Feuille de TD n° 19

Déterminant

Exercice 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A.

1. Si $C_n = C_1$, que sait-on sur $\det(A)$?
2. Si $C_2 = C_3 + C_4$, que sait-on sur $\det(A)$?
3. Si $C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 0$, que sait-on sur $\det(A)$?
4. Si $A \notin Gl_n(\mathbb{R})$, que sait-on sur $\det(A)$?
5. Si $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ et $\det(A^{-1}) = \det(A)$, que sait-on sur $\det(A)$?
6. Si $\det({}^tA) = -\det(A)$, que sait-on sur $\det(A)$?
7. Si $Ker(A) \neq \{0\}$, que sait-on sur $\det(A)$?
8. Si $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille liée de $\mathbb{R}^n$, que sait-on sur $\det(A)$?
9. Si $A^2 = A$, que sait-on sur $\det(A)$?
10. Si $A^2 = I_n$, que sait-on sur $\det(A)$?
11. Si $Im(A) = \mathbb{R}^n$, que sait-on sur $\det(A)$?

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer les mineurs $\Delta_{2,2}$ et $\Delta_{1,3}$.
Calculer $\det(A)$ en effectuant un développement selon la première ligne.
Calculer $\det(A)$ par la méthode du Pivot.
La matrice A est-elle inversible ?
Déterminer $Ker(A)$ et $rg(A)$.

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^3 & x^2 & x \\ 1 & 2x & 3x \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(A)$ en utilisant des opérations sur les lignes et sur les colonnes, ainsi que des factorisations.
Factoriser $\det(A)$ entièrement. On s'aidera de valeurs x pour lesquelles la matrice A est clairement non-inversible.

Exercice 4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique (${}^tA = -A$).
• On suppose que n est impair. Montrer que $\det(A) = 0$.
• Si n est pair, est-ce que cela est encore vrai ?

Exercice 5. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
• Pour C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, chercher une combinaison linéaire de ces colonnes qui est nulle.
• Résoudre l'équation $\det(\lambda I_3 - A) = 0$.
On pourra au choix développer le déterminant puis déterminer les racines une à une, ou bien utiliser la première question pour réaliser une opération sur les colonnes (si $C_3 = aC_1 + bC_2$, faire $C_3 \leftarrow C_3 - aC_1 - bC_2$)

Exercice 6. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $n \geq 2$. On définit :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Calculer $\det(A_3)$ et $\det(A_4)$, avec des opérations sur les lignes et sur les colonnes.
• En déduire la valeur de $\det(A_n)$. (Quelle méthode de raisonnement utiliser ?)

Exercice 8. On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre l'équation $\det(J - \lambda I_3) = 0$ dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.
   Indication : Il faut calculer le déterminant.
2. Pour quels $z \in \mathbb{C}$ la matrice $J - zI_3$ est-elle inversible ?
3. Pour chaque $z \in \mathbb{C}$ tel que $J - zI_3$ n'est pas inversible, calculer $Ker(J - zI_3)$.
   Quelle est la dimension de ce sous-ev ?
4. Trouver trois vecteurs X_1, X_2, X_3 tels que $JX_1 = X_1$, $JX_2 = jX_2$, $JX_3 = j^2X_3$.
5. Que peut-on dire sur la famille (X_1, X_2, X_3) ?