Feuille de TD n° 20

Séries numériques

Exercice 1.

1. Pour quelles valeurs de $q \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\geq 0} q^n$ est-elle convergente ? Si cette série converge, combien vaut sa somme S ?
2. On suppose la série convergente. Exprimer le reste R_N de cette série en fonction de la somme S et de la somme partielle S_N. Puis, donner la valeur de R_N en fonction de q et de N.
3. Retrouver la valeur de R_N en effectuant le changement de variables $m = n + N + 1$.

Exercice 2. Étudier la nature des séries suivantes (distinguer selon la valeur de $x \in \mathbb{R}$ pour les séries avec un paramètre x).

- $\displaystyle\sum_n \frac{2n^2}{n^3-1}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{2^{2n+1}}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{e^n}{3^n}$
- $\displaystyle\sum_n e^{-nx}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{n(n-1)x^n}{n!}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{4(-1)^n}{n!}$
- $\displaystyle\sum_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{4n^2-1}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$

Pour chaque série convergente, essayer de calculer leur somme. Certaines sont plus difficiles que d'autres.
Indications : Décomposer en série entière $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\frac{1}{4n^2-1}$. Méthodes de calcul du cours.

Exercice 3. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2+1}$ est convergente.

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale (quelle fonction utiliser ?), déterminer un équivalent de son reste R_n.

Exercice 4. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2+1}$ est convergente.

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale (quelle fonction utiliser ?), déterminer un équivalent de son reste R_n.

Exercice 5. Etudier la série $\sum_n \tan(\frac{1}{n})$ avec une comparaison série-intégrale.

Exercice 6. Pour $a < 0$, déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)^a}{x}$.
A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature de $\sum_n \frac{ln(n)^a}{n}$.

Exercice 7. Étudier la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^3+2^n}$
- $\displaystyle\sum_n \ln\frac{n^2+n^4}{2n^4}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
- $\displaystyle\sum_n \ln\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2-n}$
- $\displaystyle\sum_n \sqrt{\frac{n+2}{n^3-5n+1}}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{n^2}{n!}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{\ln n}{3^n}$

Exercice 8. Soit u_n une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{-u_n}u_n$, $\forall n \geq 1$.

1. Montrer que la suite u_n est convergente, et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln u_n$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et u_n. Puis, calculer la somme partielle entre 0 et N de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{N+1}.
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 9. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$, puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 10. Soit $0 \leq q < 1$. On veut étudier la série $\sum_{n\geq 0} nq^n$.

1. Montrer que $n\sqrt{q}^n \to_n 0$.
2. Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0, on a $0 \leq nq^n \leq \sqrt{q}^n$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} nq^n$ est convergente.
4. Pour $f(x) = \frac{1}{1-x}$, combien vaut $f'(x)$?
5. On admet que $\sum_{n\geq 0}(n+1)q^n = f'(q)$.
   Calculer la somme $\sum_{n\geq 0} nq^n$.
6. Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} n^k q^n$ est convergente.

Exercice 11.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que la série de terme général $a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n+1}$ soit convergente.
   On pourra penser à ressortir les DL.
2. Même question pour la série de terme général $\sqrt{n^2+4n+1} - \left(an + b + \dfrac{c}{n}\right)$.

Exercice 12. Le but de cet exercice est de prouver la convergence de la série exponentielle, <u>sans</u> utiliser vos connaissances éventuelles sur cette série.

1. Montrer que $\forall n \geq 4$, on a $n! \geq 2^n$.
2. En déduire que $\forall n \geq 4$, on a $\displaystyle\sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^3}$.
3. Prouver la convergence de la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{1}{k!}$, et donner un encadrement de sa limite.