# Feuille de TD n° 20

*Séries numériques*

**Exercice 1.**

1. Pour quelles valeurs de $q \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\geq 0} q^n$ est-elle convergente ? Si cette série converge, combien vaut sa somme $S$ ?
2. On suppose la série convergente. Exprimer le reste $R_N$ de cette série en fonction de la somme $S$ et de la somme partielle $S_N$. Puis, donner la valeur de $R_N$ en fonction de $q$ et de $N$.
3. Retrouver la valeur de $R_N$ en effectuant le changement de variables $m = n + N + 1$.

**Exercice 2.** Étudier la nature des séries suivantes (distinguer selon la valeur de $x \in \mathbb{R}$ pour les séries avec un paramètre $x$).

- $\displaystyle\sum_n \frac{2n^2}{n^3-1}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{n(n-1)x^n}{n!}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{2^{2n+1}}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{4(-1)^n}{n!}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
- $\displaystyle\sum_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- $\displaystyle\sum_n \frac{e^n}{3^n}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{4n^2-1}$
- $\displaystyle\sum_n e^{-nx}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$

Pour chaque série convergente, essayer de calculer leur somme. Certaines sont plus difficiles que d'autres.
Indications : Décomposer en série entière $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\frac{1}{4n^2-1}$. Méthodes de calcul du cours.

**Exercice 3.** Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^2+1}$ est convergente.
A l'aide d'un équivalent, déterminer un équivalent de son reste $R_n$.
À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer un second équivalent de son reste $R_n$.

**Exercice 4.** Etudier la série $\sum_n \tan(\frac{1}{n})$. On utilisera un développement limité.
Etudier cette série à l'aide d'une comparaison série-intégrale.
En déduire que $\int_x^1 \frac{1}{x^2}\tan(x)dx \to_{x\to 0^+} +\infty$.

**Exercice 5.** Pour $a < 0$, déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)^a}{x}$.
A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature de $\sum_n \frac{ln(n)^a}{n}$.

**Exercice 6.** Étudier la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^3+2^n}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^2-n}$
- $\displaystyle\sum_n \ln\frac{n^2+n^4}{2n^4}$
- $\displaystyle\sum_n \sqrt{\frac{n+2}{n^3-5n+1}}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{n^2}{n!}$
- $\displaystyle\sum_n \ln\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n}$
- $\displaystyle\sum_n \frac{\ln n}{3^n}$

**Exercice 7.** Soit $u_n$ une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{-u_n}u_n$, $\forall n \geq 1$.

1. Montrer que la suite $u_n$ est convergente, et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln u_n$, exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ et $u_n$. Puis, calculer la somme partielle entre 0 et $N$ de la série de terme général $u_n$ en fonction de $v_0$ et de $v_{N+1}$.
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

**Exercice 8.** On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$, puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

**Exercice 9.** 1. Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que la série de terme général $a\sqrt{n-1}+b\sqrt{n}+c\sqrt{n+1}$ soit convergente.
On pourra penser à ressortir les $DL$.

2. Même question pour la série de terme général $\sqrt{n^2+4n+1}-\left(an+b+\dfrac{c}{n}\right)$.

**Exercice 10** (Critère de convergente des séries alternes)**.** Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels positifs, décroissante, telle que $a_n \to_{n\to+\infty} 0$.
On veut montrer que la série $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente.

1. Montrer que les suites de sommes partielles $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont convergentes.
   On pourra s'aider d'un dessin.
2. En déduire que la série $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente.
3. Une telle série est-elle toujours absolument convergente ?
4. Constuire deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $\sum_n u_n$ CV et $\sum_n v_n$ DV, et telles que $u_n \sim v_n$.
   On pourra s'aider des questions précédentes.
   Cela démontre que la proposition sur les séries de termes généraux équivalents est fausse si l'on sort du cadre des séries à termes positifs.

**Exercice 11** (Séries lacunaires)**.**

1. Déterminer une série à termes positifs $\sum_n u_n$ qui est convergente et telle que $(u_n)_n$ n'est pas majorée par $(\frac{1}{n})_n$ à partir d'un certain rang.
   On pourra prendre une série convergente $\sum_n w_n$ et construire $u_n$ à partir des $w_k$.
2. Déterminer une série à termes positifs non-nuls $\sum_n u_n$ qui est convergente et telle que $(u_n)_n$ n'est pas majorée par $(\frac{1}{n})_n$ à partir d'un certain rang.

**Exercice 12.** Le but de cet exercice est de prouver la convergence de la série exponentielle (pour $x=1$) d'une autre façon.

1. Montrer que $\forall n \geq 4$, on a $n! \geq 2^n$.
2. En déduire que $\forall n \geq 4$, on a $\displaystyle\sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^3}$.
3. Prouver la convergence de la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{1}{k!}$, et donner un encadrement de sa limite.

**Exercice 13** (Construction de cos et de sin)**.**

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_n \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente.
   On note $\cos(x)$ sa somme.
2. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_n \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est convergente.
   On note $\sin(x)$ sa somme.

**Exercice 14** (Séries complexes)**.** Pour $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs complexes, on dit que la série $\sum_n z_n$ converge si les séries $\sum_n Re(z_n)$ et $\sum_n Im(z_n)$ convergent. Dans ce cas on pose $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(z_n) + i\sum_{n=0}^{+\infty} Im(z_n)$.
On dit que la série $\sum_n z_n$ est absolument convergente si la série $\sum_n |z_n|$ converge.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\max(|Re(z)|, |Im(z)|) \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$.
2. On suppose que $\sum_n z_n$ est absolument convergente. Montrer que $\sum_n z_n$ converge.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $z_n = \frac{(ix)^n}{n!}$.
   Montrer que la série $\sum_n z_n$ est convergente. On notera $\exp(ix)$ sa somme.
4. En utilisant l'exercice précédent, démontrer les formules d'Euler : $\cos(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$.

**Exercice 15.**

1. Montrer que, pour tout $x \in ]-1,1[$, la série $\sum_n (n+1)x^n$ converge, et que $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in ]-1,1[$, la série $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ converge, et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \ln(1+x)$.
3. Montrer que, pour tout $x \in ]-1,1[$, la série $\sum_n \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$ converge, et déterminer $\sum_{k=2}^{+\infty}$.
4. Décomposer le polynôme $X^2$ dans la base $(1, X+1, (X+1)(X+2))$.
5. Montrer que, pour tout $x \in ]-1,1[$, la série $\sum_n n^2 x^n$ converge, et déterminer sa somme.