Feuille de TD n° 14

Applications linéaires, Polynômes

1er janvier 2022

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 1.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Donner le rang de f.
3. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
4. Soit $\mathcal{B} = ((1,2,0),(3,1,0),(0,2,1))$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

---

1. On résout le système

$$\begin{cases} -3x - y + z &= 0 \\ 8x + 3y - 2z &= 0 \\ -4x - y + 2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - y + z &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= x \\ y &= -2x \end{cases}.$$

   On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{vect}\,((1,-2,1))$.
2. D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}\, f = 3 - \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 2$.
3. Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$. On a $f(e_1) = -3e_1 + 8e_2 - 4e_3$, $f(e_2) = -e_1 + 3e_2 - e_3$ et $f(e_4) = e_1 - 2e_2 + 2e_3$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Soit $P = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)P = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -1 \\ 13 & 27 & 4 \\ -6 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\, u$.

On a

$$\begin{aligned} u(x,y,z) = 0 &\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ -x + 2y - 2z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 3y - z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= -4y \\ z &= 3y \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{vect}\,((-4,1,3))$. D'après le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}\, u = 2$ donc $\mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et u, $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'on a équivalence entre :

(i) $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$;

(ii) u et v sont des projecteurs et $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v)$.

Raisonnons par double implication.

$i \Rightarrow ii$. On suppose que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$. On a alors

$$u \circ u = (u \circ v) \circ u = u \circ (v \circ u) = u \circ v = u.$$

De même pour v. Donc u et v sont des projecteurs.
Maintenant, si $u(x) = 0$ alors $v(x) = v(u(x)) = 0$, et si $v(x) = 0$ alors $u(x) = u(v(x)) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v)$.

$ii \Rightarrow i$. Soit u et v des projecteurs avec $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v) = G$. On note $F = \mathrm{Im}\, u$ et $F' = \mathrm{Im}\, v$. On a donc $E = F \oplus G = F' \oplus G$. Soit $x \in E$, on peut décomposer x de deux façons :

$$x = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G} \quad \text{et} \quad x = \underbrace{f'}_{\in F'} + \underbrace{g'}_{\in G}.$$

On a alors $u(x) = u(f') + u(g') = u(f')$. Maintenant, $u(v(x)) = u(v(f')) = u(f')$, car $f' \in F' = \mathrm{Im}\, v$ donc $v(f') = f'$ (propriétés d'un projecteur). Finalement, on a bien $u(x) = u \circ v(x)$ pour tout $x \in E$. Le raisonnement est le même pour $v = v \circ u$.

Exercice 4. 1. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \mathrm{vect}\,((1,0,0),(1,1,1))$. Trouver $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Ker}\,(f) = F$.

2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ tel que $g(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$, $g(2e_1 + 3e_4) = e_2$ et $\mathrm{Ker}\,(g) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$.

---

1. La famille $((1,0,0),(1,1,1))$ est une base de F. On la complète en une base $((1,0,0),(1,1,1),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$ et on définit $f : x(1,0,0) + y(1,1,1) + z(0,0,1) \longmapsto z(0,0,1)$. On a alors $f(x(1,0,0) + y(1,1,1) + z(0,0,1)) = 0$ si et seulement si $z = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\,(f) = F$.
2. On a $g(e_4) = \frac{1}{3}(e_2 - 2g(e_1)) = \frac{1}{3}(-2e_1 + 3e_2 - 2e_3)$, donc les images de e_1 et e_4 sont fixées. De plus, $g(e_1 + 3e_2 - e_4) = 0$ donc $g(e_2) = \frac{1}{3}(g(e_4) - g(e_1))$, ce qui fixe $g(e_2)$. Enfin, $g(e_1 + 2e_2 + e_3) = 0$, ce qui fixe $g(e_3)$. Il existe donc une unique application linéaire qui vérifie ces conditions.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}\,(f^2)$, montrer que $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer la matrice de f dans cette base.

Puisque $f^2 \neq 0$, on peut trouver $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}\,(f^2)$. Si $\lambda x + \mu f(x) + \gamma f^2(x) = 0$, on applique f et on obtient $\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0$. On applique à nouveau f, ce qui donne $\lambda f^2(x) = 0$ et donc $\lambda = 0$. Donc $\mu f^2(x) = 0$, ce qui donne $\mu = 0$ et enfin $\gamma f^2(x) = 0$, donc $\gamma = 0$. La famille est libre et est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit E' un sous-espace vectoriel de E, et F' un sous-espace vectoriel de F. Montrer les égalités suivantes :

1. $\dim(u(E')) = \dim E' - \dim(E' \cap \mathrm{Ker}\,(u))$;
2. $\dim\left(u^{-1}(F')\right) = \dim(F' \cap \mathrm{Im}\, u) + \dim(\mathrm{Ker}\,(u))$.

---

1. On applique le théorème du rang à l'application $v : \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$. On a $\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Ker}\,(u) \cap E'$ et $\mathrm{Im}\, v = u(E')$.
2. On applique le théorème du rang à l'application $w : \begin{array}{ccc} u^{-1}(F') & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$. On a $\mathrm{Ker}\,(w) = \mathrm{Ker}\,(u) \cap u^{-1}(F') = \mathrm{Ker}\,(u)$, car $\mathrm{Ker}\,(u) \subset u^{-1}(F')$ puisque $0 \in F'$. De plus, $\mathrm{Im}\, w \subset F' \cap \mathrm{Im}\, u$ par définition, et si $y \in F' \cap \mathrm{Im}\, u$, alors $y = u(x)$ avec $x \in E$ et donc $x \in u^{-1}(F')$.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 7.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui, à tout polynôme P, associe sa dérivée P'. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P(X^k) = \frac{1}{k+1}X^{k+1}$. Déterminer $\ker(f \circ g)$ et $\ker(g \circ f)$.
Est-ce que $f \circ g$ est injectif ? surjectif ? bijectif ?
Est-ce que $g \circ f$ est injectif ? surjectif ? bijectif ?

Pour $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a $g(P) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$ par linéarité de g. Donc $f(g(P)) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, c'est-à-dire $f \circ g = Id_{\mathbb{K}[X]}$.
On a $f(P) = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$, donc $g(f(P)) = \sum_{k=1}^n a_k X^k = P(X) - P(0)$. Ainsi, $g \circ f = Id_{\mathbb{K}[X]} - (P \mapsto P(0))$.
Ainsi, on a $f \circ g(P) = 0$ ssi $P(X) = 0$, et $g \circ f(P) = 0$ ssi $P(X) = P(0)$.
Donc $Ker(f \circ g) = \{0\}$ et $Ker(g \circ f) = Vect(1)$.
L'endomorphisme $f \circ g$ est bijectif.
L'endomorphisme $g \circ f$ n'est pas injectif. Il n'est pas surjectif non plus car $1 \notin Im(g \circ f)$. Il n'est donc pas bijectif.

Exercice 8.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, développer le polynôme

$$P_n(X) = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^{n-1}})$$

On démontre par récurrence sur $n \geq 1$ que $P_n(X) = \sum_{k=0}^{2^n-1} X^k$.

Initialisation : Pour $n=1$, c'est vrai.

Hérédité : Supposons le résultat vrai pour un $n \geq 1$.

On a alors $P_{n+1}(X) = P_n(X)(1+X^{2^n}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} X^k + \sum_{k=0}^{2^n-1} X^{2^n} X^k$

$P_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{2^n-1} X^k + \sum_{k=0}^{2^n-1} X^{2^n+k} = \sum_{m=0}^{2^{n+1}-1} X^m$.

Cela termine la récurrence.

Exercice 9.

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non-nuls.

Montrer que les polynômes P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $P+Q$ et PQ le sont.

Supposons $P+Q$ et PQ premiers entre eux. Soit D un diviseur commun unitaire de P et de Q.

Alors D divise $P+Q$ et D divise PQ. Donc, $D=1$. Ainsi, on a $pgcd(P,Q)=1$.

Réciproquement, supposons que $pgcd(P,Q)=1$.

On suppose par l'absurde que $pgcd(P+Q,PQ) \neq 1$.

Soit D un facteur irréductible commun de $P+Q$ et de PQ.

Comme on a $D \mid PQ$ et D irréductible, on a $D \mid P$ ou $D \mid Q$.

Et comme $D \mid P+Q$, on en déduit que $D \mid P$ et $D \mid Q$ dans tous les cas.

Donc $D \mid pgcd(P,Q)=1$, ce qui est une contradiction car D est un polynôme irréductible donc $\deg(D) \geq 1$.

Ainsi, on a $pgcd(P+Q,PQ)=1$.

Exercice 10.

Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(2)=6,\ P'(2)=1 \quad \text{et} \quad P''(2)=4$$

et :

$$\forall n \geqslant 3 \quad P^{(n)}(2)=0.$$

On a $\deg(P) \geq 2$. On décompose P dans la base $((X-2)^k,\ k \geq 0)$.

Pour $\deg(P)=n$, on a $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^k$.

On en déduit que le polynôme P est unique, et vaut $P(X) = 2(X-2)^2 + (X-2) + 6$.

Exercice 11.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ deux polynômes irréductibles et distincts.
   Montrer P et de Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.
2. Combien vaut $pgcd(P,P')$?
3. Montrer que P et Q sont à racines simples dans $\mathbb{C}$.

---

1. Comme P et Q sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ et distincts, ils sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $UP+VQ=1$.
   On a donc $pgcd(P,Q)=1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
   Donc, d'après le théorème de décomposition en facteurs premiers, P et Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.
2. Comme P est irréductible, on a $\deg(P) \geq 1$. Donc $P' \neq 0$.
   On a $\deg(P') < \deg(P)$ et P irréductible. On a ainsi $pgcd(P,P')=1$.
3. Comme P et P' sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, ils sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.
   Donc, d'après le cours, P est à racines simples dans $\mathbb{C}$.
   De même pour Q.

Exercice 12.

1. Soit
   $$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$
   un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle $r = p/q$ exprimée sous forme irréductible. Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Le polynôme
   $$P(X) = X^3 + 3X - 1$$
   est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?
3. Factoriser dans $\mathbb{Q}[X]$
   $$P(X) = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$$

---

1. Comme $P(0) = a_0 \neq 0$, le nombre r est non-nul. On peut donc écrire $r = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}^*$ et $pgcd(p, q) = 1$.
   La relation $P(\frac{p}{q}) = 0$ donne, en multipliant par q^n :
   $\sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0$.
   Comme q divise $\sum_{k=1}^{n} a_k p^k q^{n-k}$, on en déduit que q divise $a_n p^n$.
   Comme p et q sont premiers entre eux, on en déduit que $q \mid a_n$.
   Comme p divise $\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k q^{n-k}$, on en déduit que p divise $a_0 q^n$.
   Comme p et q sont premiers entre eux, on en déduit que $p \mid a_0$.

2. On cherche à appliquer la question précédente en cherchant une racine rationnelle de P.
   Pour $\frac{p}{q}$ une racine rationnelle de P, on a donc $p \mid 1$, c'est-à-dire $p = \pm 1$, et $q \mid 1$, c'est-à-dire $q = \pm 1$.
   Mais $P(1) \neq 0$ et $P(-1) \neq 0$. Donc, P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.
3. On cherche à appliquer la question 1) en cherchant une racine rationnelle de P.
   Pour $\frac{p}{q}$ une racine rationnelle de P, on a donc $p \mid 5$, c'est-à-dire $p = \pm 1$ ou ± 5, et $q \mid 2$, c'est-à-dire $q = \pm 1$ ou ± 2.
   Ainsi, on a $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 5, \pm \frac{5}{2}$.
   On a $P(1) \neq 0$, $P(-1) \neq 0$. De même, $P(5) \neq 0$ et $P(-5) \neq 0$.
   De même, $P(\frac{1}{2}) \neq 0$ et $P(\frac{-1}{2}) \neq 0$.
   Après un peu de calcul, aucun de ces nombres n'est racine de P.
   Donc, P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 13.

1. Montrer que $a = \cos(\pi/9)$ est racine d'un polynôme de degré trois à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que le nombre a est irrationnel.

---

1. On va utiliser $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$.
   $\cos(\pi/3) = \cos(2\pi/9)\cos(\pi/9) - \sin(2\pi/9)\sin(\pi/9) = (2a^2 - 1)a - 2\sin(\pi/9)^2 a$
   $\cos(\pi/3) = 2a^3 - a - 2(1 - a^2)a = 4a^3 - 3a$
   Donc, a est racine de $4X^3 - 3X - \frac{1}{2}$, c'est-à-dire racine de $8X^3 - 6X - 1$.
2. Si a était rationnel, alors le polynôme $P(X) = 8X^3 - 6X - 1$ serait réductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrons que ce n'est pas le cas.
   Supposons que $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Comme $a = \cos(\pi/9) > 0$, on peut donc prendre $p, q > 0$ et $pgcd(p, q) = 1$.
   On a $P(\frac{p}{q}) = P(a) = 0$, c'est-à-dire $8p^3 - 6pq^2 - q^3 = 0$.
   On a $p \mid 8p^3 - 6pq$ donc $p \mid q^3$. Comme p et q sont premiers entre eux, on obtient donc $p = 1$.
   On a $q \mid 6pq^2 + q^3$, donc $q \mid 8p^3$. Comme p et q sont premiers entre eux, on obtient donc $q^3 \mid 8 = 2^3$.
   On a donc soit $q = 1$, soit $q = 2$.
   Mais, après calcul, 1 et $\frac{1}{2}$ ne sont pas des racines de P. Contradiction.
   Donc, a n'est pas un nombre rationnel.