Feuille de TD n° 2

(Sous-)Espaces vectoriels, Somme directe

16 septembre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Soit $T > 0$ fixé et $a \in \mathbb{R}$. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(2) = 0\}$
2. $F_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 2\}$
3. $F_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ croissante}\}$
4. $F_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ monotone}\}$
5. $F_5 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f\ T-\text{périodique}\}$
6. $F_6 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ périodique}\}$
7. $F_7 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + a\}$

Exercice 2.
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Le complémentaire F^c de F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 3.

1. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\widetilde{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $\widetilde{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 0\}$. La somme $F + G$ est-elle directe ?

Exercice 4.

1. La famille $((1, 2, 1), (1, 1, 3), (3, -2, 1))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. La famille $((1, 0, 3), (0, 1, 2), (2, -3, 0))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $G = \text{vect}\,((1, 1, 0), (1, 0, 0))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donner une base de $F \cap G$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6.
Soit $\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 7. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. A-t-on nécessairement $H \cap (F + G) = (H \cap F) + (H \cap G)$?

Exercice 8. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \subset H$. Montrer que $H = F \oplus (G \cap H)$.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 9. Montrer que 41 et 101 sont premiers.
Est-ce que 51 est premier ? Et 103 ?

Exercice 10. Simplifier $2021^{2021} \bmod 3$ Simplifier $7^{7^7} \bmod 5$.

Exercice 11. Calculer $d = \text{pgcd}(26, 133)$. Déterminer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $26.u + 133.v = d$.
Montrer que l'on a $\text{pgcd}(u, v) = 1$.