Feuille de TD n° 12

Théorème du rang, Factorisation de polynômes, racines

1er janvier 2022

Pour commencer . . .

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$ et $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$.
2. Montrer l'équivalence
$$\operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u) \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im} u = \{0\}.$$
3. Montrer l'équivalence
$$\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Im} u = E.$$
4. Supposons que E est de dimension finie. Montrer que
$$\operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im} u = E \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\left(u^2\right) = \operatorname{Ker}(u) \Longleftrightarrow \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit
$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}.$$

1. Calculer $\phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
2. En déduire $\operatorname{Ker}(\phi)$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} \phi$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + u - 2\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que u est inversible et calculer u^{-1}.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(u + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.
3. Montrer que $(u - \mathrm{Id}_E) \circ (u + 2\mathrm{Id}_E) = (u + 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - \mathrm{Id}_E) = 0$.
4. En écrivant $x = \frac{1}{3}(u(x) + 2x) - \frac{1}{3}(u(x) - x)$, montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u + 2\mathrm{Id}_E) = E$.

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x_0, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ différents deux à deux. En étudiant l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \ldots, P(x_n)) \end{array}$, montrer que pour tout $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme L de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L(x_i) = y_i$.
2. Soient a, b, c trois réels distincts et soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(a) = \alpha$, $P(b) = \beta$, $P(c) = \gamma$ et $P'(c) = \delta$.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u, $v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de E tels que
$$E = \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v.$$
Montrer que les deux sommes sont directes.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 6.
Calculer les *pgcd* suivants :

1. $pgcd(X^4 - 3X^3 + 5X + 2, (X-2)(X-3))$
2. $pgcd(X^n - 1, (X-1)^n)$, $n \geq 1$
3. $pgcd(X^n - nX - 1, (X^n - nX - 1)')$, $n \geq 1$
4. $pgcd((X-2)^2(X-3), ((X-2)^2(X-3))')$

Exercice 7.
Factoriser les polynômes suivants. Dire si le polynôme est irréductible, scindé, à racines simples.

1. $X^2 - 3X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
2. $X^3 - 2X^2 + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$
3. $X^n - z^n$ dans $\mathbb{C}[X]$, pour $z \neq 0$ et $n \geq 1$.
4. $X^4 + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
5. $X^3 + 15X - 5$ dans $\mathbb{Q}[X]$. (on pourra chercher l'ensemble des racines de ce polynôme sur $\mathbb{Q}$)

Exercice 8.

1. Soit $n \geq 1$. Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$ a-t-il des racines multiples ?
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non-nul tel que $P' \mid P$. Montrer que P ne possède qu'un seul facteur irréductible P_1.
   Que peut-on dire sur $\deg(P_1)$?.
   Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nuls tels que $P' \mid P$.
3. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, de degré n. Montrer que $Q(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(X)}{k!}$. (On pourra utiliser des applications linéaires, ou des bases.)