Feuille de TD n° 3

Arithmétique, Matrices, Dimension

24 septembre 2021

Pour commencer ...

Exercice 1.

1. Décomposer 1260 en produit de facteurs premiers. En déduire $\text{pgcd}(1260, 55)$ et $\text{ppcm}(1260, 55)$.
2. Décomposer en produit de facteurs premiers : 67,144, 5555.

---

1. On a $1260 = 2.630 = 4.315 = 4.3.105 = 4.9.35 = 4.9.5.7 = 2^2.3^2.5.7$.
   On a $55 = 5.11$. Donc, $\text{pgcd}(1260, 55) = 5$ et $\text{ppcm}(1260, 55) = 2^2.3^2.5.7.11 = 1260.11 = 13860$.
2. On a $67 \leq 81 = 9^2$, et 67 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7$, donc 67 est premier.
   On a $144 = 12^2 = 4^2.3^2 = 2^4.3^2$.
   On a $5555 = 5.1111 = 5.11.101$. De plus, $\sqrt{101} < 11$, et 101 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7$, donc 101 est premier. Ainsi, $5555 = 5.11.101$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que n est un carré si et seulement si $\nu_p(n)$ est pair, pour tout p premier.
2. Montrer que $\sqrt{n}$ est un nombre rationnel si et seulement si n est un carré.

---

1. Si $n = m^2$, alors on a $\nu_p(n) = \nu_p(m^2) = \nu_p(m)+\nu_p(m) = 2\nu_p(m)$, donc les p-valuations de n sont paires.
   Réciproquement, si toutes les p-valuations de n sont paires, la décomposition en produit de facteurs premiers donne
   $$n = p_1^{2\beta_1} \times \ldots \times p_r^{2\beta_r}.$$
   Donc $n = m^2$ avec $m = p_1^{\beta_1} \ldots p_r^{\beta_r}$.
2. Si n est un carré, alors $\sqrt{n}$ est un nombre entier, donc rationnel.
   Réciproquement, supposons que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. On a donc $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
   Cela donne : $a^2 = nb^2$.
   Soit p un nombre premier. On a : $\nu_p(a^2) = \nu_p(a) + \nu_p(a) = 2\nu_p(a)$ et $\nu_p(nb^2) = \nu_p(n) + \nu_p(b^2) = \nu_p(n) + 2\nu_p(b)$.
   Ainsi, on a $\nu_p(n) = 2\nu_p(a) - 2\nu_p(b)$. Donc $\nu_p(n)$ est pair pour tout nombre premier p.
   D'après le premier point, on en conclut que n est un carré.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier.
Trouver un entier $m \geq 0$ tel que $m, m+1, \ldots, m+n$ ne sont pas premiers.

Le nombre entier $n!$ est divisible par $2, 3, 4, \ldots, n$.
Ainsi, pour tout $2 \leq k \leq n$, le nombre entier $n! + k$ est divisible par k. Ce n'est donc pas un nombre premier.
Cela donne $n - 1$ nombres consécutifs qui ne sont pas premiers.
Ainsi, pour $m = (n + 2)! + 2$, $m, \ldots, m + n$ ne sont pas premiers.

Exercice 4.
Calculer :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} + 5. \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

1. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 9 & -5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$

2. $\begin{pmatrix} 5n+1 \\ 5n-3 \\ 5n-7 \\ \vdots\, n+5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ Le coefficient $a_{1,k}$ vaut $5(n-(k-1))+k = 5n+5-4k$.

3. Cette opération n'a pas de sens !

Exercice 5.
Calculer :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

---

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
3. Cette opération n'a pas de sens !
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.(-1)+2.2+3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \end{pmatrix} = 15$

■ *Pour aller plus loin . . .*

Exercice 6.

1. Déterminer les solutions de l'équation d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{N}^2$:
$$x^2 = y^2 + \text{pgcd}(x, y) + 2.$$
2. Déterminer les nombres premiers p tels que $p+2$ et $p+4$ soient premiers.
3. Montrer que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^3$.

— Soit $d = \text{pgcd}(x, y)$. L'entier d divise x, y, et d, donc d divise $x^2 - y^2 - d = 2$. On a donc $d = 1$ ou $d = 2$. Ainsi, on a $x^2 = y^2 + 3$ ou $x^2 = y^2 + 4$.
On cherche donc deux entiers positifs x, y, avec $y < x$, et dont la différence entre les carrés vaut 3 ou 4.
Si $y \geq 2$ on a $(y+1)^2 = y^2 + 2y + 1 \geq y^2 + 5 > y^2 + 4 \geq x^2$.
Ainsi, on a $y = 0$ ou $y = 1$. Pour $y = 0$ on a $y^2 + 3 = 3$ qui n'est pas un carré, et $y^2 + 4 = 4 = 2^2$. On vérifie que $(2, 0)$ est solution.
Pour $y = 1$ on a $y^2 + 3 = 4 = 2^2$ et $y^2 + 4 = 5$ qui n'est pas un carré. On vérifie que $(2, 1)$ est solution.
L'ensemble des solutions est donc $\{(2, 0), (2, 1)\}$.

— Soit p tel que p,$p+2$,$p+4$ sont premiers. On remarque que p,$p+2$ et $p+4$ ne sont pas congrus modulo 3 : $p+4 \equiv p+1 \bmod (3) \not\equiv p+2 \bmod (3) \not\equiv p \bmod (3)$. Cela veut dire que les divisions euclidiennes de p,$p+2$,$p+4$ par 3 ont des restes qui sont tous distincts.
Or, la division euclidienne d'un entier n par 3 a 3 restes possibles $(0, 1, 2)$, donc l'un de ces entiers a un reste qui vaut 0. Ainsi, l'un de ces entiers est divisible par 3. Comme c'est un nombre premier, il est alors égal à 3.
Comme on a $p \geq 2$, on doit donc avoir $p = 3$. Cela implique que $p+2 = 5$ et $p+4 = 7$.
Réciproquement, 3,5 et 7 sont des nombres premiers.

— On va montrer que cette équation n'admet pas de solutions modulo 8 :
Pour n un entier, on regarde les valeurs que peut prendre n^2 modulo 8.
On a : $1^2 \equiv 3^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \bmod (8)$, $2^2 \equiv 6^2 \equiv 4 \bmod (8)$, et $0^2 \equiv 4^2 \equiv 0 \bmod (8)$.
Donc, n^2 est congru à 0,1, ou 4 modulo 8. Ainsi, $x^2 + y^2 + z^2$ est congru à $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 modulo 8, mais pas à 7 modulo 8.
L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ n'admet donc aucune solution dans $\mathbb{Z}^3$.

Exercice 7.
Soit $n \geq 1$. Soient $1 \leq i, j, k, l \leq n$.
Montrer que $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

On a $E_{i,j} = (\delta_{i,a}\delta_{j,b})_{(a,b)}$ et $E_{k,l} = (\delta_{k,a}\delta_{l,b})_{(a,b)}$.
Donc, le coefficient (a, b) de $E_{i,j}E_{k,l}$ vaut :
$$\sum_{m=1}^{n} \delta_{i,a}\delta_{j,m}\delta_{k,m}\delta_{l,b}$$
Le coefficient dans la somme est non-nul si et seulement si $a = i$, $b = l$ et $m = k = j$.
Donc, si $j \neq k$, on a $E_{i,j}E_{k,l} = 0$.

Et si $j = k$, alors le coefficient (a, b) de $E_{i,j}E_{k,l}$ vaut 0 si $(a, b) \neq (i, l)$ et 1 sinon.
On en déduit donc que $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Exercice 8.
Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
Calculer les produits $\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times A$ et $A \times \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

On pose $A = (a_{i,j})_{(i,j)}$ et $M = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Comme A et M sont de taille $n \times n$, les deux produits sont bien définis.
Les coefficients $m_{i,j}$ de M s'écrivent : $m_{i,j} = \delta_{i,j}\lambda_i$.
Ainsi, le coefficient (i, j) de la matrice MA vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\lambda_i a_{k,j} = \lambda_i a_{i,j}.$$

Donc, $MA = (\lambda_i a_{i,j})$. La ligne numéro i de A est multipliée par λ_i.
Pour AM, le même raisonnement montre que $AM = (a_{i,j}\lambda_j)$. La colonne numéro j de A est multipliée par λ_j.

Un peu de Géométrie . . .

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$?

La famille $((1, 0, \ldots, 0), (i, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1), (0, \ldots, 0, i))$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$. Donc $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$.
On va montrer dans le cours 5 la formule $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$, ce qui nous donne ici $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = n \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2n$.

Exercice 10.
1. Soit $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et donner une base de E. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} E$?
2. Soit $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x\right\}$. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} F$?

---

1. On a

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{vect}\,((1, 0, 1), (0, 1, 2)), \end{aligned}$$

donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, la famille $((1, 0, 1), (0, 1, 2))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de E. On a donc $\dim E = 2$, c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

2. Les conditions $x + y = y + z$ et $z + t = t + x$ sont équivalentes à $x = z$ et les conditions $y + z = z + t$ et $t + x = x + y$ sont équivalentes à $y = t$. Donc

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z \text{ et } y = t\right\} = \{(x, y, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{vect}\,((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)), \end{aligned}$$

et la famille $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ est libre. Donc $\dim F = 2$.

Indications

Exercice 6 1) Chercher les valeurs possibles de $\operatorname{pgcd}(x, y)$.
2) Regarder la congruence modulo 3.
3) On pensera à la congruence modulo 8.

Exercice 3 Regarder autour de $n!$.