Chapitre 2
Trigonométrie

Table des matières

Vidal AGNIEL

On se place tout au long de ce chapitre dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère othonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$, la norme de $\vec{u}$ vaut $||u|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Avant d'aborder les propriétés des fonctions cosinus et sinus (dont les formules trigonométriques), nous allons donner une définition de tous ces éléments via la géométrie euclidienne.

1 Généralités

1.1 Cosinus et sinus

Définition 1 (**Angle géométrique**)
Soient A, B, C trois points du plan.
On appelle angle géométrique "ABC", noté $\widehat{ABC}$, la donnée des points A, B, C dans cet ordre.

Définition 2 (**Cosinus et sinus géométriques**)
Soient A, B, C trois points du plan tels que le triangle ABC est rectangle en A.
On définit le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$ et le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ par les deux les deux nombres réels suivants :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}.$$

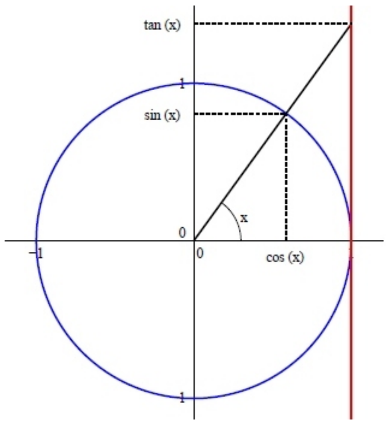
Exemple 3 — *Si ABC est un triangle rectangle en A et isocèle en A, alors on a :*

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En effet, avec le théorème de Pythagore on obtient $AB^2 + AC^2 = 2AB^2 = BC^2$.

Définition 4 (**Cercle trigonométrique**)
On note $\mathcal{C}_0$ le cercle trigonométrique, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont la distance à l'origine vaut 1.

$$\mathcal{C}_0 = \{M \in \mathcal{P} \ t.q. \ ||OM|| = 1\} = \{(x, y) \in \mathcal{P} \ t.q. \ \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}.$$



Le cercle trigonométrique, et la position de $\cos(x), \sin(x), \tan(x)$.

Le périmètre du cercle trigonométrique vaut 2π.
On commence par définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel x dans le cas $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On pose $I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons M l'unique point du cercle trigonométrique situé dans le quart supérieur droit, tel que l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$ soit de longueur x.
Pour repérer un tel point M en pratique il faut prendre une ficelle de longueur x, placer une extrémité sur I, et l'enrouler sur le cercle trigonométrique. L'autre extrémité sera alors au point M.

Définition 5 (**Cosinus et sinus d'un réel dans** $[0, \pi]$)

1. *Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on note M le point construit précédemment.*
   On note A le projeté orthogonal de M sur la droite (OI). On définit alors :
   - $\cos(x)$ *comme le nombre* $\cos \widehat{OAM}$.
   - $\sin(x)$ *comme le nombre* $\sin \widehat{OAM}$.

   Comme M est sur le cercle trigonométrique, on a $\cos(x) = OA$ et $\sin(x) = AM$.
2. *Pour tout $x \in [\dfrac{\pi}{2}, \pi]$, on définit :*
   - $\cos(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$.
   - $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

Remarque 6 — *On vient de définir deux fonctions, sinus et cosinus, sur l'intervalle* $[0, \pi]$.
On a comme valeurs particulières $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$ *et* $\sin(-\pi) = \sin(\pi) = 0$.

Définition 7 (**Fonctions cosinus et sinus**)
Etendons ces deux fonctions sur $[-\pi, \pi]$, intervalle centré en 0, avec les conditions suivantes :
- *la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos(x)$, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$)*
- *la fonction sinus est impaire ($\sin(-x) = -\sin(x)$, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$)*

Enfin, nous allons étendre ces fonctions sur $\mathbb{R}$ tout entier avec la condition de 2π-périodicité : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

Proposition 8
1. *Il est possible d'étendre le domaine de définition des fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *à tout $\mathbb{R}$ en les rendant 2π-périodiques.*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$. (Conséquence de la construction de* $\cos, \sin$ *et du théorème de Pythagore)*
3. *Soit $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un point du cercle trigonométrique.*
   Il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. Tout point du cercle trigonométrique a ses coordonnées qui sont le cosinus et le sinus d'un nombre réel.

Avec la méthode de construction de $\cos, \sin$ et le cercle trigonométrique, on peut donner les principaux liens entre différentes valeurs de cos et sin.

Proposition 9
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ *et* $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ *et* $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = -\sin(x)$ *et* $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ *et* $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

Avec la propriété de 2π-périodicité de $\cos, \sin$, nous apportons une propriété mathématique qui permet d'expliquer comment calculer $\cos(x)$ pour un $x \in \mathbb{R}$ quelconque : la congruence modulo 2π.

1.2 Equations et inéquations trigonométriques.

Définition 10 (**Congruence**)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels.
On dit que a est congru à b modulo 2π, noté $a \equiv b \mod (2\pi)$, s'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = k.2\pi$.

On peut alors démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ et sur $n \leq 0$ que :

Corollaire 11
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels.
Si a et b sont congrus modulo 2π, alors on a $\cos(a) = \cos(b)$ et $\sin(a) = \sin(b)$.

En général, si l'on veut calculer $\cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ éventuellement très grand, on cherche $y \in [-\pi, \pi]$ tel que $x \equiv y \mod (2\pi)$. On a ainsi $\cos(x) = \cos(y)$. Puis, on utilise les autres propriétés de cos pour obtenir ou approcher la valeur de $\cos(y)$.

Regardons maintenant les équations de la forme $\cos(x) = y$ et $\sin(x) = y$. Ces équations apparaissent fréquemment en géométrie et en analyse.

Proposition 12
Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation trigonométrique $(E) : \cos(x) = y$ se résout suivant deux cas distincts.

- *Si $y \in [-1, 1]$, il existe $x_0 \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x_0) = y$.*
  Et, l'ensemble des solutions de (E) est :
  $$\{x_0 + 2k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x_0 + 2k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\}.$$
  On a $\cos(x) = y$ si et seulement si $x \equiv x_0 \mod (2\pi)$ ou $x \equiv -x_0 \mod (2\pi)$.
- *Si $y \notin [-1, 1]$, l'équation n'a pas de solutions.*

Proposition 13
Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation trigonométrique $(E) : \sin(x) = y$ se résout suivant deux cas distincts.

- *Si $y \in [-1, 1]$, il existe $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(x_0) = y$.*
  Et, l'ensemble des solutions de (E) est :
  $$\{x_0 + 2k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$
  On a $\sin(x) = y$ si et seulement si $x \equiv x_0 \mod (2\pi)$ ou $x \equiv \pi - x_0 \mod (2\pi)$.
- *Si $y \notin [-1, 1]$, l'équation n'a pas de solutions.*

Exercice 1 — *Résoudre les équations $\cos(x) = -1$ et $\sin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$*

2 Formulaires

Proposition 14 (**Valeurs particulières de** cos **et** sin)
On a :

1. $\cos(0) = 1, \sin(0) = 0$. $\cos(2\pi) = 1$, $\sin(2\pi) = 0$.
2. $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
3. $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$.
4. $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
5. $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.
6. $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition 15 (**Théorème de Pythagore trigonométrique**)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

Théorème 16 (**Formules trigonométriques de duplication de l'angle**)
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 = 1 - 2\sin(a)^2$.
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

On utilise parfois $\cos(a)^2 = \frac{\cos(2a)+1}{2}$.

Théorème 17 (**Formules d'addition et de soustraction**)
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
2. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
3. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
4. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

Théorème 18 (**Formules de factorisation**)
Soient p et $q \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
2. $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
3. $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
4. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

Théorème 19 (**Formules de développement**)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$
2. $\sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$
3. $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$

Les formules de factorisation et de développement découlent des formules d'addition et de soustraction.
On utilise souvent ces formules en analyse ou en géométrie, pour transformer un produit de $\cos, \sin$ en une somme ou bien pour transformer une somme de $\cos, \sin$ en un produit.

Exemple 20 — *Pour calculer une primitive de $x \mapsto \cos(2x)\sin(3x)$, on va transformer le produit en une somme.*
Pour résoudre l'équation $\cos(5x) + \cos(2x) = 0$, on va transformer la somme en un produit.

Nous reverrons les fonctions sinus et cosinus dans la suite du cours, notamment en analyse (calcul de dérivée, limites,...).

3 Fonction tangente

Définition 21
On définit la fonction tangente, notée $\tan$, par :

$$\begin{array}{rcl}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}.$$

Autrement dit, on a $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.
Attention, on ne peut donner un sens à $\tan(x)$ que quand $\cos(x) \neq 0$.

4 Dérivées

Proposition 22
On a les dérivées suivantes :

1. $\cos' = \sin$.
2. $\sin' = \cos$.
3. $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$.

Bilan du contenu <u>nécessaire</u> à maîtriser :

- *Connaître les valeurs de* $\cos$ *et de* $\sin$ *pour* $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.
- *Savoir simplifier les cos/sin en* $-x|\pi + x|\frac{\pi}{2} - x$.
- *Cercle trigonométrique, sens trigonométrique. Savoir placer les angles particuliers, savoir repérer la position d'un point* x *pour déterminer son* $\cos$ *et son* $\sin$.
- *Formule du théorème de Pythagore* $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
- *Connaître le développement de* $\cos(a+b), \sin(a+b)$. *Cas particulier* $a = b$ *pour* $\cos(2a), \sin(2a)$.
- *Savoir résoudre les équations* $\cos(x) = y$, $\sin(x) = y$.
- *Fonction tangente : Définition, valeurs particulières, graphe.*
- *Connaître les dérivées de* $\cos, \sin, \tan$.