FEUILLE DE TD N° 11

Applications linéaires, PGCD et PPCM de polynômes

1er janvier 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n > 0$.
On définit la fonction $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}_{n-1}[X]$, telle que $\phi(Q)$ est le reste de la dlvision euclidienne de Q par P.

1. Montrer que ϕ est une application linéaire.
2. Est-ce que ϕ est injective ? Déterminer $Ker(\phi)$.
3. Est-ce que ϕ est surjective ? Déterminer $Im(\phi)$.
4. Quelle différence y a-t-il avec la division euclidienne d'entiers ?
5. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ distincts. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\psi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ telle que

$$\psi(1) = 1\,,\ \psi(X) = X\,,\ \text{ et } Q(a) = Q(b) = 0 \text{ implique } \psi(Q) = 0\,,\ \text{ pour tout } Q \in \mathbb{K}[X].$$

Exercice 2.
1. Calculer $pgcd(X^2, (X-1)^3)$, $pgcd(X^2-1, X^3-1)$, $pgcd(X^4-1, X^6-1)$, $pgcd(X^4-2X^2+3, X^2+X)$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$: X^2-1, X^3-1, X^2-5X+2,X^2+1, X^4+1.
3. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$: X^3-1, X^n-1 $n \geq 1$, X^2-5X+2, X^2+1, X^n-z $n \geq 1$ $z = r.e^{it}$.

Exercice 3. Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que dans $\mathbb{Q}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, et dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $pgcd(P, Q)$ reste identique.
En déduire que si P divise Q dans $\mathbb{C}[X]$, alors P divise Q dans $\mathbb{Q}[X]$.
Si P divise Q, comment trouver le polynôme R tel que $Q = PR$?

Exercice 4.
1. Montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, de degré 3, qui n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$, est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Est-ce que le polynôme X^2+X+1 divise $X^{3n+8}+X^{3n+4}+X^{3n}$ dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$.
1. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P. Démontrer que P possède alors une racine w telle que $|w| > |z|$.
2. En déduire les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ solutions de l'équation.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 6.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base et une équation cartésienne de $\mathrm{Ker} f$.
2. Déterminer une base et un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Im} f$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\, f$ et en déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.
4. En déduire une matrice P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, on se donne deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E. Soit $\mathcal{C}$ une base de F.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire sur E. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}}(u)$, exprimer B en fonction de A et de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$.