Feuille de TD n° 10

Applications linéaires, Division euclidienne de polynômes

27 novembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.
On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+z, x+z, x+y) \end{array}$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la bijection réciproque f^{-1}. Vérifier que f^{-1} est une application linéaire.

Exercice 2.
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Soit $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)(X-2))$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 3.
Soit E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E. Montrer que l'application $g : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est un isomorphisme.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 4. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Si E est de dimension finie, en déduire que f est une homothétie (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$).
   On pourra commencer l'étude en dimension 1 puis 2.
3. Montrer que le résultat est toujours vrai en dimension infinie.
   On pourra considérer deux éléments $x, y \in E$ et comparer λ_x et λ_y selon que (x, y) est liée ou libre.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 5.
Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $X^3 - X^2 + X - 1$ par $X + 1$
2. $X^4 - 3X^3 + 2$ par $X^2 + 2$
3. $3X^5 + 2X^2 + X - 4$ par $X^2 + X + 1$
4. $X^n - 1$ par $X - 1$, pour $n \geq 1$

Exercice 6.
Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
• Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$.
• Montrer que l'on a $X - a \mid P$ si et seulement si $P(a) = 0$.
• Soit $b \in \mathbb{K}$. Montrer que l'on a $(X-a)(X-b) \mid P$ si et seulement si $P(a) = P(b) = 0$.

Exercice 7.
Soient $n > p > 0$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(P) = p$.
On pose $F = \{Q \in \mathbb{K}_n[X] \text{ tels que } P \mid Q\}$.
Déterminer $\dim(F)$.