterminer  $\text{Im}(\phi)$ .
4. Quelle différence y a-t-il avec la division euclidienne des entiers ?

**Exercice 7.**

On considère l'application  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(x, y, z) \longmapsto (y + z, x + z, x + y)$ . Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer la bijection réciproque  $f^{-1}$ . Vérifier que  $f^{-1}$  est une application linéaire.

**Exercice 8.**

Soit  $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$   
 $P(X) \longmapsto P(X + 1) - P(X)$  et  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

1. Vérifier que  $f$  est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de  $f$ .
3. Déterminer l'image de  $f$ .
4. Donner la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
5. Soit  $\mathcal{B}' = (1, X - 1, (X - 1)(X - 2))$ . Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  et donner  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ .

**Exercice 9.**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^3$ . On définit un endomorphisme  $\varphi$  de  $E$  par  $\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_3$ ,  $\varphi(e_2) = e_2 + 2e_3$  et  $\varphi(e_3) = 2e_1 + 2e_2$ .

1. Donner l'expression de  $\varphi(x)$  en fonction des coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$ .
2. Déterminer  $\ker \varphi$  et  $\text{Im } \varphi$ .

**Exercice 10.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$  et  $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$ .

2. Montrer l'équivalence

$$\text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u) \iff \text{Ker}(u) \cap \text{Im } u = \{0\}.$$

3. Montrer l'équivalence

$$\text{Im } u^2 = \text{Im } u \iff \text{Ker}(u) + \text{Im } u = E.$$

4. Supposons que  $E$  est de dimension finie. Montrer que

$$\text{Ker}(u) \oplus \text{Im } u = E \iff \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u) \iff \text{Im } u^2 = \text{Im } u.$$

On pourra utiliser un résultat central du cours.

**Exercice 11.**

Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $G$  un supplémentaire de  $\text{ker } u$  dans  $E$ .

Montrer que l'application  $g : \begin{matrix} G & \longrightarrow & \text{Im } u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{matrix}$  (la restriction de  $u$  à  $G$ ) est un isomorphisme.

**Exercice 12.**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer une base et une équation cartésienne de  $\text{Ker } f$ .
- Déterminer une base et un système d'équations cartésiennes de  $\text{Im } f$ .
- Déterminer une base de  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im } f$  et en déduire une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  n'a qu'un coefficient non nul.
- En déduire une matrice  $P$  telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 13.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit

$$\phi : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{matrix}.$$

1. Calculer  $\phi(X^k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

2. En déduire  $\text{Ker}(\phi)$ .

3. Déterminer  $\text{Im } \phi$ .

**Exercice 14.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 + u - 2\text{Id}_E = 0$ .

1. Montrer que  $u$  est inversible et calculer  $u^{-1}$ .

2. Montrer que  $(u - \text{Id}_E) \circ (u + 2\text{Id}_E) = (u + 2\text{Id}_E) \circ (u - \text{Id}_E) = 0$ .

3. Soit  $x \in E$ . En écrivant  $x = \frac{1}{3}(u(x) + 2x) - \frac{1}{3}(u(x) - x)$ , montrer que  $\text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + 2\text{Id}_E) = E$ .

**Exercice 15.** Soit  $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$  et  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorphisme défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 - \frac{x+y+z}{3}u.$$

1. Écrire la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de  $f$ .

Montrer que  $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$ .

3. Montrer que l'ensemble des vecteurs  $v \in \mathbb{R}^3$  tels que  $f(v) = v$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et en déterminer une base.

4. Montrer que  $f$  est un projecteur. Sur quel sous-espace vectoriel, parallèlement à quel sous-espace vectoriel ?

5. Trouver une matrice  $P$  inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 16.**

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies, on se donne deux bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de  $E$ . Soit  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire sur  $E$ . Si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}}(u)$  et  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}}(u)$ , exprimer  $B$  en fonction de  $A$  et de la matrice de passage  $P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$ .