Feuille de TD n° 10

Applications linéaires, Division euclidienne de polynômes

1er janvier 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+z, x+y) \end{array}$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la bijection réciproque f^{-1}. Vérifier que f^{-1} est une application linéaire.

- Tout d'abord, il est clair que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- Soit $(u,v,w,) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{cases} y+z &= u \\ x+z &= v \\ x+y &= w \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y+z &= u \\ x+z &= v \\ x-z &= w-u \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} y &= \frac{v-u+w}{2} \\ z &= \frac{u+w-v}{2} \\ x &= \frac{w-u+v}{2} \end{cases}.$$

L'équation $f(x,y,z) = (u,v,w)$ a une et une seule solution (x,y,z) pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ donc f est bijective et sa bijection réciproque est

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{w-u+v}{2}, \frac{v-u+w}{2}, \frac{u+w-v}{2}\right) \end{array}.$$

f^{-1} est clairement une application linéaire.

Exercice 2.
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Soit $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)(X-2))$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

---

1. On a
$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q)(X) &= (P+\lambda Q)(X+1) - (P+\lambda Q)(X) \\ &= P(X+1) - P(X) + \lambda\left(Q(X+1) - Q(X)\right) \\ &= f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$
Donc f est linéaire.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c$, on a
$$f(P) = 2aX + a + b,$$
donc $f(P) = 0$ si et seulement si $a = b = 0$, c'est-à-dire $\ker P = \mathbb{R}$ l'ensemble des polynômes constants.
3. On déduit aussi de cette formule que $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}_1[X]$.
4. On a $f(1) = 0$, $f(X) = 1$ et $f(X^2) = 2X + 1$ donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Les polynômes 1, $X-1$ et $(X-1)(X-2)$ ont des degrés échelonnés donc ils forment une famille libre. Par dimension, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. On a alors $f(1) = 0$, $f(X-1) = 1$ et $f((X-1)(X-2)) = 2(X-1)$ donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.
Soit E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E. Montrer que l'application $g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est un isomorphisme.

---

g est bien une application linéaire.

- Montrons que g est injective. Soit $x \in \ker g$, on a alors $x \in \ker u \cap G = \{0\}$.
- Montrons que g est surjective. Soit $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Puisque $G \oplus \ker u = E$, il existe $x_G \in G$ et $x_K \in \ker u$ tels que $x = x_G + x_K$. Donc $y = u(x_G + x_K) = u(x_G) = g(x_G) \in \operatorname{Im} g$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 4. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Si E est de dimension finie, en déduire que f est une homothétie (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$).
On pourra commencer l'étude en dimension 1 puis 2.
3. Montrer que le résultat est toujours vrai en dimension infinie.
On pourra considérer deux éléments x, $y \in E$ et comparer λ_x et λ_y selon que (x, y) est liée ou libre.

---

1. Soit $x \in E$, si $x = 0$ alors $f(x) = 0$ donc tout $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ convient. Sinon, la famille $(x, f(x))$ est liée donc il existe a, $b \in \mathbb{K}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ tels que $ax + bf(x) = 0$. Or $x \neq 0$ donc $b \neq 0$. Ainsi $\lambda_x = -\frac{b}{a}$ convient.
2. Si E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_k) = \lambda_k e_k$. Soit $e = e_1 + \ldots + e_n$, on a alors $f(e) = \lambda_e e_1 + \ldots + \lambda_e e_n$, mais aussi $f(e) = f(e_1) + \ldots + f(e_n) = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Par unicité des coordonnées dans une base, $\lambda_e = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Donc finalement, pour tout $x \in E$, $f(x) = f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + x_n \lambda_n e_n = \lambda_e x$.
3. Soit x et y deux vecteurs non nuls de E.
Supposons d'abord que (x, y) est liée donc $x = \mu y$ avec $\mu \neq 0$. On a alors $f(x) = \lambda_x x = \lambda_x \mu y$ et $f(x) = f(\mu y) = \mu f(y) = \mu \lambda_y y$. On en déduit que $\lambda_x = \lambda_y$.
Supposons maintenant que (x, y) est libre. On a $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ et $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ donc $(\lambda_x - \lambda_{x+y})x + (\lambda_y - \lambda_{x+y})y = 0$. La famille est libre donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$.
Dans tous les cas, on obtient que $\lambda_x = \lambda$ pour tout $x \in E$.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 5.
Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $X^3 - X^2 + X - 1$ par $X + 1$
2. $X^4 - 3X^3 + 2$ par $X^2 + 2$
3. $3X^5 + 2X^2 + X - 4$ par $X^2 + X + 1$
4. $X^n - 1$ par $X - 1$, pour $n \geq 1$

---

1. On a $X^3 - X^2 + X - 1 = (X^2 - 2X + 3)(X + 1) + (-4)$
2. On a $X^4 - 3X^3 + 2 = (X^2 - 3X - 2)(X^2 + 2) + (6X + 6)$
3. On a $3X^5 + 2X^2 + X - 4 = (3X^3 - 3X^2 + 5)(X^2 + X + 1) + (-4X - 9)$
4. On a $X^n - 1 = (X - 1)(1 + X + \ldots + X^{n-1})$. Donc le quotient de la division euclidienne vaut $1 + X + \ldots + X^{n-1}$ et le reste vaut 0.

Exercice 6.
Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
• Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$.
• Montrer que l'on a $X - a \mid P$ si et seulement si $P(a) = 0$.
• Soit $b \in \mathbb{K}$. Montrer que l'on a $(X - a)(X - b) \mid P$ si et seulement si $P(a) = P(b) = 0$.

• Soit $P(X) = Q(X)(X - a) + R(X)$ la division euclidienne de P par $X - a$.
On a $\deg(R) < 1$, donc $R(x) = b$ avec $b \in \mathbb{K}$.
D'après les propriétés des fonctions polynômiales, on a :

$$P(a) = Q(a)(a - a) + b = 0 + b = b,$$

donc on a $R(X) = b = P(a)$.
Le reste de la div. eucl. de P par $(X - a)$ est $P(a)$.
• Le polynôme $X - a$ divise P si et seulement si le reste dans la division euclidienne de $X - a$ par P vaut 0, si et seulement si $P(a) = 0$.
• Si $P(X) = Q(X)(X - a)(X - b)$, on trouve alors que $P(a) = Q(a)(a - a)(a - b) = 0$ et $P(b) = Q(b)(b - a)(b - b) = 0$.
Réciproquement, supposons que $P(a) = P(b) = 0$.
On a donc $(X - a) \mid P$, donc $P(X) = Q_1(X)(X - a)$.
Comme $P(b) = 0$, on a $0 = Q_1(b)(b - a)$. Donc, on a $Q_1(b) = 0$.
Ainsi, $(X - b)$ divise Q_1, d'où $Q_1(X) = Q_2(X)(X - b)$.
On obtient alors $P(X) = Q_2(X)(X - b)(X - a)$.

Exercice 7.
Soient $n > p > 0$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(P) = p$.
On pose $F = \{Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que $P \mid Q\}$.
Déterminer $\dim(F)$.

Soit $Q \in F$. On a donc $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = RP$.
On a ainsi $\deg(Q) = \deg(P) + \deg(R)$.
Comme $Q \in \mathbb{K}_n[X]$, on a donc $\deg(R) \leq \deg(Q) - \deg(P) = n - p$.
Réciproquement, pour tout $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(R) \leq n-p$, on a $\deg(RP) \leq p+(n-p) \leq n$, et RP est un multiple de P.
On a donc $F = \{RP, \text{ avec } R \in \mathbb{K}_{n-p}[X]\}$. Ainsi, la famille $(P(X), XP(X), \dots, X^{n-p}P(X))$ est contenue dans F.
Cette famille est échelonnée en degré donc est libre.
De plus, cette famille est génératrice de F car $(1, X, \dots, X^{n-p})$ est une base de $\mathbb{K}_{n-p}[X]$.
Donc, cette famille est une base de F, et $\dim(F) = n - p + 1$.