FEUILLE DE TD N° 16

Applications linéaires

Repérages

Exercice 1.
Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $\ker u \subset \ker(v \circ u)$ et que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.

Exercice 2. On considère $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x-2z) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$. f est-elle injective ?
3. Déterminer l'image $f(\mathbb{R}^3)$ de f. f est-elle surjective ?

Exercice 3.
On considère l'application $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Donner le rang de f.
3. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
4. Soit $\mathcal{B} = ((1,2,0),(3,1,0),(0,2,1))$. Calculer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à A. Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im} u$.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$, montrer que $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer la matrice de f dans cette base.

Exercice 6.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n > 0$.
On définit la fonction $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}_{n-1}[X]$, telle que $\phi(Q)$ est le reste de la dlvision euclidienne de Q par P.

1. Montrer que ϕ est une application linéaire.
2. Est-ce que ϕ est injective ? Déterminer $Ker(\phi)$.
3. Est-ce que ϕ est surjective ? Déterminer $Im(\phi)$.
4. Quelle différence y a-t-il avec la division euclidienne des entiers ?

Exercice 7.
On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+z, x+y) \end{array}$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la bijection réciproque f^{-1}. Vérifier que f^{-1} est une application linéaire.

Exercice 8.
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Soit $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)(X-2))$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 9.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On définit un endomorphisme φ de E par $\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_3$, $\varphi(e_2) = e_2 + 2e_3$ et $\varphi(e_3) = 2e_1 + 2e_2$.

1. Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$ et $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$.
2. Montrer l'équivalence

$$\operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u) \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im} u = \{0\}.$$

3. Montrer l'équivalence

$$\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u \iff \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Im} u = E.$$

4. Supposons que E est de dimension finie. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im} u = E \iff \operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u) \iff \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u.$$

On pourra utiliser un résultat central du cours.

Exercice 11.
Soit E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E.
Montrer que l'application $g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ (la restriction de u à G) est un isomorphisme.

Exercice 12.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im} f$ et en déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.
4. En déduire une matrice P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}.$$

1. Calculer $\phi(X^k)$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
2. En déduire $\operatorname{Ker}(\phi)$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} \phi$.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + u - 2\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que u est inversible et calculer u^{-1}.
2. Montrer que $(u - \mathrm{Id}_E) \circ (u + 2\mathrm{Id}_E) = (u + 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - \mathrm{Id}_E) = 0$.
3. SOit $x \in E$. En écrivant $x = \frac{1}{3}(u(x) + 2x) - \frac{1}{3}(u(x) - x)$, montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u + 2\mathrm{Id}_E) = E$.

Exercice 15. Soit $u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 - \frac{x+y+z}{3} u.$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
   Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.
3. Montrer que l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(v) = v$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
4. Montrer que f est un projecteur. Sur quel sous-espace vectoriel, parallèlement à quel sous-espace vectoriel ?
5. Trouver une matrice P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, on se donne deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E. Soit $\mathcal{C}$ une base de F.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire sur E. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}}(u)$, exprimer B en fonction de A et de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$.