Feuille de TD n° 14

Applications linéaires, Polynômes

1er janvier 2022

■ *Un peu de Géométrie . . .*

Exercice 1.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

1. Déterminer une base du noyau de f.
2. Donner le rang de f.
3. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
4. Soit $\mathcal{B} = ((1, 2, 0), (3, 1, 0), (0, 2, 1))$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\, u$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et u, $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'on a équivalence entre :

(i) $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$;

(ii) u et v sont des projecteurs et $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(v)$.

Exercice 4.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \mathrm{vect}\,((1, 0, 0), (1, 1, 1))$. Trouver $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Ker}\,(f) = F$.
2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme g de $\mathbb{R}^4$ tel que $g(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$, $g(2e_1 + 3e_4) = e_2$ et $\mathrm{Ker}\,(g) = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\big\}$.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Ker}\,\big(f^2\big)$, montrer que $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer la matrice de f dans cette base.

Exercice 6. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit E' un sous-espace vectoriel de E, et F' un sous-espace vectoriel de F. Montrer les égalités suivantes :

1. $\dim\,(u(E')) = \dim E' - \dim\,(E' \cap \mathrm{Ker}\,(u))$;
2. $\dim\,\big(u^{-1}(F')\big) = \dim\,(F' \cap \mathrm{Im}\, u) + \dim\,(\mathrm{Ker}\,(u))$.

■ *Un peu d'Algèbre . . .*

Exercice 7.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui, à tout polynôme P, associe sa dérivée P'.
Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P(X^k) = \frac{1}{k+1}X^{k+1}$. Déterminer $\ker(f \circ g)$ et $\ker(g \circ f)$.
Est-ce que $f \circ g$ est injectif ? surjectif ? bijectif ?
Est-ce que $g \circ f$ est injectif ? surjectif ? bijectif ?

Exercice 8.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, développer le polynôme

$$P_n(X) = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \dots (1 + X^{2^{n-1}})$$

Exercice 9.
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non-nuls.
Montrer que les polynômes P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $P + Q$ et PQ le sont.

Exercice 10.
Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(2) = 6,\ P'(2) = 1 \quad \text{et} \quad P''(2) = 4$$

et :
$$\forall n \geqslant 3 \quad P^{(n)}(2) = 0.$$

Exercice 11.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ deux polynômes irréductibles et distincts.
   Montrer P et de Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.
2. Combien vaut $pgcd(P, P')$?
3. Montrer que P et Q sont à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 12.

1. Soit
   $$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$$
   un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle $r = p/q$ exprimée sous forme irréductible. Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Le polynôme
   $$P(X) = X^3 + 3X - 1$$
   est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?
3. Factoriser dans $\mathbb{Q}[X]$
   $$P(X) = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$$

Exercice 13.

1. Montrer que $a = \cos(\pi/9)$ est racine d'un polynôme de degré trois à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que le nombre a est irrationnel.