Feuille de TD n° 4

Dimension, Matrices

5 octobre 2021

Pour commencer . . .

Exercice 1.
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F_1 = \mathrm{vect}(u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (2, 1, 1)$.
2. $F_2 = \mathrm{vect}(v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (2, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.
3. $F_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\right\}$.
4. $F_4 = \mathrm{vect}(x_1, x_2, x_3)$ où $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $x_3 = (1, 0, 1, 1)$.
5. $F_5 = \mathrm{vect}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ où $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 1, 1)$ et $x_4 = (0, 2, -1, 1)$.

Quelle est la dimension de $F_1 + F_2$ et de $F_1 \cap F_2$?

---

1. La famille (u_1, u_2) est génératrice de F_1. C'est également une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Par conséquent, (u_1, u_2) est une base de F_1 et $\dim F_1 = 2$.
2. On remarque que $v_1 + v_2 = v_3$. On a donc $F_2 = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$. Comme dans la question précédente, la famille (v_1, v_2) est génératrice et libre (car les deux vecteurs sont non colinéaires). C'est donc une base de F_2 et $\dim F_2 = 2$.
3. On a :
$$\begin{aligned}(x, y, z) \in F_3 &\Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0\\ &\Leftrightarrow x = 2y - 3z\\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = y(2, 1, 0) + z(-3, 0, 1).\end{aligned}$$
Donc $F_3 = \mathrm{vect}((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ et la famille $((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$ est libre. Par conséquent, c'est une base de F_3 et $\dim F_3 = 2$.
4. Montrons que la famille (x_1, x_2, x_3) est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$. Cette équation est équivalente au système :
$$\left\{\begin{array}{ccccccc}\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc}\lambda_1 & = & 0\\ \lambda_2 & = & 0\\ \lambda_3 & = & 0\end{array}\right.$$
La famille (x_1, x_2, x_3) est libre et génératrice de F_4, c'est donc une base de F_4. On en déduit que : $\dim F_4 = 3$.
5. On remarque que $x_1 + x_2 = x_3$ et que $x_1 - x_2 = x_4$. On a donc $F_5 = \mathrm{vect}(x_1, x_2)$. (x_1, x_2) est une famille génératrice et libre (car les deux vecteurs sont non colinéaires), c'est donc une base de F_5. On en déduit que $\dim F_5 = 2$.

On sait que la famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est génératrice de $F_1 + F_2$. On sait aussi que $\dim F_1 + F_2 \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc cette famille doit être liée. On voit en effet que $v_2 = u_2 - \frac{1}{2}(u_1 + v_1)$. On peut alors vérifier que la famille (u_1, u_2, v_1) est libre, et donc $\dim(F_1 + F_2) = 3$. Par la formule de Grassmann, on obtient $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$. Ainsi F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que : pour tout $0 \leq k \leq n$,
$$(u^k)_k \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall p > k,\ (u^k)_p = 0.$$
Montrer que la famille $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Montrons que la famille est libre. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u^k = 0$. Pour tout $k \leq n-1$, $(u^k)_n = 0$ donc on a $\lambda_n (u^n)_n = 0$, ce qui implique $\lambda_n = 0$ car $(u^n)_n \neq 0$. On obtient donc $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k = 0$ et on peut prouver par récurrence que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

La famille est donc libre et contient $n+1$ vecteurs dans l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Donc c'est une base.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim E = n$.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

---

1. La formule de Grassmann donne
$$\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim (F + G) > n - \dim (F + G) \geq 0.$$
Donc $\dim F \cap G > 0$, c'est-à-dire $F \cap G \neq \{0\}$.

2. On a $n-1 \leq \dim(H_1+H_2) \leq n$.
   - Si $\dim(H_1+H_2) = n-1$, on a H_1 et H_2 des sous-espaces vectoriels de H_1+H_2 avec $\dim H_1 = \dim H_2 = \dim(H_1+H_2)$. Donc $H_1 = H_1+H_2 = H_2$, ce qui est exclu.
   - On a donc $\dim(H_1+H_2) = n$ et donc $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1+H_2) = n-1+n-1-n = n-2$.

Exercice 4. On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_k : x \mapsto \sin(kx)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Montrons la propriété par récurrence sur n.

- **Initialisation :** Si $n=1$, la famille (f_1) est libre car f_1 n'est pas la fonction nulle.
- **Hérédité :** Soit $n \geq 1$, supposons que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \sin(kx) = 0. \tag{1}$$
Dérivons deux fois cette égalité : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \lambda_k \sin(kx) = 0. \tag{2}$$
Faisons la différence (2)$-(n+1)^2$(1) : pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=1}^{n+1} (k^2-(n+1)^2)\lambda_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{n} (k^2-(n+1)^2)\lambda_k \sin(kx) = 0.$$
Or par hypothèse de récurrence, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre, donc on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Il reste donc $\lambda_{n+1} f_{n+1} = 0$ et donc $\lambda_{n+1} = 0$.

Exercice 5. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère :
$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}.$$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire de E.

- La fonction nulle appartient à F et par linéarité de l'intégrale, F est stable par combinaison linéaire. Donc F est un sev de E.
- On note G l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. C'est un sous-espace vectoriel de E.
  Soit $f \in F \cap G$. La fonction f est constante égale à $a \in \mathbb{R}$. De plus, $a = \int_0^1 f(t)dt = 0$. Donc la fonction f est la fonction nulle. D'où $F \cap G = \{0\}$.
  Soit $f \in E$. On note g la fonction constante qui à tout t associe $\int_0^1 f(t)dt$ et $h = f - g$. Par construction, la fonction appartient à G, la fonction h appartient à F et $f = h + g$. D'où $F \oplus G = E$.
  Finalement, F et G sont supplémentaires.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 6.
Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_{a,b} : x \mapsto a\cos(x+b)$. Soit $E = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et en donner une base.

- Soient $(a,b), (a',b') \in \mathbb{R}^2$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) + f_{a',b'}(x) &= a\cos(x+b) + a'\cos(x+b') \\ &= a(\cos x \cos b - \sin x \sin b) + a'\left(\cos x \cos b' - \sin x \sin b'\right) \\ &= \cos x\left(a\cos b + a'\cos b'\right) - \sin x\left(a \sin b + a' \sin b'\right). \end{aligned}$$
  Soit $A = (a\cos b + a'\cos b')$, $B = (a\sin b + a'\sin b')$ et $C = \sqrt{A^2+B^2}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta = \frac{A}{C}$ et $\sin\theta = \frac{B}{C}$. On obtient alors
$$f_{a,b}(x) + f_{a',b'}(x) = C(\cos x \cos\theta - \sin x \sin\theta) = C\cos(x+\theta) = f_{C,\theta}(x).$$
  Donc E est stable par addition. De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda f_{a,b} = f_{\lambda a, b}$. Enfin, la fonction nulle appartient à E. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- On a vu que toute fonction $f_{a,b}$ est combinaison linéaire de cos et sin. Or la famille $(\cos, \sin)$ est libre donc c'est une base de E.

Exercice 7. Soit $H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x+y+z+t = 0\right\}$ et $e = (1,1,1,1)$.

1. Donner une base du sous-espace vectoriel H et sa dimension.
2. Montrer que H et $\text{vect}(e)$ sont supplémentaires.
3. Si $a \in \mathbb{K}^4 \setminus H$, montrer que H et $\text{vect}(a)$ sont encore supplémentaires.

---

1. On a

$$\begin{aligned} H &= \{(x,y,z,t) \mid t = -x-y-z\} \\ &= \{(x,y,z,-x-y-z) \mid x,y,z \in \mathbb{K}\} \\ &= \{x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1) \mid x,y,z \in \mathbb{K}\} \\ &= \operatorname{vect}\left((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\right). \end{aligned}$$

   Donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$ engendré par la famille $((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$. On peut montrer que cette famille est libre, c'est donc une base de H. On a ainsi $\dim H = 3$, c'est-à-dire que H est un hyperplan de $\mathbb{K}^4$.

2. On a $\operatorname{vect}(e) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x = y = z = t\right\}$ donc $H \cap \operatorname{vect}(e) = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } x = y = z = t\right\} = \{0\}$. Donc H et $\operatorname{vect}(e)$ sont en somme directe.
   Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4$, on cherche $\lambda, \mu, \nu, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \lambda & & & +\gamma & = x & (L_1) \\ & \mu & & +\gamma & = y & (L_2) \\ & & \nu & +\gamma & = z & (L_3) \\ -\lambda & -\mu & -\nu & +\gamma & = t & (L_4) \end{array}\right. \underset{L_4' = L_1+L_2+L_3+L_4}{\iff} \left\{\begin{array}{lll} \lambda & = x - \gamma & (L_1) \\ \mu & = y - \gamma & (L_2) \\ \nu & = z - \gamma & (L_3) \\ 4\gamma & = x+y+z+t & (L_4') \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda & = \frac{3x-y-z-t}{4} \\ \mu & = \frac{-x+3y-z-t}{4} \\ \nu & = \frac{-x-y+3z-t}{4} \\ \gamma & = \frac{x+y+z+t}{4} \end{array}\right. .$$

   Le système a une solution donc $H + \operatorname{vect}(e) = \mathbb{K}^4$.

3. Si $a \notin H$ alors $H \cap \mathbb{K}a = \{0\}$, c'est-à-dire que H et $\mathbb{K}a$ sont en somme directe, et donc $\dim(H \cap \mathbb{K}a) = 0$. D'après la formule de Grassmann, on a alors $\dim(H + \mathbb{K}a) = 4 = \dim \mathbb{K}^4$. Donc H et $\mathbb{K}a$ sont supplémentaires. *On aurait pu utiliser cet argument dans la question précédente !*

Exercice 8. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e_1', \ldots, e_n')$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_j')$ soit encore une base de E.

Supposons que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_j')$ n'est pas une base.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. La famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_j')$ contient n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n et n'est pas une base. Donc elle liée. Or la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est libre. Donc e_j' peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1})$.

On peut faire ce raisonnement pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ donc tous les vecteurs de la base $(e_1', \ldots, e_n')$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1})$. La famille $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est donc génératrice, ce qui est absurde car $\dim E = n$.

Donc il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_j')$ est une base.

Un peu d'Algèbre . . .

Exercice 9. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer $A^2 - A - 2I_3$.
- En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

• Le calcul donne : A^2 =). (

On remarque que $A^2 = A + 2I_3$, donc $A^2 - A - 2I_3 = 0$.

• On a

$$0 = A^2 - A - 2I_3 = A(A - I_3) - 2I_3,$$

c'est-à-dire

$$I_3 = A\frac{A - I_3}{2}.$$

Comme les matrices A et $B = \frac{A - I_3}{2}$ commutent ($AB = BA$), on en déduit que A est inversible, et que son inverse vaut

$$A^{-1} = \frac{A - I_3}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $N^m = 0$ pour un certain entier $m \geq 1$. (on dit que N est **nilpotente**)

- Montrer que N n'est pas inversible.
- Montrer que $I_n - M$ est inversible.

• Si N était inversible, alors $N^m = N \times \ldots \times N$ serait inversible, pour tout $m \geq 1$. Or, pour m assez grand on a $N^m = 0$, et la matrice nulle n'est pas inversible.
Donc, N n'est pas inversible. • Soit $m \geq 1$ tel que $N^m = 0$.
Les matrices N et I_n commutent ($N.I_n = I_n.N = N$). On peut alors utiliser la formule de

la somme géométrique.
Cela donne :

$$(I_n - N)(I_n + N + N^2 + \ldots + N^{m-1}) = I_n + N + \ldots + N^{m-1} - (N + N^2 + \ldots + N^m) = I_n - N^m = I_n.$$

Les matrices $I_n - N$ et $B = I_n + N + \ldots + N^{m-1}$ commutent, donc on a $B(I_n - N) = (I_n - N)B = I_n$. La matrice $I_n - N$ est donc inversible, d'inverse $(I_n - N)^{-1} = I_n + N + N^2 + \ldots + N^{m-1}$.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 2I_3$.

- Calculer B^n pour tout $n \geq 0$.
- En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 0$.

- On a $B^0 = I_3$, $B^1 = B$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $B^3 = 0$.

Ainsi, on en déduit que $B^n = 0$ pour tout $n \geq 3$.
- On a $A = 2I_3 + B$. Les matrices $2I_3$ et B commutent ($2I_3 \cdot B = B \cdot 2I_3 = 2B$), ce qui permet d'utiliser la formule du binôme :

$$A^n = (2I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} B^k \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} = 1.2^n.I_3 + B.n.2^{n-1} + B^2.\frac{n(n-1)}{2}.2^{n-2}.$$

C'est-à-dire : $A^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n(n-1)}{8} \\ 0 & 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Indications

Exercice 9 On cherche une matrice B telle que $AB = I_3$ et $BA = I_3$.

Exercice 10. 2) On pourra utiliser une formule d'arithmétique pour faire apparaître la quantité N^m.