Feuille de TD n° 1

Divisibilité, Congruences

8 septembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.
• Déterminer la division euclidienne de 154 par 12.
En déduire que 12 ne divise pas 154.

Exercice 2.
• Simplifier modulo 15 : 7^2, 7×11, 7×13, et 7^3.
• Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $7n \equiv 2 \bmod (15)$.

Exercice 3.

1. Calculer $\mathrm{pgcd}(33, 28)$ avec l'algorithme d'Euclide.
2. Calculer $\mathrm{pgcd}(12, 15)$ et $\mathrm{ppcm}(12, 15)$. Calculer $\mathrm{pgcd}(12, 15)\mathrm{ppcm}(12, 15)$. Que trouve-t-on ?
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathrm{pgcd}(n^2, n^5 + 1) = 1$.

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $11 \mid 3^{5n} + 5^{5n+1} + 4^{5n+2}$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{65362} par 7.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que 3 ne divise pas $n^2 + 1$.

Exercice 5.
• Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $10^n \equiv 1 \bmod (3)$.
• Démontrer la *règle de* 3 :
Soit $m \in \mathbb{N}$ dont l'écriture décimale est $m = \overline{a_r \dots a_0}$. Alors m est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres $a_0 + \dots + a_r$ est divisible par 3.
• Démontrer la *règle de* 11 :
Soit $m \in \mathbb{N}$ dont l'écriture décimale est $m = \overline{a_r \dots a_0}$. Alors m est divisible par 11 si et seulement si la somme de ses chiffres $a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^r a_r$ est divisible par 11.

Exercice 6.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer $\mathrm{pgcd}(n + 2, n + 5)$.
Déterminer les valeurs possibles de $\mathrm{pgcd}(n + 3, 2n^2 - 1)$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 7. • Soit $n \geq 0$, tel que $n + 2 \mid n^2 + 5$. Montrer que l'on a alors $n + 2 \mid 9$.
• Trouver les $n \geq 0$ tels que $n + 2 \mid n^2 + 5$.

Exercice 8. Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que $7 \mid 10a + b$ si et seulement si $7 \mid a + 5b$.
Est-ce que $7 \mid 1682$?

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 9. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y = 0\}$
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y = 1\}$
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y \geq 0\}$
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$
5. $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$
6. $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{N}\}$

Exercice 10. Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Indications

Exercice 2

2 Trouver un k tel que $7k \equiv 1 \bmod (15)$.

Exercice 3

2 Chercher le plus petit multiple commun parmi les multiples de 12 et de 15.

Exercice 4

1. Regarder $(3^5)^n$,$(5^5)^n$,$(4^5)^n$ modulo 11.
2. Regarder les puissances de 2 modulo 7 :
   $2^0 \equiv ?$ mod 7, $2^1 \equiv ?$ mod 7, etc.
   Avec une division euclidienne bien choisie, en déduire une simplification de 2^{65362} modulo 7.
3. Regarder à quoi est congru $n^2 + 1$ modulo 3 selon que $n \equiv 0$ mod 3, $n \equiv 1$ mod 3, $n \equiv 2$ mod 3.

Exercice 5

2 Utiliser le lien entre divisibilité par n et congruence modulo n.

3 Commencer par calculer $10^n \bmod (11)$.

Exercice 6

1. Pour $d = \text{pgcd}(a, b)$, on a $d \mid a$ et $d \mid b$.

Exercice 8

1. Trouver k tel que $10k \equiv 1 \bmod (7)$.

Exercice 10

Si $x \in F$ alors $\lambda x \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.