

FEUILLE DE TD N° 3

Arithmétique, Matrices, Dimension

24 SEPTEMBRE 2021

■ *Pour commencer...***Exercice 1.**

- Décomposer 1260 en produit de facteurs premiers. En déduire $\text{pgcd}(1260, 55)$ et $\text{ppcm}(1260, 55)$.
- Décomposer en produit de facteurs premiers : 67,144, 5555.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Montrer que n est un carré si et seulement si $\nu_p(n)$ est pair, pour tout p premier.
- Montrer que \sqrt{n} est un nombre rationnel si et seulement si n est un carré.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier.Trouver un entier $m \geq 0$ tel que $m, m+1, \dots, m+n$ ne sont pas premiers.**Exercice 4.**

Calculer :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$3. \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

Calculer :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

■ *Pour aller plus loin...***Exercice 6.**

- Déterminer les solutions de l'équation d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{N}^2$:

$$x^2 = y^2 + \text{pgcd}(x, y) + 2.$$

- Déterminer les nombres premiers p tels que $p+2$ et $p+4$ soient premiers.
- Montrer que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ n'admet pas de solutions dans \mathbb{Z}^3 .

Exercice 7.Soit $n \geq 1$. Soient $1 \leq i, j, k, l \leq n$.Montrer que $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.**Exercice 8.**Soit $n \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.Calculer les produits $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times A$ et $A \times \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

■ *Un peu de Géométrie . . .*

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{C}^n)$?

Exercice 10. 1. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel et donner une base de E . Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} E$?

2. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x\}$. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}} F$?

Indications

- Exercice 6** 1) Chercher les valeurs possibles de $\text{pgcd}(x, y)$.
2) Regarder la congruence modulo 3.
3) On pensera à la congruence modulo 8.

Exercice 3 Regarder autour de $n!$.